



សាលាបង្រៀនគូរស្តីម

គ្រឿងប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ(ផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រ)

បង្រៀនដោយ៖ ស្កន ប៊ុនណ្ណង

វិញ្ញាសាទី១

ប្រធាន

I. គេឲ្យសមីការ $Z^2 + 2Z + 2 = 0$ ។

ក. ដោះស្រាយសមីការ $Z^2 + 2Z + 2 = 0$ ។

ខ. សរសេរ Z_1 និង Z_2 ដែលឫសនៃសមីការជាទ្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

គ. គណនា Z_1^{2023} ; Z_2^{2023} ជាទម្រង់ពិជគណិត ។

II. ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម៖

A. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}$

B. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2}$

C. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - x + 4}{x^2 - 2x + 2}$

III. គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'' - 4y' + 3y = 2x^2 - 3$ ។

ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E'): y'' - 4y' + 3y = 0$ ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'' - 4y' + 3y = 2x^2 - 3$ ។

គ. ចូរបង្ហាញថា f ជាចម្លើយមួយនៃសមីការ (E') ដែល $f(x) - g(x) = 0$ ហើយគេឲ្យ $g''(x) - 4g'(x) + 3g(x) = 0$ ។

IV. ក្នុងប្រអប់មួយគេមានឃ្លីពណ៌ក្រហមចំនួន ៧គ្រាប់ ឃ្លីពណ៌ខៀវ ៦គ្រាប់ និងឃ្លីពណ៌ស ៥គ្រាប់ ។ គេចាប់យកឃ្លីចំនួន ៣គ្រាប់ចេញពីប្រអប់មួយដោយចៃដន្យ។

ចូរគណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

ក. គេចាប់យកឃ្លីចេញពីប្រអប់សុទ្ធតែពណ៌ដូចគ្នា ។

ខ. គេចាប់យកឃ្លីទាំងអស់ចេញពីប្រអប់សុទ្ធតែមានពណ៌ខុសៗគ្នា ។

គ. គេចាប់យកឃ្លីចេញពីប្រអប់យ៉ាងតិចមានឃ្លីពណ៌ក្រហមមួយ ។

V. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវ៉ិច្ចមាន $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ មួយ គេឲ្យចំនុច $A(0, -2, -4)$; $B(2, 0, 4)$ និង $C(1, 2, 4)$ ។

ក. គណនាវ៉ិចទ័រ $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ រួចគណនាក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណ ABC ។

ខ. ចូរសរសេរសមីការប្លង់ (ABC) ដែលកាត់តាមចំណុច C ។

គ. សរសេរសមីការទូទៅនៃស្វ័យ S ដែលមានអង្កត់ធ្នឹត BC ។ រកចម្ងាយពីប្លង់ (ABC) ទៅស្វ័យ S

VI. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0, +\infty)$ ដោយ $f(x) = x - 2 + \frac{\ln x}{x}$ ។

គេតាង (C) ក្រាបរបស់ក្នុងប្លង់ប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរមេ $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ។

១. គេឲ្យ g ជាអនុគមន៍កំណត់លើចន្លោះ $I \in (0, +\infty)$ ដោយ $g(x) = x^2 - \ln x + 1$ ។ សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ g

ដោយមិនតម្រូវឲ្យសិក្សាលីមីតចុងដែនកំណត់នៃ g ។ កំណត់សញ្ញានៃ $g(x)$ ក្នុងចន្លោះ $I \in (0, +\infty)$ ។

២. ក. គណនាលីមីតចុងដែនកំណត់នៃ f ។ ស្រាយបង្ហាញថាបន្ទាត់ d_1 ដែលមានសមីការ $y = x - 2$ ជាអាស៊ីមតូតទៅនឹងក្រាប (C)

។ សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប (C) ធៀបនឹងបន្ទាត់ d_1 ។

ខ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចសិក្សាអថេរភាពនិងសង់តារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$ ។

គ. សង់ក្រាប (C) និងអាស៊ីមតូត d_1 របស់វា។



សាលាបង្រៀនគូរស្តីម

គ្រឿងប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ (ផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រ)

បង្រៀនដោយ៖ ស្កន ប៊ុណ្ណង

វិញ្ញាសាទី២

ប្រធាន

- I. គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $V = \sqrt{2} - i\sqrt{6}; W = 2 - 2i$ ។
ក.គណនា $V^2; Z = \frac{V}{W}$ ជាទម្រង់ពិជគណិត។ ខ.សរសេរ V និង W ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។
ខ.បង្ហាញថា Z^{12} ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។
- II. គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x) = \frac{4x^2 - 6x + 5}{x^3 - 6x^2 + 9x}$ កំណត់ចំពោះ $x \neq 0$ ។
រកតម្លៃ A, B និង C ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ $f(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2}$ ។ រួចគណនា $\int_1^2 f(x) dx$ ។
- III. គេឲ្យសមីការទូទៅនៃអេលីប៊ីប៊ី $2x^2 + y^2 - 4x + 4y + 4 = 0$ ។
ក.ចូរសរសេរសមីការស្តង់ដារនៃអេលីប៊ីប៊ី។
ខ.រក ផ្ចិត កំពូល កំណុំ អ័ក្សតូចនិងអ័ក្សធំនៃអេលីប៊ីប៊ីរួចសង់អេលីប៊ីប៊ីនោះ។
- IV. គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'' + y = \sin x$ ។
ក. កំណត់ចំនួនពិត a ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ $g(x) = a \sin x$ ជាចម្លើយនៃ (E) ។
ខ. បង្ហាញថាគ្រប់ចម្លើយ f ផ្សេងទៀតនៃ (E) ផ្ទៀងផ្ទាត់ $(f - g)'' + (f - g) = 0$ ។
គ. ដោះស្រាយសមីការ $y'' + y = 0$ ។
- V. គេមានប្រអប់មួយមានឃ្លីពណ៌ខៀវ 6 គ្រាប់ ឃ្លីពណ៌ខ្មៅ 4 គ្រាប់ ហើយនឹងឃ្លីពណ៌ស 5 គ្រាប់។គេចាប់យកឃ្លី 4 គ្រាប់ពីក្នុងប្រអប់ដោយចៃដន្យ ។ចូររកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖
ក.គេចាប់បាន ឃ្លីពណ៌ខ្មៅ 2 និងពណ៌ស 1។
ខ.គេចាប់បានឃ្លីទាំងអស់មានពណ៌ដូចគ្នា។
គ.គេចាប់បានឃ្លីទាំងអស់យ៉ាងតិចមានពណ៌ខៀវ 2។
ឃ.គេចាប់បានឃ្លីទាំងអស់មានពណ៌ខុសគ្នា។
- VI. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យបីចំណុច $A = (1, 3, 2), B = (0, 2, 4)$ និង $C = (2, 4, 3)$ ។
ក.បង្ហាញថាត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ចំណុច A ។
ខ.គណនាផលគុណនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ ។
គ.រកសមីការប្លង់ (ABC) កាត់តាមចំណុច C ដែលមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}$ ។
ឃ.រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ កាត់តាមចំណុច A ហើយស្របនឹងប្លង់ (ABC) ។
ង.រកសមីការស្វ៊ែ S ដែលមានអង្កត់ធ្នឹត AB ។
- VII. គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $y = f(x) = x + 1 + \frac{1}{e^x - 1}$ មានក្រាប (C) ។
ក.រកដែនកំណត់នៃ f ។គណនាលីមីតក្នុងដែនកំណត់នៃ f រួចរកអាស៊ីមតូតនៃអនុគមន៍ f ។
ខ.ចូរសិក្សាដេរីវេ $f'(x)$ នឹងសង់តារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$ ។
គ.សង់ក្រាប (C) នឹងអាស៊ីមតូតនៃអនុគមន៍ ។



សាលាបង្រៀនគូរស្តីម

គ្រឿងប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ (ផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រ)

បង្រៀនដោយ៖ ស្កន ប៊ុនណ្ណង

វិញ្ញាសាទី III

ប្រធាន

- I. គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$; $Z_2 = 1 - i$
 - ក. គណនា Z_1^2 ; Z_2^2 ជាទម្រង់ពិជគណិត ។
 - ខ. សរសេរ Z_1, Z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។
- II. គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x) = \frac{3x^2 - 6x + 2}{2x^3 - 4x^2 + x}$ កំណត់ចំពោះ $x \neq 0$ ។
 - ក. រកតម្លៃ A, B និង C ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ $f(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x-1} + \frac{C}{(2x-1)^2}$ ។
 - ខ. គណនា $\int_1^2 f(x) dx$ ។
- III. គេឲ្យសមីការទូទៅនៃអេលីប៊ី $x^2 + 2y^2 - 4x + 4y + 4 = 0$ ។
 - ក. ចូរសរសេរសមីការស្តង់ដារនៃអេលីប៊ី។
 - ខ. រក ផ្ចិត កំពូល កំណុំ អ័ក្សតូចនិងអ័ក្សធំនៃអេលីប៊ី។ រួចសង់អេលីប៊ីនោះ។
- IV. គេប្រើលេខ $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ ដើម្បីសរសេរចំនួនមានលេខ 3 ខ្ទង់ ដែលខ្ទង់ទាំង 3 មានលេខខុសគ្នា ។
 - ក. រកចំនួនករណីអាច
 - ខ. គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ A "ដែលចំនួនមានលេខ 3 ខ្ទង់នោះជាពហុគុណនៃ 5 "
 - គ. គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ B "ដែលចំនួនមានលេខ 3 ខ្ទង់នោះជាពហុគុណនៃ 2 "
- V. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y' + 2y = \frac{2e^{-x}}{1 + 2e^x}$
 1. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាអនុគមន៍ f ដែល $f(x) = e^{-2x} \ln(1 + 2e^x)$ ជាចម្លើយនៃ (E) ។
 2. បង្ហាញថាអនុគមន៍ φ ជាចម្លើយនៃ (E) លុះត្រាតែ $(\varphi - f)$ ជាចម្លើយនៃ $(E'): y' + 2y = 0$ ។
- VI. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន (O, i, j, k) គេឲ្យបីចំណុច $A = (1, 0, -1)$
 $B = (0, 2, 2)$ និង $C = (2, 0, 1)$ ។
 - ក. គណនាផលគុណនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ រួចគណនាក្រលាផ្ទៃត្រីកោណ ABC ។
 - ខ. រកសមីការប្លង់ (ABC) កាត់តាមចំណុច C ដែលមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}$ ។
 - គ. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ កាត់តាមចំណុច A ហើយស្របនឹងប្លង់ (ABC) ។
 - ឃ. រកសមីការស្វ៊ែ S ដែលមានអង្កត់ផ្ចិត AB ។
- VII. គេឲ្យអនុគមន៍កំណត់ដោយ $y = f(x) = x^2 \ln x - \frac{x^2}{2}$ ។
 - ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ គណនាលីមីត រួចរកអាស៊ីមតូតនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។
 - ខ. ចូរសិក្សាដេរីវេ $f'(x)$ នឹងសង់តារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$ ។
 - គ. សង់ក្រាប (C) នឹងអាស៊ីមតូតនៃអនុគមន៍។



សាលាបង្រៀនគូរស្តីម

គ្រឿងប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ (ផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រ)

បង្រៀនដោយ៖ ស្កន ប៊ុនណ្ណង

វិញ្ញាសាទី២

ប្រធាន

- I. គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិចពីរគឺ $Z_1 = -2\sqrt{3} + 2i$ និង $Z_2 = \sqrt{3} - i$ ។
 - ក. គណនា $Z_1 + Z_2$; $Z_1 - Z_2$; $Z_1 Z_2$ និង $\frac{Z_1}{Z_2}$ ជាទម្រង់ពិជគណិត។
 - ខ. សរសេរ Z_1 ; Z_2 ; $Z_1 Z_2$ និង $\frac{Z_1}{Z_2}$ ជាទម្រង់ធរណីមាត្រ។
- II. គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin 2x + \sin^2 x}{x^3 + x^2} \quad B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos^2 x)}{\tan^3 x - \sin^3 x} \quad C = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sqrt{x^3 + 2} - \sqrt{2}} \quad D = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{x}$$
- III. គេមានសមីការទូទៅនៃប៉ារ៉ាបូល $P : x^2 - 6x - 12y - 3 = 0$ ។
 - ក. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាបូល P ជាទម្រង់ស្តង់ដា។
 - ខ. រកកូអរដោនេនៃកំពូល V កំណុំ F អ័ក្សធ្នូ និងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិសនៃប៉ារ៉ាបូល P ។ រួចសង់ក្រាបនៃប៉ារ៉ាបូល P ។
- IV. ក. គណនាអាំងតេក្រាលកំណត់៖ $I = \int (\sqrt{x} - x^2 + \frac{1}{x} + e^{-x})$ និង $J = \int_0^{e-1} \frac{1}{x-1} dx$
 - ខ. ដោះស្រាយសមីការ៖ $(E_1) : 2y' - y = 0$ និង $(E_2) : -y'' + 5y' - 4y = 0$
 - គ. បង្ហាញថាអនុគមន៍ $F(x) = x \ln x - x + 2015$ ជាព្រីមីទាល់នៃអនុគមន៍ $f(x) = \ln x$ ។
- V. នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ មួយ គេមានចំណុច $A(1, 0, 2)$, $B(-1, 1, 4)$ និង $C(5, -1, 3)$ ។
 - ក. គណនាកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ និង $\overline{BC}$ និងប្រវែងរបស់វ៉ិចទ័រនេះ។
 - ខ. គណនាផលគុណស្កាលែនៃវ៉ិចទ័រ $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$, $\overline{AB} \cdot \overline{BC}$ និង $\overline{AC} \cdot \overline{BC}$ ។
 - គ. គណនា $\overline{AB} \times \overline{BC}$ រួចទាញថាចំណុច A, B, C តែមិនត្រង់គ្នា។ រកសមីការប្លង់ ABC និង រកផ្ទៃក្រឡានៃប្លង់។
 - ឃ. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ ដែលកាត់តាមចំណុច A និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overline{BC}$ ។
- VI. បៀមួយសន្លឹកត្រូវបានហូតចេញដោយចៃដន្យពីហ្វី 52 សន្លឹក។ រកប្រូបាបដែលហូតបាន៖
 - ក/. ជាសន្លឹកកំលោះ។
 - ខ/. ជាសន្លឹកពណ៌ខ្មៅ។
 - គ/. ជាសន្លឹកដែលគ្មានរូប។
- VII. គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $y = f(x) = x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ ហើយមានក្រាប C ។
 ១. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។ គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ចុងដែនកំណត់។ រកសមីការអស៊ីមតូតឈរទាំងពីរនៃក្រាប C ។
 ២. គណនា និងសិក្សាសញ្ញានៃដេរីវេ $f'(x)$ ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។
 ៣. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $L : y = x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ C ។
 ៤. គណនា $f(-2)$ និង $f(2)$ ។ សង់ក្រាប C , ($\ln 3 = 1.1$) ។
 ៥. កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឲ្យសមីការ $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = a$ មានឬសវិជ្ជមានតែមួយគត់ ដោយប្រើក្រាប C ។



សាលាបង្រៀនគូរស្តីប

គ្រឿងប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ (ផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រ)

បង្រៀនដោយ៖ ស្កន ប៊ុនណ្ណង

វិញ្ញាសាទី៥

ប្រធាន

- I. គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ IR ដោយ $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1 & \text{បើ } x \leq 1 \\ 3x + 2 & \text{បើ } x \geq 1 \end{cases}$ ដែល $a; b$ ជាចំនួនពិត។
ចូរកំណត់ a និង b ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f មានដេរីវេត្រង់ $x=1$ ។ តើ f មានដេរីវេលើ IR ឬទេ?
- II. គណនា: $A = \int_0^2 xe^{2x} dx$; $B = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \sin x dx$; $C = \int_1^e x \ln x dx$; $D = \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{2}{x}$; $E = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xe^x + \cos x - 2x - 1}{x^2}$
- III. គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'' + 9y = 2 \cos x$ ។
គេតាង $y = f(x) + k \cos x$ ដែល $f(x)$ ជាអនុគមន៍នៃ x ហើយ k ជាចំនួនថេរ ។
ក.រក k ដែល $y = f(x) + k \cos x$ ជាចម្លើយ (E) ហើយ $f(x)$ ជាចម្លើយនៃ $f''(x) + 9f(x) = 0$ ។
ខ.ដោះស្រាយសមីការ $f''(x) + 9f(x) = 0$ រួចទាញរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) ។
គ.រកចម្លើយមួយនៃ (E) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $y(0) = 0$ និង $y'(\pi) = 3$ ។
- IV. គេឲ្យសមីការទូទៅនៃអ៊ីពែរបូលី (E): $4x^2 - 9y^2 + 32x + 18y + 91 = 0$ ។
ក.ចូរសរសេរសមីការស្តង់ដារនៃអ៊ីពែរបូល។
ខ.រកកូអរដោនេនៃ ផ្ចិត កំពូល កំណុំ និងសមីការអស៊ីមតូតនៃអ៊ីបេរូល។ រួចសង់អ៊ីពែរបូលនោះ។
- V. នៅក្នុងធុងមួយមានប៊ូល១២ ដែលសរសេរពីលេខ ១ដល់១២ ។ គេចាប់យកប៊ូល៣ចេញពីក្នុងធុងដោយចៃដន្យ។
ក.រកប្រូបាបដែល “គេចាប់បានប៊ូលទាំងបីមានលេខសុទ្ធតែចែកដាច់នឹង៣”
ខ.រកប្រូបាបដែល “គេចាប់បានប៊ូលតែមួយគត់មានលេខសុទ្ធតែចែកដាច់នឹង៣”
គ.រកប្រូបាបដែល “គេចាប់បានប៊ូល១មានលេខតាមលំដាប់កើន ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមាន ផលសង្ខេប $d = 3$ ”
- VI. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ មានទិសដៅវិជ្ជមាន គេមានចំណុច $A(1, 4, 3), B(2, 2, 5)$ និង $C(0, 2, 1)$ (ឯកតាលើអ័ក្សស្មើ $1cm$) ។
ក. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ L ដែលកាត់តាម A ហើយស្របនឹងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{BC}$ ។
ខ. គណនា $|\overrightarrow{AB}|$ និង $|\overrightarrow{BC}|$ រួចប្រាប់ប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC ។
ឃ. គណនា $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ ។ ទាញថាចំណុច A, B និង C មិនស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ។
គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC រួចទាញរកមាឌនៃតេត្រាអែត $OABC$ ។
- VII. គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $y = f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 1}, \forall x \in \mathbb{R}$ មានក្រាបតំណាង (C) ។
ក.រកលីមីតចុងដែនកំណត់
ខ.បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(d): y = x + 2$ ជាអស៊ីមតូតនៃខ្សែកោង (C) ខាង $-\infty$ រួចសិក្សាទីតាំងនៃខ្សែកោង (C) ធៀបនឹងបន្ទាត់ (d) ។
គ.+ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $\forall x \in \mathbb{R}$ គេបាន : $f(x) = x - 2 + \frac{4}{e^x + 1}$ ។
+ទាញបញ្ជាក់ថាបន្ទាត់ $(\Delta): y = x - 2$ ជាអស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង (C) ខាង $+\infty$
ឃ.រកអថេរភាពរួចសង់តារាងអថេរភាព $f(x)$ រួចសរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះ (T) ប៉ះទៅនឹងក្រាប (C) ត្រង់ $x_0 = 0$
ច.សង់ក្រាប (C) បន្ទាត់ប៉ះ (T) បន្ទាត់ (Δ) និងបន្ទាត់ (d) ។



សាលាបង្រៀនគូរស្តីប

គ្រឿងប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ (ផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រ)

បង្រៀនដោយ៖ ស្កន ប៊ុណ្ណាង

វិញ្ញាសាទី៦

ប្រធាន

- I. គេឲ្យចំនួនកុំព្លិច $Z_1 = \sqrt{3} - i$ និង $Z_2 = \overline{Z_1} - \sqrt{3}$ ។
 ក. គណនា $Z_1 + Z_2$; $Z_1 - Z_2$ ជាទម្រង់ពីជគណិត។
 ខ. សរសេរ $Z_1 \cdot Z_2$; $\frac{Z_1}{Z_2}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្ររួចគណនា Z^{2025} ដែល $Z = Z_1 \cdot Z_2$ ជាទម្រង់ពីជគណិត។
- II. គណនាលីមីតខាងក្រោម
 ក. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} - \ln x)$ ខ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 2 + \cos x}{x^2}$ គ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$ ឃ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{x^2} - 2}{\sin^2 x}$
- III. គេឲ្យប៉ារ៉ាបូល $(P): y^2 - 4y + 4x = 0$ ។ រកកូអរដោនេនៃកំពូល V កំណុំ F នឹងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស Δ នៃប៉ារ៉ាបូល។ រួចសង់ក្រាបនៃប៉ារ៉ាបូល។
- IV. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ $(E): y'' - 4y' + 5y = \sin x - 2\cos x$ ។
 ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្មើសូន្យ $(E'): y'' - 4y' + 5y = 0$ ។
 ខ. កំណត់ចំនួនពិត $a; b$ ដែល $y_p = a\sin x - b\cos x$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (E) ។
 គ. បង្ហាញថា h ជាចម្លើយមួយនៃសមីការ (E) ដែល $y = f + h$ ហើយ $f'' - 4f' + 5f = 0$ ។ ទាយរកចម្លើយទូទៅនៃ (E) ។
- V. នៅក្នុងចង់មួយមានឃ្លីចំនួន ១២ គ្រាប់ ក្នុងនោះមានឃ្លីពណ៌ខ្មៅ៥គ្រាប់ ឃ្លីពណ៌ក្រហម៤គ្រាប់ និងឃ្លីពណ៌ស៣គ្រាប់ ។ គេចាប់យកឃ្លី៤គ្រាប់ដោយចៃដន្យ ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍
 A “ចាប់បានឃ្លីពណ៌ខ្មៅយ៉ាងតិចមួយគ្រាប់”
 B “ចាប់បានឃ្លីពណ៌ខ្មៅ២គ្រាប់និងឃ្លីពណ៌ក្រហម២គ្រាប់”
 C “ពុំចាប់បានឃ្លីពណ៌ក្រហមយ៉ាងច្រើន៣គ្រាប់”
- VI. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ទិសដៅវិជ្ជមាន $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេមានបីចំណុច $A(0,3,2); B(1,0,4)$; និង $C(3,2,0)$ ។
 ក. គណនាផលគុណស្កាលែនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ រួចទាញក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC ។
 ខ. រកសមីការប្លង់ (ABC) ដែលកាត់តាមចំណុច B ហើយមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}$ ។
 គ. រកសមីការស្វ៊ី S ដែលមានកាំ $r = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|$ ដែលមានចំណុចកាត់ A ។
- VII. គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ពី $(0, +\infty)$ ដោយ $f(x) = x - 2 + \frac{\ln x}{x}$ និងមានក្រាប (C) ។
 A. គេឲ្យ g ជាអនុគមន៍កំណត់លើចន្លោះ $I \in (0, +\infty)$ ដោយ $g(x) = x^2 - \ln x + 1$ ។
 សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ g ដោយមិនតម្រូវឲ្យសិក្សាលីមីតចុងដែនកំណត់នៃ g ។ កំណត់សញ្ញា នៃ $g(x)$ ក្នុងចន្លោះ $I \in (0, +\infty)$ ។
 B. ក. គណនាលីមីតចុងដែនកំណត់។ បង្ហាញថាបន្ទាត់ $y = x - 2$ អាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ $f(x)$ ។
 ខ. គណនា $f'(x)$ រួចសិក្សាអថេរភាពនឹងសង់តារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$ ។
 គ. សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងបន្ទាត់ y នឹងសង់ក្រាប (C) ។
 ឃ. សង់បន្ទាត់ y និងសង់ក្រាប (C) ។



សាលាបង្រៀនគូរស្តីម

គ្រឿងប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ (ផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រ)

បង្រៀនដោយ៖ ស្កន ប៊ុណ្ណាង

វិញ្ញាសាទី II

ប្រធាន

I) គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z = 1 + i$ និង $w = (\sqrt{3} + 1) + i(\sqrt{3} - 1)$ ។

១. ចូរសរសេរ $X = z.w$ ជាទម្រង់ពិជគណិត និងជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

២. សរសេរ z និង X ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ រួចទាញរកទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ w ។

II) គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^3 + 81}$ ខ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$ គ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin x - 2\sin x \cos x}{\sqrt{x^3 + 3} - \sqrt{3}}$ ឃ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 4x - 1} - \sqrt{x^2 + 3x})$

III) គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'' + 9y = xe^{2x}$ ។

ក. រកចម្លើយពិសេសនៃ (E) ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការ (E') : $y'' + 9y = 0$ រួចទាញរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) ។

IV) នៅក្នុងចង្កូមមានឃ្លីចំនួន ១២គ្រាប់ ក្នុងនោះមានឃ្លីពណ៌ខ្មៅ៥គ្រាប់ ឃ្លីពណ៌ក្រហម៤គ្រាប់ និងឃ្លីពណ៌ស៣គ្រាប់

។ គេចាប់យកឃ្លី៤គ្រាប់ដោយចៃដន្យ ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍

A “ចាប់បានឃ្លីពណ៌ខ្មៅយ៉ាងតិចមួយគ្រាប់”

B “ចាប់បានឃ្លីពណ៌ខ្មៅ២គ្រាប់និងឃ្លីពណ៌ក្រហម២គ្រាប់”

C “ពុំចាប់បានឃ្លីពណ៌ក្រហមយ៉ាងច្រើន៣គ្រាប់”

V) គេឲ្យសមីការប្លង់ $(\alpha): 2x - 2y + z - 1 = 0$ និងសមីការស្វ័យ $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 8y - 4z + 12 = 0$ ។

ក. បង្ហាញថាប្លង់ (α) ប៉ះនឹងស្វ័យ (S) ត្រង់ចំនុច A ។

ខ. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច A ។

គ. កំណត់សមីការបន្ទាត់ (Δ) កែងនឹងប្លង់ (α) ត្រង់ចំនុច A ។

ឃ. ក្រៅពីចំនុច A បន្ទាត់ (Δ) ប្រសព្វ (S) ត្រង់ចំនុច B មួយទៀត។ ចូរកំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច B រួចកំណត់សមីការនៃប្លង់ (β) ដែលប៉ះស្វ័យ (S) ត្រង់ B ។

VI) គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x) = x + \frac{1-3e^x}{1+e^x}$ មានក្រាប (C) ។

១. បង្ហាញថា $f(x) = x + 1 - \frac{4e^x}{1+e^x}$ និងគណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty$ ។ ស្រាយបំភ្លឺថាបន្ទាត់ d_1 ដែលមានសមីការ $y = x + 1$

ជាអាស៊ីមតូតទៅនឹងក្រាប (C) ត្រង់ $-\infty$ ។ សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប (C) ធៀបនឹងបន្ទាត់ d_1 ។

២. គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $+\infty$ ។ ស្រាយបំភ្លឺថាបន្ទាត់ d_2 ដែលមានសមីការ $y = x - 3$ ជាអាស៊ីមតូតទៅនឹងក្រាប (C) ត្រង់ $+\infty$ ។ សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប (C) ធៀបនឹងបន្ទាត់ d_2 ។

៣. a. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និងបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x , $f'(x) = \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2$ ។

b. សិក្សាអថេរភាពនៃ f លើ $\mathbb{R}$ និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។ សង់ក្រាប (C) និងអាស៊ីមតូត d_1 និង d_2 របស់វា។



សាលាបង្រៀនគូរស្តីប

រៀបប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ(ផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រ)

បង្រៀនដោយ៖ ស្កន ប៊ុនណ្ណង

វិញ្ញាសាទី៨

ប្រធាន

I. (១០ពិន្ទុ) គណនាលីមីត

ក. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 1}{2e^x}$

ខ. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{\sqrt{x} - 1}$

គ. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{3} - x\right)}{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}$

II. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាល

ក. $I = \int_0^1 (2 - x + 2x^2) dx$

ខ. $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\cos 4x - \cos 2x}{2} \right) dx$

គ. គេមាន $f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x - 1}$ បង្ហាញថា $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4(2x - 1)}$ ។ គណនា $K = \int_{-1}^0 f(x) dx$ ។

III. (១៥ពិន្ទុ) គេមានចំនួនកុំផ្លិច $Z_1 = i(3 + 2i)(2 + i)^2$

a. សរសេរ Z_1 ជាទម្រង់ពិជគណិត រួចមក $\overline{Z_1}$ ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ Z_1 ។

b. សរសេរ $Z_2 = Z_1 + 19$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។ គណនា Z_2^4, Z_2^6 ។

IV. (១០ពិន្ទុ) ក្នុងមណ្ឌលសុខភាពមួយមានបុគ្គលិកនារី ៩ នាក់ និងបុគ្គលិកបុរស ៥ នាក់។ គេរៀបចំជាក្រុមការងារមួយក្រុមគ្នា ៤ នាក់ ដោយចៃដន្យឡិច៖តាមភូមិ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

A. ក្រុមការងារដែលរៀបចំមានបុគ្គលិកទាំង ៤ នាក់សុទ្ធតែជានារី B. ក្រុមការងារដែលរៀបចំមានបុគ្គលិក 50% ជានារី

V. (២៥ពិន្ទុ) ១. ក្នុងលំហរប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេមានចំណុច $M(0, 1, 1); N(1, 2, 2); P(0, 3, -4); Q(-2, 1, 0)$

a. រកវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{NP}, \overrightarrow{NQ}, \overrightarrow{PQ}$ និងប្រវែងវ៉ិចទ័រទាំងបួននេះ។

b. បង្ហាញថាត្រីកោណ NPQ ជាត្រីកោណកែងត្រង់ Q និងរកផ្ទៃក្រឡារបស់ត្រីកោណនេះ។

២. រកកូអរដោនេកំពូល កំណុំ និងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិសរបស់ប៉ារ៉ាបូលដែល មានសមីការ $(y + 2)^2 = -8(x - 2)$ ។ សង់ប៉ារ៉ាបូលនេះ។

VI. (៤០ពិន្ទុ) គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y' + y = 2(x + 1)e^{-x}$

1. បង្ហាញថាអនុគមន៍ y_0 កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $y_0(x) = (x^2 + 2x)e^{-x}$ ជាចម្លើយមួយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) ។

2. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E'): y' + y = 0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $y(0) = e$ ។

VII. (៤០ពិន្ទុ) A. គេមានអនុគមន៍ $f(x)$ កំណត់ដោយ $f(x) = x - \ln(1 + x)$ ។ យើងតាងដោយ (C) ក្រាបរបស់វា។

1. រកដែនកំណត់ D នៃអនុគមន៍ f ។ គណនា $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ និង $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ។

2. សិក្សាអថេរភាពរបស់អនុគមន៍ $f(x)$ ដោយភ្ជាប់តារាងអថេរភាពនៅលើ D និង បញ្ជាក់សញ្ញានៃ $f(x)$ លើ D ។

B. គេចង់សិក្សាទីតាំងធៀបរបស់ក្រាប (C) នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ធៀបទៅនឹងក្រាប (P) ដែលមានសមីការ $y = \frac{1}{2}x^2$ ។

1. ក្នុងន័យនេះគេបង្កើតអនុគមន៍ $g(x)$ លើដែនកំណត់ D កំណត់ដោយ $g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$ ។ សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $g(x)$

រួចទាញយកសញ្ញានៃ $g(x)$ កាលណា x រត់នៅលើ D ។ សិក្សាទីនៃក្រាប (C) ធៀបនឹងក្រាប (P) ។

2. សង់ក្រាប (C) និងក្រាប (P) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o, \vec{i}, \vec{j})$ ។

- # សាលាបង្រៀនក្មេងស្រី



សាលាបង្រៀនគូរស្តីម

គ្រឿងប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ (ផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រ)

បង្រៀនដោយ៖ ស្កត ប៊ុនណ្ណង

វិញ្ញាសាទី១១

ប្រធាន

- I. (១៥ពិន្ទុ) ក្នុងចំណោមចំនួនចាស់ 5 ចុះលេខរៀងពី 1 ដល់ 5 និងចាស់ខ្មៅ 7 ចុះលេខរៀងពី 3 ដល់ 9 ។ គេចាប់យកចាស់ 2 ចេញពីចំណោមចំនួនចាស់ គណនាប្រូបាប៖

A : បានផលបូកជាចំនួនគូ B : បានចាស់ជាចំនួនបឋមទាំងពីរ C : បានចាស់លេខ 5 តែមួយគត់។

- II. (១៥ពិន្ទុ) គេមានកុំផ្លិច $z_1 = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ និង $z_2 = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ។

- សរសេរ z_1 និង z_2 ជាអង្គត្រីកោណមាត្រ។ គណនា $z_1^3 + z_2^4$ ។
- សរសេរ $z_1 + z_2$; $z_1 + z_2$; $z_1 \times z_2$ និង $\frac{z_1}{z_2}$ ជាអង្គត្រីកោណមាត្រ។

- III. (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីត៖

$$A : \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x+1)^2 - 7x - 2}{x^2 - 1} \quad B = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x^2 - 4} \quad C = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{1+2x^2} - 3}{x^3 - 8}$$

- IV. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int_1^{-2} (x^2 - 3x - 4) dx$ $J = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x - \cos 2x) dx$ និង $K = \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2(2x-1)} dx$

ដោយត្រូវបង្ហាញថា $\frac{1}{x^2(2x-1)} = -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + \frac{4}{2x-1}$ ។

- V. (១៥ពិន្ទុ)

- ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(y' - y)' + (y' - y) = 2y$ ។
- កំណត់ចម្លើយដោយឡែកមួយបើគេដឹងថា វាមានបន្ទាត់ប៉ះ $d : y = 2x + 1$ ត្រង់ចំណុច $x = 0$ ។

- VI. (២០ពិន្ទុ)

- គេមានប៉ារ៉ាបូល $P : (2x-1)^2 = 4y - 4x + 1$ ។ រកតួអនុគមន៍កំពូល កំណុំ បន្ទាត់ប្រាប់ទិស និងសង់ P ។
- ក្នុងតម្រុយ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេមាន $A(-1, 1, -3)$ និងប្លង់ $Q : 2x + 3y - z - 1 = 0$
 - កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្របន្ទាត់ L កាត់តាម A ហើយអត់កាត់ប្លង់ Q ។
 - គណនាតួអនុគមន៍ចំណុច A' ជាជើងចំណោលនៃ A លើប្លង់ Q ។

- VII. (៣០ពិន្ទុ) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j})$ មានអនុគមន៍ $y = f(x) = (4x^2 + 4x + 1)e^x$ មានក្រាប C ។

- រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f និង គណនា $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ ។ ទាញរកអាស៊ីមតូតនៃ C ។
- គណនា $f'(x)$ និង បង្ហាញថា f មានអតិបរមា និង អប្បបរមា មួយដែលត្រូវកំណត់។ សង់តារាងអថេរភាព f ។
- កំណត់សមីការបន្ទាត់ T ដែលប៉ះនិងក្រាប C ត្រង់ចំណុចដែលមានអ័ក្សអាប់ស៊ីស 0 ។
- គណនា $f(-4)$ និង $f(-1)$ រួចសង់ C & T ។ (យក $e^{-\frac{5}{2}} = 0.082$, $e^{-4} = 0.018$ & $e^{-1} = 0.36$)