



លំហាត់ជ្រើសរើស អំពីគម្រោងមិនកំណត់



លំហាត់ទី១ ៖ គណនាអាំងតេក្រាល៖

(សម្រាប់ថ្នាក់ទី១២)

$$I_1 = \int \frac{3x+4}{x^2+3x+2} dx$$

$$I_2 = \int \frac{4e^{2x}}{e^{2x}-2e^x-8} dx$$

$$I_3 = \int \frac{\sin 2x + \cos x}{2\sin^2 x - 2\sin x + 1} dx$$

ដំណោះស្រាយ

$$\diamond I_1 = \int \frac{3x+4}{x^2+3x+2} dx = \int \frac{3x+4}{(x+1)(x+2)} dx$$

$$\text{ឧបមាថា } \frac{3x+4}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{(A+B)x+(2A+B)}{(x+1)(x+2)}$$

$$\Leftrightarrow 3x+4 = (A+B)x + (2A+B)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=3 & (1) \\ 2A+B=4 & (2) \end{cases}$$

$$\text{យក } (1)-(2): -A=-1 \Rightarrow A=1$$

$$\text{យកតម្លៃ } A=1 \text{ ជំនួសក្នុង } (1) \text{ យើងបាន } 1+B=3 \Rightarrow B=2$$

$$\text{នោះ } \frac{3x+4}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2}$$

$$\text{យើងបាន } I_1 = \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} \right) dx = \ln|x+1| + 2\ln|x+2| + C, (C \in \mathbb{R})$$

$$\text{ដូច្នេះ } \boxed{I_1 = \ln|x+1| + 2\ln|x+2| + C, (C \in \mathbb{R})}$$



$$\diamond I_2 = \int \frac{4e^{2x}}{e^{2x} - 2e^x - 8} dx = \int \frac{4e^x}{e^{2x} - 2e^x - 8} \cdot e^x dx$$

តាង $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$

យើងបាន $I_2 = \int \frac{4t}{t^2 - 2t - 8} dt = \int \frac{4t}{(t-4)(t+2)} dt$

ឧបមាថា $\frac{4t}{(t-4)(t+2)} = \frac{A}{t-4} + \frac{B}{t+2} = \frac{A(t+2) + B(t-4)}{(t-4)(t+2)} = \frac{(A+B)t + (2A-4B)}{(t-4)(t+2)}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=4 & (1) \\ 2A-4B=0 & (2) \end{cases}$$

គុណអង្គទាំងពីរនៃ (1) នឹង 4 រួចយកបូកនឹង (2) យើងបាន $6A=16 \Rightarrow A = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$

យកតម្លៃ B ជំនួសក្នុងសមីការ (1) យើងបាន $\frac{8}{3} + B = 4 \Rightarrow B = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$

នោះ $\frac{4t}{(t-4)(t+2)} = \frac{\frac{8}{3}}{t-4} + \frac{\frac{4}{3}}{t+2} =$

យើងបាន $I_2 = \int \left(\frac{\frac{8}{3}}{t-4} + \frac{\frac{4}{3}}{t+2} \right) dt = \frac{8}{3} \ln|t-4| + \frac{4}{3} \ln|t+2| + C, (C \in \mathbb{R})$

តែ $t = e^x$

ដូច្នេះ $I_2 = \frac{8}{3} \ln|e^x - 4| + \frac{4}{3} \ln|e^x + 2| + C, (C \in \mathbb{R})$



$$\diamondsuit \quad I_3 = \int \frac{\sin 2x + \cos x}{2\sin^2 x - 2\sin x + 1} dx = \int \frac{2\sin x \cos x + \cos x}{2\sin^2 x - 2\sin x + 1} dx = \int \frac{(2\sin x + 1)\cos x}{2\sin^2 x - 2\sin x + 1} dx$$

តាំង $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$

ឃើញបាន ៖

$$\begin{aligned} I_3 &= \int \frac{2t+1}{2t^2-2t+1} dt \\ &= \int \frac{\frac{1}{2}(4t-2)+2}{2t^2-2t+1} dt \\ &= \int \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{4t-2}{2t^2-2t+1} + \frac{2}{2t^2-2t+1} \right] dt \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{4t-2}{2t^2-2t+1} dt + \int \frac{4}{4t^2-4t+2} dt \\ &= \frac{1}{2} \ln|2t^2-2t+1| + \int \frac{4}{(2t-1)^2+1} dt \\ &= \frac{1}{2} \ln|2t^2-2t+1| + 2 \int \frac{(2t-1)'}{(2t-1)^2+1^2} dt \quad , \text{ NOTE: } \int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C, (C \in \mathbb{R}) \\ &= \frac{1}{2} \ln|2t^2-2t+1| + 2 \tan^{-1}(2t-1) + C, C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

តើ $t = \sin x$

🔗

$$I_3 = \frac{1}{2} \ln |2 \sin^2 x - 2 \sin x + 1| + 2 \tan^{-1}(2 \sin x - 1) + C, \quad (C \in \mathbb{R})$$

រៀបចំដោយលោកគ្រូ សុខ ពិសិដ្ឋ (គ្រូបង្រៀនគណិតវិទ្យានៃសាលាបង្រៀនគ្រួសារ)

លំហាត់អនុវត្ត៖

១. យើងមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{5x^2 + 20x + 6}{x^3 + 2x^2 + x}$ ចំពោះ $x \neq 0, x \neq -1$ ។

ក. សរសេរ $f(x)$ ជា រាង $\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$ ដែល A, B និង C ជាចំនួនពិតថេរត្រូវកំណត់។

ខ. គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{5x^2 + 20x + 6}{x^3 + 2x^2 + x} dx$ ។

២. គេឱ្យអនុគមន៍ $g(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 2x - 3}$ ចំពោះ $x \neq -1, x \neq 3$ ។

ក. កំណត់ចំនួនពិត m, n និង p ដើម្បីឱ្យបាន $g(x) = m + \frac{n}{x+1} + \frac{p}{x-3}$ ។

ខ. គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ $I = \int g(x) dx$ ។

៣. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = \frac{3x^2 - 5x - 2}{x(x-1)^2}$ ចំពោះ $x \neq 0, x \neq 1$ ។

ក. កំណត់ចំនួនពិត a, b និង c ដើម្បីឱ្យបាន $f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$ ចំពោះ $x \neq 0$ និង $x \neq 1$ ។

ខ. គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int f(x) dx$ ។

៤. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម ៖

$$I_1 = \int \frac{x^2 + 2x + 6}{(x-1)(x-2)(x-4)} dx$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{x(x^7 + 1)}$$

$$I_3 = \int \frac{x^2}{x^4 - 1} dx$$

$$I_4 = \int \frac{dx}{x(x+1)(x^2 + x + 1)}$$

$$I_5 = \int \frac{dx}{x^4 + 1}$$

$$I_6 = \int \frac{dx}{\sqrt{\tan x}}$$

