

គន្លឹះដោះស្រាយសមីការ

ដឺក្រេទី៣ជាប់ខ្ពស់ងាយ

១. សមីការដឺក្រេទី៣

សមីការដឺក្រេទី៣ មានមួយអញ្ញាត ជាសមីការដែលមានរាងទូទៅ $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ($a \neq 0$)
ដែល a, b, c, d ជាមេគុណ ហើយ x ជាអញ្ញាត។

☞ វិធីសាស្ត្រនោះស្រាយសមីការដឺក្រេទី៣មានមួយអញ្ញាតដែលអាចរកបានដោយធានា

□ វិធីសាស្ត្រគ្រឹះ

យើងមានសមីការ $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ($a \neq 0$) (*)

វិធីទី១ ៖

បើ $x = x_0$ ជាឫសមួយនៃសមីការ(*) នោះយើងចែកពហុធា $ax^3 + bx^2 + cx + d$ នឹង $(x - x_0)$

យើងបាន $\frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{x - x_0} = a'x^2 + b'x + c'$ រួចដោះស្រាយសមីការ $a'x^2 + b'x + c = 0$

ដើម្បីរកឫសពីរទៀត។

វិធីទី២ ៖ បើ $x = x_0$ ជាឫសមួយនៃសមីការ(*) នោះយើងបាន $ax^3 + bx^2 + cx + d = (x - x_0)(ax^2 + \alpha x + \beta)$

$$\text{ដែល ៖ } \begin{cases} \alpha - ax_0 = b \\ -x_0\beta = d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = ax_0 + b \\ \beta = -\frac{d}{x_0} \end{cases}$$

សម្គាល់៖

- បើ $a + b + c + d = 0$ នោះយើងបាន $x_1 = 1$ ជាឫសមួយនៃសមីការ (*)
- បើ $a - b + c - d = 0$ ឬ $a + c = b + d$ នោះយើងបាន $x_1 = -1$ ជាឫសមួយនៃសមីការ(*)។

លំហាត់គំរូ ៖ ដោះស្រាយសមីការ $2x^3 + 3x^2 - 4x - 1 = 0$

ចំណោះស្រាយ

អប្បបរមាទី១: យើងមានសមីការ $2x^3 + 3x^2 - 4x - 1 = 0$ (1)

ដោយ $a + b + c + d = 2 + 3 - 4 - 1 = 0$ នោះ $x_1 = 1$ ជាឫសមួយនៃសមីការ (*)

ចែកពហុធា $2x^3 + 3x^2 - 4x - 1 = 0$ នឹង $x - 1$

យើងបាន $\frac{2x^3 + 3x^2 - 4x - 1}{x - 1} = 2x^2 + 5x + 1$

ដោះស្រាយសមីការ $2x^2 + 5x + 1 = 0$

$$\Delta = 25 - 8 = 17$$

$$x_{2,3} = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{4}$$

ដូចនេះ

សមីការមានឫស

$$x_1 = 1, x_{2,3} = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{4}$$

រូបមន្តទី២: យើងមានសមីការ $2x^3 + 3x^2 - 4x - 1 = 0$ (1)

ដោយ $a+b+c+d = 2+3-4-1=0$ នោះ $x_1 = 1$ ជាឫសមួយនៃសមីការ (*)

យើងបាន (1) : $2x^3 + 3x^2 - 4x - 1 = (x-1)(2x^2 + \alpha x + \beta)$

$$\begin{cases} \alpha = ax_0 + b = 2 \times 1 + 3 = 5 \\ \beta = -\frac{d}{x_0} = -\frac{-1}{1} = 1 \end{cases}$$

យើងបាន សមីការទៅជា $(x-1)(2x^2 + 5x + 1) = 0$

$$x-1=0 \Rightarrow x_1 = 1$$

$$x^2 + 5x + 1 = 0$$

$$\Delta = 25 - 8 = 17$$

$$x_{2,3} = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{4}$$

ដូចនេះ សមីការមានឫស $x_1 = 1, x_{2,3} = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{4}$

□ វិធីសាស្ត្រសមីការ $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ($a \neq 0$)

ក. ករណី $a=1$ នោះសមីការ(*)មានរាង $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ឬសងាយនៃ (*) ជាតួចែកដាច់នៃ d ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការនេះ។

ឧទាហរណ៍ : ដោះស្រាយសមីការ $x^3 - 6x^2 + 3x + 18 = 0$ (3)

ចំណោះស្រាយ

$$\text{តាង } f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 18$$

តួចែកដាច់នៃ 18 គឺ $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18$

$$\text{ដោយ } f(3) = 3^3 - 6 \times 3^2 + 3 \times 3 + 18 = 0$$

នោះ $x=3$ ជាឫសមួយនៃសមីការ (3)

$$\Rightarrow x^3 - 6x^2 + 3x + 18 = (x-3)(x^2 + \alpha x + \beta)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = ax + b = 1 \times 3 - 6 = -3 \\ \beta = -\frac{d}{x_0} = -\frac{18}{3} = -6 \end{cases}$$

យើងបានសមីការទៅជា $(x-3)(x^2 - 3x - 6) = 0$

$$\bullet x-3=0 \Rightarrow x_1 = 3$$

$$\bullet x^2 - 3x - 6 = 0$$

$$\Delta = 9 + 24 = 33$$

$$\Rightarrow x_{2,3} = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{2}$$

ដូចនេះ សមីការមានឫស $x_1 = 3, x_{2,3} = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{2}$

ខ. ករណី $a \neq 1$

របៀបទី១: តាង $x = \frac{t}{a}$ នោះ (*) យើងបានសមីការទៅជា $a\left(\frac{t}{a}\right)^3 + b\left(\frac{t}{a}\right)^2 + c\left(\frac{t}{a}\right) + d = 0$
 $\Leftrightarrow t^3 + bt^2 + act + a^2d = 0$

តាង $ac = c', a^2d = d'$

យើងបានសមីការទៅជា $t^3 + bt^2 + c't + d' = 0$ (**)

- រកសំណុំតួចែកដាច់នៃ d'

- យកធាតុនីមួយៗនៃសំណុំនេះ ជំនួសក្នុង (**) បើវាផ្ទៀងផ្ទាត់ នោះវាជាឫសនៃសមីការនេះ
 រួចទាញរកតម្លៃ x ។

លំហាត់គំរូ : ដោះស្រាយសមីការ $2x^3 - 5x^2 + 8x - 3 = 0$ (4)

ចំណោះស្រាយ

តាង $x = \frac{t}{2}$ នោះ (4) ទៅជា $2\left(\frac{t}{2}\right)^3 - 5\left(\frac{t}{2}\right)^2 + 8\left(\frac{t}{2}\right) - 3 = 0$
 $\Leftrightarrow t^3 - 5t^2 + 16t - 12 = 0$

ដោយ $a+b+c+d = 1-5+16-12 = 0$

នោះ $t_1 = 1$ ជាឫសមួយនៃសមីការ $t^3 - 5t^2 + 16t - 12 = 0$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$ ជាឫសមួយនៃសមីការ (4)

នោះ (4) : $2x^3 - 5x^2 + 8x - 3 = \left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2 + \alpha x + \beta)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = ax_0 + b = 2 \times \frac{1}{2} - 5 = -4 \\ \beta = -\frac{d}{x_0} = -\frac{-3}{1/2} = 6 \end{cases}$$

យើងបានសមីការទៅជា $\left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2 - 4x + 6) = 0$

$$x - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}$$

$$2x^2 - 4x + 6 = 0 \text{ ឬ } x^2 - 2x + 3 = 0$$

$$\Delta' = 1 - 3 = -2$$

$$\sqrt{\Delta'} = \sqrt{-2} = i\sqrt{2}$$

$$x_{2,3} = 1 \pm i\sqrt{2}$$

ដូចនេះ សមីការមានឫស

$$x_1 = \frac{1}{2}, x_{2,3} = 1 \pm i\sqrt{2}$$

រៀបចំ៖

យើងមានសមីការ $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ($a \neq 0$) (*)

- រកសំណុំតួចែកដាច់នៃ $a : A = \{\dots\}$

- រកសំណុំតួចែកដាច់នៃ $d : D = \{\dots\}$

- រកសំណុំផលធៀប $Q = \frac{D}{A} = \left\{ x : x = \frac{p}{q} / p \in D, q \in A \right\}$

- យកធាតុនីមួយៗនៃសំណុំ Q ទៅជំនួសក្នុងសមីការ(*)

បើធាតុមួយណាផ្ទៀងផ្ទាត់ នោះវាជាឫសរបស់សមីការ។

លំហាត់គំរូ : ដោះស្រាយសមីការ $16x^3 + 8x^2 + 13x - 4 = 0$ (5)

ចំណោះស្រាយ

សំណុំតួចែកដាច់នៃ 16 គឺ $A = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16\}$

សំណុំតួចែកដាច់នៃ -4 គឺ $D = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$

នោះសំណុំផលធៀបរវាង A និង D គឺ

$$Q = \left\{ \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{8}, \pm \frac{1}{16} \right\}$$

តាង $f(x) = 16x^3 + 8x^2 + 13x - 4$

ដោយ $f\left(\frac{1}{4}\right) = 0$ នោះ $x = \frac{1}{4}$ ជាឫសមួយនៃសមីការ (5)

នោះ $16x^3 + 8x^2 + 13x - 4 = \left(x - \frac{1}{4}\right)(16x^2 + \alpha x + \beta)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = ax_0 + b = 16 \times \frac{1}{4} + 8 = 12 \\ \beta = -\frac{d}{x_0} = -\frac{-4}{1/4} = 16 \end{cases}$$

យើងបានសមីការទៅជា $\left(x - \frac{1}{4}\right)(16x^2 + 12x + 16) = 0$

$$\bullet x - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{4}$$

$$\bullet 16x^2 + 12x + 16 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 3x + 4 = 0$$

$$\Delta = 9 - 64 = -55$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{-55} = i\sqrt{55}$$

$$x_{2,3} = \frac{-3 \pm i\sqrt{55}}{8}$$

ដូចនេះ សមីការមានឫស

$$x_1 = \frac{1}{4}, x_{2,3} = \frac{-3 \pm i\sqrt{55}}{8}$$

លំហាត់ទី១ : ដោះស្រាយសមីការដឺក្រេទី៣ខាងក្រោម:

ក. $x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = 0$

ខ. $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$

គ. $3x^3 - 13x^2 + 16x - 4 = 0$

ឃ. $3x^3 - 3x^2 - 2x - 8 = 0$

ង. $3x^3 - 2x^2 + 2x + 1 = 0$

ច. $x^3 - 5x + 2 = 0$

ឆ. $-x^3 + 3x^2 - x + 3 = 0$

ជ. $6x^3 + 3x^2 - 10x - 7 = 0$

ឈ. $5x^3 + 17x^2 + 8x + 12 = 0$

ញ. $-x^3 + 2x^2 + 5x - 6 = 0$

២. សមីការដឺក្រេទី៤

□ ដោះស្រាយសមីការមានរាង: $Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 \pm Bx + A = 0$ (សមីការឆ្លុះ)

របៀបដោះស្រាយ:

ចែកអង្គទាំងពីរនៃសមីការនឹង $x^2 \neq 0$ ($x=0$ មិនមែនជាឫស)

យើងបាន $Ax^2 + Bx + C \pm \frac{B}{x} + \frac{A}{x^2} = 0$

$$A\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + B\left(x \pm \frac{1}{x}\right) + C = 0$$

តាង $t = x \pm \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 \mp 2$

នោះសមីការទៅជា $A(t^2 \mp 2) + Bt + C = 0 \Leftrightarrow At^2 + Bt + C \mp 2A = 0$

ជាសមីការដែលអាចដោះស្រាយបាន។

✎ បើសមីការមានរាង $Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 \pm nBx + n^2A = 0$

ចែកអង្គទាំងពីរនៃសមីការនឹង $x^2 \neq 0$ ($x=0$ មិនមែនជាឫស) រួចតាង $t = x \pm \frac{n}{x}$

លំហាត់ទី២ : ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម:

ក. $3x^4 - 4x^3 - 14x^2 - 4x + 3 = 0$

ខ. $5x^4 - 16x^3 - 42x^2 - 16x + 5 = 0$

គ. $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$

ឃ. $63x^4 - 1024x^3 + 4226x^2 - 1024x + 63 = 0$

ង. $4x^4 + 17x^3 + 8x^2 + 17x + 4 = 0$

ច. $6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$

□ ដោះស្រាយសមីការមានរាង $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (សមីការប៊ីក្វាដ)

របៀបដោះស្រាយ:

តាង $t = x^2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{t}$ នោះសមីការទៅជា $at^2 + bt + c = 0$

លំហាត់ទី៣ : ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម:

ក. $4x^4 - 109x^2 + 225 = 0$

ខ. $3x^4 - 22x^2 - 45 = 0$

គ. $x^4 + 17x^2 + 52 = 0$

ឃ. $2x^4 - x^2 - 1 = 0$

□ ដោះស្រាយសមីការមានរាង $(x+a)^4 + (x+b)^4 = c$

របៀបដោះស្រាយ: តាង $t = x + \frac{a+b}{2}$ ឬ $x = t - \frac{a+b}{2}$ ជំនួសក្នុងសមីការខាងលើ

$$\text{យើងបាន } \left(t - \frac{a+b}{2} + a\right)^4 + \left(t - \frac{a+b}{2} + b\right)^4 = c \Leftrightarrow \left(t + \frac{a-b}{2}\right)^4 + \left(t - \frac{a-b}{2}\right)^4 = c$$

ពន្លាតសមីការខាងលើដោយប្រើរូបមន្ត $(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$

នោះសមីការមានរាង $at^4 + bt^2 + c = 0$ ជាអាំងតេក្រាលដោះស្រាយបាន។

លំហាត់ទី៤ : ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម:

ក. $(x+4)^4 + (x+6)^4 = 64$

ខ. $(x-4.5)^4 + (x-5.5)^4 = 1$

គ. $x^4 + (x-1)^4 = 97$

ឃ. $(x-3)^4 + (x-2)^4 = (2x-5)^4$

□ ដោះស្រាយសមីការមានរាង $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = k (k \neq 0)$ ហើយដែលចំពេញលក្ខខណ្ឌ $a+d = b+c$

របៀបដោះស្រាយ:

ផ្គុំ $(x+a)(x+d)(x+b)(x+c) = k$ រួចគុណពន្លាត

$$\text{យើងបាន } [x^2 + (a+d)x + ad][x^2 + (b+c)x + bc] = k$$

តាង $t = x^2 + px$ ដែល $p = a+d = b+c$

នោះសមីការទៅជា $(t+ad)(t+bc) = k$ ជាសមីការដែលអាចដោះស្រាយបាន។

លំហាត់ទី៥ : ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម:

ក. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 3$

ខ. $(x+4)(x+5)(x+7)(x+8) = 4$

គ. $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7) = 105$

ឃ. $(x-1)(x-3)(x+4)(x+7) = 297$

□ សមីការទូទៅ $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$

រកឫសងាយនៃសមីការ គឺជាតួចែកដាច់នៃ e ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការនេះ ។

លំហាត់ទី៦ : ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម

ក. $3x^4 - 7x^3 - 33x^2 - 33x - 10 = 0$

ខ. $4x^4 - 13x^3 - 13x^2 - 4x + 12 = 0$

គ. $x^4 - 9x^3 + 18x^2 - x - 9 = 0$

ឃ. $2x^4 + 5x^3 - 51x^2 + 80x - 28 = 0$

រំលឹក - សមីការ $A\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + B\left(x \pm \frac{1}{x}\right) + C = 0$

$$\text{យើងតាង } t = x \pm \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 \mp 2$$

$$\text{- សមីការ } (x \pm a)^2 + (y \pm b)^2 + (z \pm c)^2 = 0 \text{ លុះត្រាតែ } \begin{cases} x \pm a = 0 \\ y \pm b = 0 \\ z \pm c = 0 \end{cases}$$

លំហាត់ទី៧ : ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម

ក. $\frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2} = \frac{x^2 + x + 1}{x}$

ខ. $x + y + z - 2\sqrt{x-2010} - 2\sqrt{y-2011} - 2\sqrt{z+4018} = 0$

គ. $x^4 = \frac{11x-6}{6x-11}$