កម្រងវិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែ
ថ្នាក់ប្រទេស

ចែករំលែកដោយ

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page
Facebook.com/TeacherSokPiseth
pisethsok.wordpress.com
plus.google.com/+PisethSok_SPS

①

ប្រលងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស
ផ្នែកអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា និងរូបវិទ្យា
ថ្នាក់ទី៩ និងទី១២ ឆ្នាំសិក្សា ២០០១-២០០២

វិញ្ញាសា គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២ ថ្ងៃទី២៣-៤-០២ (រយៈពេល : ៣ម៉ោង ពិន្ទុ : ១០០)

១. (ពិន្ទុ ១០) ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(n)=3^{2n}+7$ ចែកដាច់នឹង 8 ដែល $n\in\mathbb{N}$ ។

២. (ពិន្ទុ ១០) ចំនួនមួយមានលេខប្រាំខ្ទង់ដែលលេខខ្ទង់រៀបតាមលំដាប់ $x; x+1; x+2; 3x; x+3$ ហើយគេដឹងថា ចំនួននោះជាការេប្រាកដ ។ ចូររកចំនួននោះ ។

៣. (ពិន្ទុ ១០) ABC ជាត្រីកោណមួយកែងត្រង់ B ដែលមាន $[CI]$ ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះនៃមុំ C ។ បើ $IB=1\,cm; BC=3\,cm$ ហើយគេតាង $AI=x; AC=y$ ចូរគណនា x និង y ។ $\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

៤. (ពិន្ទុ ១០) $\forall n\in\mathbb{N}^*$ ចូរបញ្ជាក់ថា $E=2903^n-803^n-464^n+261^n$ ជាចំនួនដែលចែកដាច់នឹង 1897 ជានិច្ច ។

៥. (ពិន្ទុ ១០) $a;b;c$ ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\le 3abc$ តាម កូស៊ី: $\frac{x+y}{2}\ge\sqrt{xy}$

៦. (ពិន្ទុ ១០) U ជាស្វ៊ីតមួយកំណត់ដោយ $\forall n\in\mathbb{N}$

$U_{n+2}=5U_{n+1}-6U_n$

ចូរកំណត់តំលៃ x ដែលនាំអោយ $V_n=U_{n+1}-xU_n$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

៧. (ពិន្ទុ ២០) ដោះស្រាយវិសមីការ $1-\frac{x}{2}<\frac{1}{\sqrt{1+x}}$

៨. (ពិន្ទុ ២០) ABC ជាត្រីកោណមួយកែងត្រង់ A ដែលមាន $BC=a$ ហើយមានរង្វង់មួយដែលមានកាំ r ចារឹកក្នុងត្រីកោណនោះ ។ ចូររករង្វាស់ជ្រុងពីរទៀតនៃត្រីកោណ ABC ។

www.pisethsok.wordpress.com
គ្រូបង្រៀនគណិតវិទ្យា
សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស

សម័យប្រឡង 23-5-02

វិញ្ញាសា គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី12

អត្រាកំណែ

1. ស្រាយបញ្ជាក់ $f(n)=3^{2n}+7$ ចែកដាច់នឹង 8 ដែល $n\in\mathbb{N}$ គឺ $f(n)\equiv 0\,[8]$

$f(n)=3^{2n}+7$

ចំពោះ $n=0$ $\quad f(0)=3^0+1=8\equiv 0\,[8]$

$n=1$ $\quad f(1)=3^2+7=16\equiv 0\,[8]$ 3

ឧបមាថាពិតចំពោះ n, $f(n)\equiv 0\,[8]$ គេត្រូវស្រាយបន្តទៀតថា $f(n+1)\equiv 0\,[8]$

$f(n+1)=3^{2(n+1)}+7=9.3^{2n}+7=8.3^{2n}+3^{2n}+7\equiv 0\,[8]$

ព្រោះ: $8.3^{2n}\equiv 0\,[8]$; $3^{2n}+7\equiv 0\,[8]$ 7

ហេតុនេះ $\forall n$, $3^{2n}+7\equiv 0\,[8]$

① អាចធ្វើតាម
$9\equiv 1\,[8]$
$9^n\equiv 1^n\,[8]$
$9^n+7\equiv 1+7$
$\equiv 0\,[8]$

2. រកចំនួនដែលជាការេប្រាកដ $x;\ x+1,\ x+2,\ 3x,\ x+3$

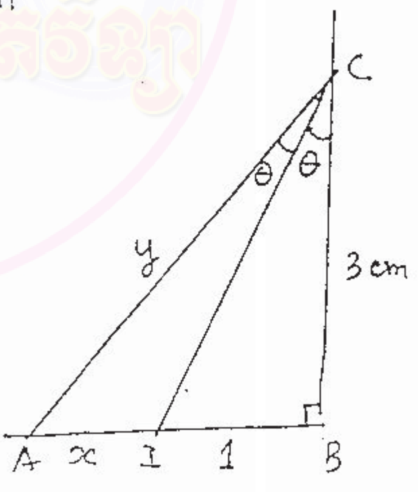
$3x\leq 9$ នោះ $x\leq 3$ ដែល $x\neq 0$ ព្រោះលេខមិនគិតក្បាល ពីកប់ខ្ទង់ៗ

បើ $x=1$ ចំនួននោះ: 12334

បើ $x=2$ ចំនួននោះ: 23465

បើ $x=3$ ចំនួននោះ: 34596

ចំនួនជាការេប្រាកដ គឺ $34596=186^2$



3. គណនារង្វាស់ x និង y

ABC ត្រីកោណកែងត្រង់ B $[CI]$ កន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ C

$IB=1\text{cm}$, $BC=3\text{cm}$; $AI=x$ $AC=y$

$\tan\theta=\frac{1}{3}$ តាមរូបមន្ត $\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{3}{4}$

$\tan 2\theta=\frac{x+1}{3}$

$\frac{x+1}{3}=\frac{3}{4}$;

$x=\frac{5}{4}\text{ cm}$ 5

$y=\frac{15}{4}\text{ cm}$ 5

វិធី 3 គេបង្កើតបាន:

$\begin{cases}(x+1)^2+9=y^2\\ \frac{x}{y}=\frac{1}{3}\end{cases}$ (តាមទ្រឹស្តីបទកន្លះបន្ទាត់ពុះ)

$y=3x$

$(x+1)^2+9=9x^2$

$8x^2-2x-10=0$

$\Delta'=1+80=81$

$x=\frac{1+9}{8}=\frac{5}{4}\text{ cm}$

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

7. ដោះស្រាយវិសមីការ $1-\frac{x}{2} < \frac{1}{\sqrt{1+x}}$

$D =]-1;+\infty[$

a. ករណី $1-\frac{x}{2} \leq 0$ នោះ

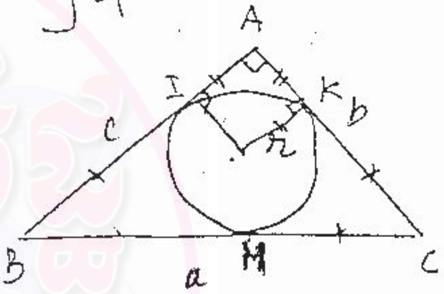
$\begin{cases} 1-\frac{x}{2} \leq 0 \\ x > -1 \end{cases} \Rightarrow E_1 = [2;+\infty[$ 8

b. ករណី $1-\frac{x}{2} > 0$

$1-\frac{x}{2} < \frac{1}{\sqrt{1+x}}$; $\left(1-\frac{x}{2}\right)^2 < \frac{1}{1+x}$; $\begin{cases} x^2(x-3) < 0 \\ 1-\frac{x}{2} > 0 \end{cases}$; $E_2 =]-1;0[\cup]0$

$E = E_1 \cup E_2 =]-1;0[\cup]0;+\infty[$ 4

8. រករង្វាស់ជ្រុង b និង c



p ជាបរិមាត្រ $p = a+b+c$

$p = r + KC + CH + BH + HI + r$

$= 2r + 2CH + 2BH$

$= 2r + 2a$

ក្រលាផ្ទៃត្រីកោណ

$\frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}ra + \frac{1}{2}rb + \frac{1}{2}rc$ 10

$* \; bc = rp = 2r(a+r)$

ចំពោះ $p = a+b+c = 2r+2a$

$* \; b+c = 2r+a$

យើងបាន $\begin{cases} b+c = 2r+a \\ bc = 2r(a+r) \end{cases}$

គេបានសមីការ $x^2 - (a+2r)x + 2r(a+r) = 0$

$\Delta = a^2 - 4ar - 4r^2$

$\Delta \geq 0$ កាលណា $a \geq 2r + 2r\sqrt{2}$ 2

សិក្សាសញ្ញា Δ

$f(a) = a^2 - 4ar - 4r^2$

$\Delta' = 4r^2 + 4r^2$

Δ	0		$2r+2r\sqrt{2}$	
$f(a)$		$-$	0	$+$

$a \geq 2r + 2r\sqrt{2}$

($b = \frac{1}{2}\left(a+2r+\sqrt{a^2-4ar-4r^2}\right)$ 4

និង $c = \frac{1}{2}\left(a+2r-\sqrt{a^2-4ar-4r^2}\right)$) 4

(ឬ $b = \frac{1}{2}\left(a+2r-\sqrt{a^2-4ar-4r^2}\right)$

និង $c = \frac{1}{2}\left(a+2r+\sqrt{a^2-4ar-4r^2}\right)$)

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

① ភាគ ទី៣

ក្រុយ-វិធីសារោ

ប្រលងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស

ផ្នែកអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា និងរូបវិទ្យា

ថ្នាក់ទី៩ និងទី១២ ឆ្នាំសិក្សា ២០០១-២០០២

x ...

វិញ្ញាសា គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២ ថ្ងៃទី២៥-៥-០២ (រយៈពេល : ៣ម៉ោង ពិន្ទុ : ១០០)

១. (ពិន្ទុ ២០) $\forall n \in \mathbb{N}$: f ជាអនុគមន៍មួយកំណត់ដូចខាងក្រោម:

$f(n+2)=2f(n+1)-f(n)+1$ ដែល $f(0)=f(1)=0$ ។ ចូរគណនា $f(2002)$ ។

២. (ពិន្ទុ ២០) ABC ជាត្រីកោណមួយកែងត្រង់ C ដែលមានរង្វាស់ជ្រុង $a;b;c$ ។ P ជាចំនុចក្នុងអង្កត់ $[AC]$ ដែលអាចអោយគេមានរង្វង់ពីរប៉ុនគ្នាចារឹកក្នុងត្រីកោណរៀងគ្នា PBA និងត្រីកោណ PBC ។ បើ $PC=x$ រក x ជាអនុគមន៍នៃ $a;b;c$ ។

៣. (ពិន្ទុ ២០) $abcde$ ជាចំនួនមួយដែលមានប្រាំខ្ទង់ដែល $a;b;c;d;e$ ជាលេខ ។ ជាការគួរអោយ ប្លែកនៅពេលដែលគេគុណចំនួននោះនឹង 4 គេទទួលបានលទ្ធផលជាចំនួនមាន ប្រាំខ្ទង់ គឺ edcba ។

ចូររកចំនួននោះដោយធ្វើការពន្យល់ ។

$$\begin{array}{r} abcde \\ \times \quad 4 \\ \hline edcba \end{array}$$

៤. (ពិន្ទុ ២០) រង្វង់ពីរដែលមានផ្ចិតរៀងគ្នា A និង B ដែល $AB=a$ និងមានរង្វាស់កាំរៀងគ្នា R និង r ដែល $R>r$ ។ AC និង BD ជាកាំនៃរង្វង់ទាំងពីរស្របគ្នាហើយមានទិសដៅដូចគ្នា ហើយ M ជាចំនុចកណ្តាលនៃ $[CD]$ ។ រកសំនុំចំនុចនៃ M កាលណាកាំ AC និង BD ចល័តដោយរក្សាភាពស្រប គ្នានិងទិសដៅ ដូចគ្នាដដែល ។

៥. (ពិន្ទុ ២០) ស្ពានមួយអាចឆ្លងបានត្រឹមមនុស្សពីរនាក់ ។ នៅពេលយប់ងងឹតដែលគ្មានពន្លឺអ្វីសោះនោះ មនុស្សប្រាំនាក់ ត្រូវឆ្លងស្ពាននោះដោយមានចង្កៀងបំភ្លឺផ្លូវតែមួយគត់ ម្យ៉ាងទៀតល្បឿននៃការឆ្លងស្ពានម្នាក់ៗសុទ្ធតែខុសគ្នា គឺអ្នកទី ១ $1\,mn$ អ្នកទី ២ $3\,mn$ អ្នកទី ៣ $6\,mn$ អ្នកទី ៤ $8\,mn$ និងអ្នកទី ៥ $12\,mn$ ។ វិធីដែលឆ្លងស្ពានមានតែឲ្យគត់ពីរនាក់ឆ្លងម្តងពីរនាក់ ដោយអោយអ្នកដែល មានល្បឿន យឺតកាន់ចង្កៀងដើរមុនគេ ធ្វើជាអ្នកបំភ្លឺផ្លូវ ។ នៅពេលអ្នកទាំងពីរឆ្លងដល់ត្រើយម្ខាងហើយ ត្រូវមានម្នាក់ជាអ្នកកាន់ចង្កៀងវិលត្រលប់មកវិញ ដើម្បីនាំមនុស្សដែលនៅសល់ឆ្លងទៀត ។ ចូររករយៈពេលខ្លីបំផុតដើម្បីអោយពួកគេបានឆ្លង ស្ពានផុត ដោយបញ្ជាក់អំពីរបៀបឆ្លងស្ពាន ។

សុខ ពិសិដ្ឋ www.pisethsok.wordpress.com គ្រូបង្រៀនគណិតវិទ្យា

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

គណនា $f(2002)$; $f(n+2) = 2f(n+1) - f(n) + 1$

$$\begin{cases} f(n+2) - 2f(n+1) + f(n) - 1 = 0 \\ f(n+1) - 2f(n) + f(n-1) - 1 = 0 \\ f(n) - 2f(n-1) + f(n-2) - 1 = 0 \\ f(n-1) - 2f(n-2) + f(n-3) - 1 = 0 \\ \vdots \\ f(4) - 2f(3) + f(2) - 1 = 0 \\ f(3) - 2f(2) + f(1) - 1 = 0 \\ f(2) - 2f(1) + f(0) - 1 = 0 \end{cases}$$

មាន 2 ជួរ (first two lines); មាន n−1 ជួរ (remaining lines)

$f(n+2) - f(n+1) - f(1) + f(0) - (n+1) = 0$ ដោយ $f(1) = f(0) = 0$

យើងបាន $f(n+2) - f(n+1) = n+1 \longrightarrow$ ([illegible])

$$\begin{cases} f(n+2) - f(n+1) = n+1 \\ f(n+1) - f(n) = n \\ f(n) - f(n-1) = n-1 \\ f(n-1) - f(n-2) = n-2 \\ \vdots \\ f(3) - f(2) = 2 \\ f(2) - f(1) = 1 \end{cases}$$

$f(n+2) - f(1) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n + n+1$

$f(n+2) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ ហើយ $f(n) = \frac{n}{2}(n-1)(n) \longrightarrow (8)$

$n = 2002$: $f(2002) = \frac{1}{2}(2001)\cdot 2002 = 1001 \cdot 2001 = (1000+1)2001$

$= 2001000 + 2001 = 2003001 \longrightarrow (5)$

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

គណនា $f(2002)$

$f(n+2) = 2f(n+1) - f(n) + 1$; $f(0) = f(1) = 0$

$f(n+2) - f(n+1) = f(n+1) - f(n) + 1$.   (1)

តាង $g(n) = f(n+1) - f(n)$ នាំអោយ $g(n+1) = f(n+2) - f(n+1)$

(1) $g(n+1) = g(n) + 1$

$g(n+1) - g(n) = 1$ ពិត.

នាំអោយ $g(n)$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមានផលសងរួម $d = 1$

យើងបាន $g(n) = g(0) + nd = 0 + n = n$

$g(n+1) = n + 1$

ម្យ៉ាងទៀត: $g(n+1) - g(n) = n$

ចំពោះ $n = 0$ $g(1) - g(0) = 0$

$n = 1$ $g(2) - g(1) = 1$

$n = 2$ $g(3) - g(2) = 2$

⋮

$n = k$ $g(k+1) - g(k) = k$

បូកអង្គនិងអង្គ: $g(k+1) - g(0) = 0 + 1 + 2 + \dots + k = \frac{k}{2}(k+1)$

$g(k+1) = \frac{k}{2}(k+1)$

ចំពោះ $k = 2001$: $g(2002) = \frac{2001}{2}(2002) = 2003001$

ម្យ៉ាងទៀត : $f(n+2) - f(n+1) = f(n+1) - f(n) + 1$

ជំនួស $n+1 = k$: $f(k+1) - f(k) = f(k) - f(k-1) + 1$

ចំពោះ $k = 1$ $f(2) - f(1) = f(1) - f(0) + 1$

$k = 2$ $f(3) - f(2) = f(2) - f(1) + 1$

⋮

$k = n-1$ $f(n) - f(n-1) = f(n-1) - f(n-2) + 1$

$f(n) - f(1) = f(n-1) - f(0) + (n-1)$ ($f(1) = f(0) = 0$)

$f(n) - f(n-1) = (n-1)$

ពេលនេះ $n = 1$ $f(1) - f(0) = 0$

$n = 2$ $f(2) - f(1) = 1$

⋮

$n = n$ $f(n) - f(n-1) = (n-1)$

$f(n) - f(0) = 1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{(n-1)}{2}(n-1+1)$

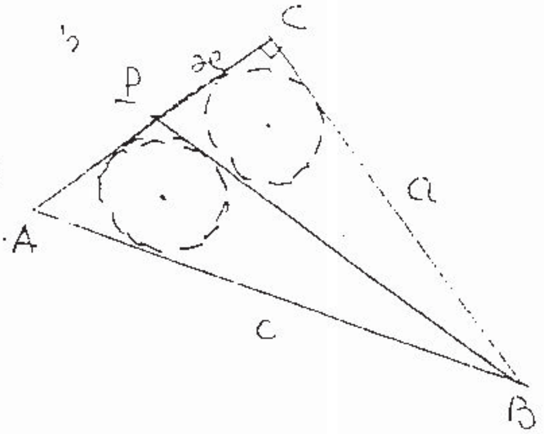
2003001

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

(2) តាងរយៈប្រវែង $x > 0$

តាមរូបមន្ត $r = \dfrac{S}{P/2}$

$$\frac{\frac{1}{2}xa}{\frac{1}{2}(a+\sqrt{x^2+a^2}+x)} = \frac{\frac{1}{2}(b-x)a}{\frac{1}{2}(c+\sqrt{x^2+a^2}+b-x)} \quad (5)$$



$$xc + xa - ab = (b-2x)\sqrt{x^2+a^2}$$

$$(b-2x)^2(x^2+a^2) - (xc+xa-ab)^2 = 0$$

$$2x^4 - 4bx^3 + (3a^2+b^2-c^2-2ac)x^2 + (2abc-2a^2b)x = 0$$

$$\boxed{2x(x-b)\left[2x^2+(a^2-ac)\right]=0} \quad (10)$$

→ (5)

ដោយលក្ខខណ្ឌ $0 < x < b$ យើងបាន $x = \sqrt{\dfrac{ac-a^2}{2}}$ ព្រោះ $ac-a^2 = a(c-a) > 0$ ពីព្រោះ $c > a$

(3) រក A, B, C, D, E

* A មិនអាចធំជាង 2 $A \leq 2$

បើ $A=1$ នោះ $A\times4 = E = 4$

បើ $E=4$ នោះ $4\times E = 16$ មានន័យថា $A=6$ ពិតការពិតមិនអាច

ហេតុនេះ $A = 2$ តាមរយៈ $E = 8$ ព្រោះ $4\times A = E$

យើងបាន

$$\begin{array}{r} ABCDE \\ \times\quad 4 \\ \hline EDCBA \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 2BCD8 \\ \times\quad 4 \\ \hline 8DCB2 \end{array}$$

* ចំពោះលេខខ្ទង់នៃ B B មិនអាចធំជាង 2 : $B \leq 2$

បើ $B=1$ ការវិធីគុណខាងលើ

$$\begin{array}{r} 21CD8 \\ \times\quad 4 \\ \hline 8DC12 \end{array}$$

ចំពោះនេះ យើងត្រូវស្វែងរកលេខ D ដែល D ត្រូវយកលេខប៉ុន្មានដើម្បី តាមរយៈ 4×D ចេញលេខខ្ទង់ 1

ហេតុនេះ $D = 7$ $D\times4 = 28$ បូកត្រាទុក 3 ទៅ 31

ការគុណខាងលើ

$$\begin{array}{r} 21C78 \\ \times\quad 4 \\ \hline 87C12 \end{array}$$

ការគុណនេះ បូកត្រាទុក 3

$C = 9$

ហេតុនេះ ចំនួនត្រូវរកគឺ

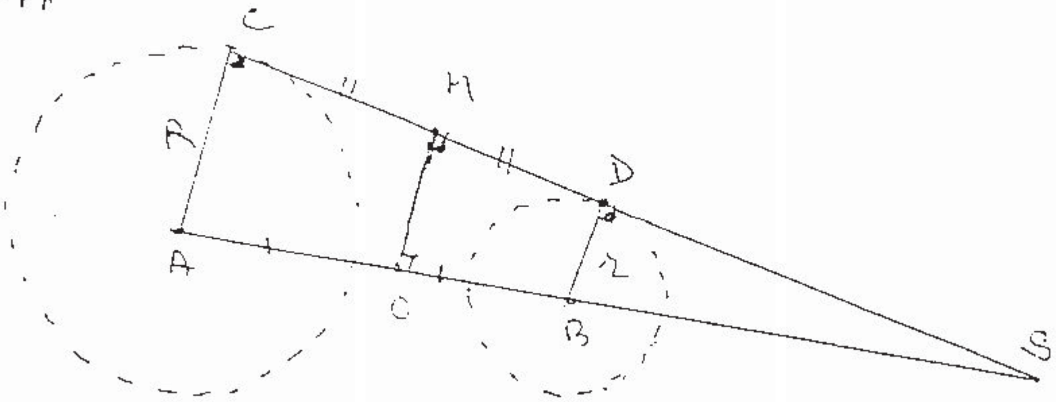
21978

ករណី
ហេតុ
→ A = 2
E =
B =
D =
C =
ពីរ 4
បើនេះ
ការ

www.pisethsok.wordpress.com

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

④ រកសំណុំចំណុច M



គេ (MO)//(AC)//(DB)

O ជាចំណុចកណ្ដាលនៃ AB ⟹ O ជាចំណុចនឹង

$S=(CD)\cap(AB)$

សិស្សកាលណោះ: ពេលប្រឡង: ត្រូវ 20 ពិន្ទុ 0

$\Delta SOM \sim \Delta SAC \sim \Delta SBD$

$\left.\begin{matrix} SOM \\ SBD \end{matrix}\right| \Rightarrow \dfrac{BD}{SB}=\dfrac{OM}{SO}$

$\Rightarrow \dfrac{BD}{SB}=\dfrac{AC}{SA}=\dfrac{AC+BD}{SB+SA}$ (1)

$\left.\begin{matrix} SOM \\ SAC \end{matrix}\right| \Rightarrow \dfrac{OM}{SO}=\dfrac{AC}{SA}$

បូកអង្គនឹងអង្គ: $SO=SB+OB$

$SO=SA-AO$

$SO=\dfrac{SA+SB}{2}$

(1) គេបាន $\dfrac{BD}{SB}=\dfrac{AC}{SA}=\dfrac{R+r}{2SO}=\dfrac{R+r}{2SO}$

ដូច្នេះ $\dfrac{R+r}{2SO}=\dfrac{OM}{SO} \Rightarrow OM=\dfrac{R+r}{2} \Rightarrow M\in C\left(O,\dfrac{R+r}{2}\right)$

⑤ វិធីឆ្លងស្ពាន

← 3/1 ; → 1	ប្រើពេល 3+1=4	
	3	1 6 8 12
← 12/8 ; → 3	ប្រើពេល 12+3=15	
	12, 8	1 3 6
← 6/1 ; → 1	ប្រើពេល 6+1=7	
	12 8 6	1 3
← 3/1	ប្រើពេល 3	
	1 3 6 8 12	មនុស្សទាំងអស់ឆ្លងផុត

www.pisethsok.wordpress.com

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

ស៊ីមទី១ 1/3 ← 1 →

2 6/12 ← 3 →

3 1/8 ← 1 →

4 3/1 ←

3+1 = 4

12 + 3 = 15

8 + 1 = 9

3

31 mn. (16p)

1 3 6 8 12

1 6 8 12

1 3 8

1 3.

32 mn. (12p)

34 mm ↗ (5p)

29 mm (20p)

www.pisethsok.wordpress.com
សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

②

ប្រឡងសិស្សពូកែរាជធានីភ្នំពេញ

ថ្ងៃទី ១៤ ធ្នូ ២០០២ (រយៈពេល ៣ម៉ោង)

វិញ្ញាសាទី១

ហ៊ិត_ស៊ីអាត
អធិការ គណិតវិទ្យា
TEL: 011 953 029

១- ដោះស្រាយក្នុងសំណុំកុំផ្លិចសមីការ

ក- $z^5-(1-i)z^3-i=0$

ខ- $2z^3-(5+6i)z^2+9iz+1-3i=0$ ដោយដឹងថាសមីការមានឫសមួយ ជាចំនួនពិត ។

២- ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច ចូររកសំណុំចំនុចនៃ M(z) ដែលរូបភាពនៃចំនុច i , z , iz រត់ត្រង់ជួរគ្នា ។

៣- ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{2\sin 2^\circ+4\sin 4^\circ+6\sin 6^\circ+\ldots+178\sin 178^\circ+180\sin 180^\circ}{90}=\cot 1^\circ$

៤- គណនាផលបូកស៊េរីខាងក្រោម .

a) $S_1 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$

b) $S_2 = 1.2 + 2.5 + 3.8 + \ldots + 668.2003$

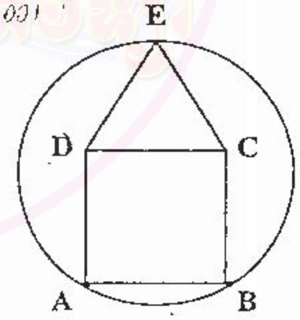
៥- គណនា $\frac{\sqrt[3]{8-3\sqrt5}+\sqrt[3]{64-12\sqrt{20}}}{\sqrt[3]{57}}\cdot\sqrt[3]{8+3\sqrt5}\left(\frac{\sqrt[3]{9}-\sqrt2}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[4]{2}}+\frac{\sqrt2-9\sqrt[3]{9}}{\sqrt[4]{2}-\sqrt[3]{81}}\right)$

៦- ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើ n សេសនោះ $46^n + 296.13^n$ ចែកដាច់នឹង 1947 ។

៧- គេអោយ $t>1$ តាង $f(x)=\frac{t^x}{t^x+\sqrt t}$ ។ ចូរគណនាតំលៃនៃ

$f\left(\frac{1}{2003}\right)+f\left(\frac{2}{2003}\right)+f\left(\frac{3}{2003}\right)+\ldots+f\left(\frac{2002}{2003}\right)$

៨- ក្នុងរូបខាងស្តាំនេះ ABCD ជាការេជ្រុង 10cm និង CDE ជាត្រីកោណសម័ង្ស ។ រករង្វាស់កាំរង្វង់ ។



៩- កំនត់តំលៃ m ដើម្បីអោយសមីការដឺក្រេទីពីរ $x^2 - mx + m^2 - m - 3 = 0$ ($m \neq 0$) មានឫសពីរ x_1 , x_2 ជាប្រវែងជ្រុង AB , AC នៃត្រីកោណ ABC មាន $\hat{A} = 90^\circ$ និង BC = 2 ។

អត្រាពិន្ទុ ១- ១០ពិន្ទុ ២- ១០ពិន្ទុ ៣- ១៥ពិន្ទុ ៤- ៨ពិន្ទុ ៥- ១២ពិន្ទុ

៦- ១០ពិន្ទុ ៧- ១០ពិន្ទុ ៨- ១៥ពិន្ទុ ៩- ១០ពិន្ទុ

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

កំណែវិញ្ញាសាទី 1

① ដោះស្រាយក្នុងកុំផ្លិចសមីការ:

ក) $z^6-(1-i)z^3-i=0$

តាង $t=z^3$ នោះ: $t^2-(1-i)t-i=0$

គេបាន $t_1=1$; $t_2=-i$

, $z^3=1$ នោះ: $1=\cos 0+i\sin 0$

$$z_1=1$$

$$z_2=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$$

$$z_3=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$$

+ $z^3=-i$ នោះ: $-i=\cos(-\frac{\pi}{2})+i\sin(-\frac{\pi}{2})$

$$z_4=\cos(-\frac{\pi}{6})+i\sin(-\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$$

$$z_5=\cos(\frac{3\pi}{2})+i\sin\frac{\pi}{2}=i$$

$$z_6=\cos(\frac{7\pi}{6})+i\sin(\frac{7\pi}{6})=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$$

ខ) $2z^3-(5+6i)z^2+9iz+1-3i=0$

បើ $a\in\mathbb{R}$ ជាឫសមួយរបស់សមីការ: គេបាន

$$2a^3-(5+6i)a^2+9ia+1-3i=0$$

$$(2a^3-5a^2+1)-(6a^2-9a+3)i=0$$

គេបាន: $\begin{cases}2a^3-5a^2+1=0 & (1)\\ 6a^2-9a+3=0 & (2)\end{cases}$

(2): មានឫស $a=1$; $a=\frac{1}{2}$

$a=1$ នោះ: (1) $2-5+1=0$ មិនពិត

$a=\frac{1}{2}$ នោះ: (1) $2\cdot\frac{1}{8}-5\cdot\frac{1}{4}+1=0$ ពិត

គេបាន $a=\frac{1}{2}$ ជាឫស:

យក $2z^3-(5+6i)z^2+9iz+1-3i=0$

$$2\cdot\frac{1}{8}-(5+6i)\frac{1}{4}+9i\cdot\frac{1}{2}+1-3i=0$$

ដូចនេះ $2(z^3-\frac{1}{8})-(5+6i)(z^2-\frac{1}{4})+9i(z-\frac{1}{2})=0$

រឺ $(z-\frac{1}{2})[z^2-(2+3i)z-1+3i]=0$

$$\boxed{z_1=\frac{1}{2}\ ;\ z_2=1+2i\ ;\ z_3=1+i}$$

② ការសិក្សាចំនុច $M(z)$

តាង $A(i)$; $M(z)$; $N(iz)$ រត់ត្រង់ជួរ

គេបាន $\overrightarrow{MN}=k\overrightarrow{MA}$; $k\in\mathbb{R}$

$$(iz-z)=k(i-z)$$

$$k=\frac{iz-z}{i-z}\quad z\neq i$$

យក $z=a+ib$; $a,b\in\mathbb{R}$

នោះ: $k=\dfrac{i(a+ib)-(a+ib)}{i-(a+ib)}$

$$=\frac{(i-1)(a+ib)[-a-i(1-b)]}{a^2+(1-b)^2}$$

$$=\frac{[(a-b)i-(a+b)][-a-i(1-b)]}{a^2+(1-b)^2}$$

$$=\frac{(a^2+b^2+a-b)+[(a+b)(1-b)-a(a-b)]}{a^2+(1-b)^2}$$

$k\in\mathbb{R}$ នោះ: $\begin{cases}(a+b)(1-b)-a(a-b)=0\\ a^2+(1-b)^2\neq 0\end{cases}$

$$\begin{cases}a^2+b^2-a-b=0\\ a^2+(b-1)^2\neq 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}(a-\frac{1}{2})^2+(b-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2}\\ (a-0)^2+(b-1)^2\neq 0\end{cases}$$

ដូចនេះ: សំណុំចំនុច M ជារង្វង់ផ្ចិត $(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ កាំ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ដកចេញចំនុច $(0;1)$ ។

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

(?) ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{2\sin2° + 4\sin4° + \dots + 178\sin178° + 180\sin180°}{90} = \cot1°$$

រូបមន្ត ១: $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$

$\sin178° = \sin2°$

$\sin176° = \sin4°$

$\dots \qquad \dots$

គេបាន:

$$\frac{2\sin2° + 4\sin4° + \dots + 88\sin88° + 90 + \dots + 178\sin178°}{90}$$

$$= \frac{180\sin2° + 180\sin4° + \dots + 180\sin88° + 90}{90}$$

$$= 2\sin2° + 2\sin4° + \dots + 2\sin88° + 1$$

$$= \frac{1}{\sin1°}(2\sin1°\sin2° + 2\sin1°\sin4° + \dots + 2\sin1°\sin88°) + 1$$

រូបមន្ត ១ $\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

$$= \frac{1}{\sin1°}(\cos1° - \cos3° + \cos3° - \cos5° + \dots + \cos87° - \cos89°) + 1$$

$$= \frac{1}{\sin1°}(\cos1° - \cos89°) + 1, \quad (\sin1° = \cos89°)$$

$$= \frac{1}{\sin1°}(\cos1° - \sin1°) + 1 = \cot1° \text{ ពិត}$$

គណនាផលបូកស៊ីគាខាងក្រោម:

1) $S_1 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$

ពិនិត្យ $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

កាលយកតម្លៃ $x = 1; 2, \dots, n$ គេបាន:

$x=1$: $2^3 = 1 + 3.1^2 + 3.1 + 1$

$x=2$: $3^3 = 2^3 + 3.2^2 + 3.2 + 1$

$x=3$: $4^3 = 3^3 + 3.3^2 + 3.3 + 1$

$\dots$

$x=n$: $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$

បូក: $(n+1)^3 = 1 + 3(1^2+2^2+\dots+n^2) + 3(1+2+\dots+n) + n$

$(n+1)^3 = (n+1) + 3S + \frac{3}{2}n(n+1)$

$3S = (n+1)(n^2 + 2n + 1 - 1 - \frac{3n}{2})$

$S_1 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

2) $S_2 = 1.2 + 2.5 + 3.8 + \dots + 668.2003$

ពិនិត្យតួទូទៅ: $k(3k-1) = 3k^2 - k$

កាលយកតម្លៃ $k = 1; 2, \dots, 668$ យើងបាន

$k=1 \quad 1.2 = 3.1^2 - 1$

$k=2 \quad 2.5 = 3.2^2 - 2$

$k=3 \quad 3.8 = 3.3^2 - 3$

$\vdots$

$k=668 : 668.2003 = 3.668^2 - 668$

បូកអង្គ: $S_2 = 3(1^2 + 2^2 + \dots + 668^2) - (1+2+\dots+668)$

$S_2 = 3.\frac{1}{6}.668.669.1377 - \frac{668}{2}.669$

$S_2 = 298523856$.

⑤ គណនា:

$$\frac{(\sqrt[3]{8-3\sqrt5} + \sqrt[3]{8^2-24\sqrt5})(\sqrt[3]{8+3\sqrt5})}{\sqrt[3]{57}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{64-45} + 2\sqrt[3]{64-45}}{\sqrt[3]{3}.\sqrt[3]{19}} = \sqrt[3]{9} \quad (1)$$

$$\frac{\sqrt[3]{9} - \sqrt{2}}{\sqrt[3]{3} + \sqrt[4]{2}} + \frac{\sqrt{2} - 9\sqrt[3]{9}}{\sqrt[4]{2} - \sqrt[3]{81}}$$

$$= \frac{(\sqrt[3]{3})^2 - (\sqrt[4]{2})^2}{(\sqrt[3]{3} + \sqrt[4]{2})} + \frac{(\sqrt[4]{2})^2 - (3\sqrt[3]{3})^2}{(\sqrt[4]{2} - 3\sqrt[3]{3})}$$

$$= \sqrt[3]{3} - \sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{2} + 3\sqrt[3]{3} = 4\sqrt[3]{3} \quad (2)$$

ដូចនេះ: (1) និង (2) $\sqrt[3]{9} \times 4\sqrt[3]{3} = 12$

www.pisethsok.wordpress.com
សុខ ពិសិដ្ឋ | Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

(6) ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំពោះ n សេស

$46^n + 296.13^n$ ចែកដាច់ 1947

គិតថា: $1947 = 33 \times 59$; $(33,59)=1$

នាំឱ្យ $A = 46^n + 296.13^n$ ចែកដាច់ 33 និង 59

$A = 46^n - 13^n + 297.13^n$

$= (46-13)[S(n)] + (33\times 9).13^n$

$= 33\,[S(n) + 9.13^n]$ ចែកដាច់ 33 (1)

ម្យ៉ាង $A = 46^n + 13^n + 295.13^n$; n សេស

$= 59\,[Q(n)] + (59\times 5).13^n$

$= 59\,[Q(n) + 5.13^n]$ ចែកដាច់ 59 (2)

(1) និង (2) A ចែកដាច់ 1947 , n សេស

(7) គណនា $f\left(\frac{1}{2003}\right) + f\left(\frac{2}{2003}\right) + \dots + f\left(\frac{2002}{2003}\right)$

$t > 1 \quad f(x) = \dfrac{t^x}{t^x + \sqrt{t}}$

ដឹងថា $x + y = 1$ គណនា $f(x) + f(y)$

$$f(x) + f(y) = \frac{t^x}{t^x+\sqrt{t}} + \frac{t^y}{t^y+\sqrt{t}}$$

$$= \frac{t^x(t^y+\sqrt{t}) + t^y(t^x+\sqrt{t})}{(t^x+\sqrt{t})(t^y+\sqrt{t})}$$

$x+y=1$ នោះ: $$= \frac{2t + \sqrt{t}\,(t^x+t^y)}{2t + \sqrt{t}\,(t^x+t^y)} = 1$$

គេបាន:

$\frac{1}{2003} + \frac{2002}{2003} = 1$ នោះ: $f\left(\frac{1}{2003}\right) + f\left(\frac{2002}{2003}\right) = 1$

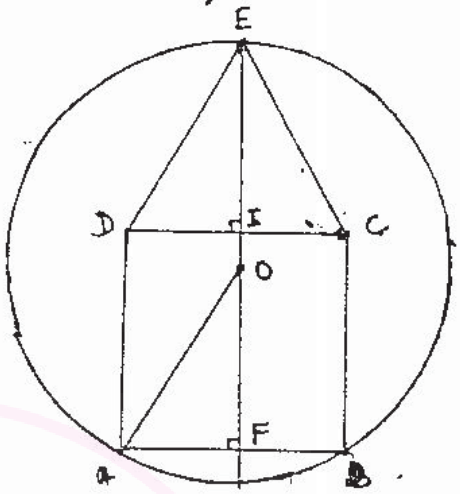
$\frac{2}{2003} + \frac{2001}{2003} = 1$ នោះ: $f\left(\frac{2}{2003}\right) + f\left(\frac{2001}{2003}\right) = 1$

$\vdots$

$\frac{1001}{2003} + \frac{1002}{2003} = 1$ នោះ: $f\left(\frac{1001}{2003}\right) + f\left(\frac{1002}{2003}\right) = 1$

ដូចនេះ: $f\left(\frac{1}{2003}\right) + f\left(\frac{2}{2003}\right) + \dots + f\left(\frac{2002}{2003}\right) = 1001$

(8) គណនា កាំរង្វង់ .



តាង O ជាផ្ចិតរង្វង់ នោះ O ស្ថិតលើមេដ្យាទ័រ នៃ [AB] និង [DC] ដែលគូសចេញពីកំពូល E កាត់ [DC] ត្រង់ I និង [AB] ត្រង់ F

គេបាន $EF = EI + IF = \frac{10\sqrt{3}}{2} + 10$

$EF = 5\sqrt{3} + 10$

តាងកាំ $OA = OE = x$, ពីតាករ AOF

$x^2 = AF^2 + OF^2$

$= 5^2 + (EF - x)^2$

$x^2 = 25 + EF^2 - 2xEF + x^2$

$2xEF = 25 + (5\sqrt{3}+10)^2$

$2xEF = 25 + 75 + 100\sqrt{3} + 100$

$2xEF = 20(5\sqrt{3}+10)$

$2xEF = 20EF$

$\boxed{x = 10\text{cm}}$

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

ប្រឡងសិស្សពូកែរាជធានីភ្នំពេញ

ថ្ងៃទី ១៤ ខែធ្នូ ឆ្នាំ ២០០២ (រយៈពេល៣ម៉ោង)

វិញ្ញាសា ទី២

១-ប្រៀបធៀបចំនួន $\sqrt{2001}+\sqrt{2003}$ និង $2\sqrt{2002}$ តាម $2002^2-1<2002^2$ (គុណលេខ...)

២-គណនាផលបូក $S=\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dots+\dfrac{1}{\sqrt{2002}+\sqrt{2003}}$ តាម $(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})=-1$ $-(1-\sqrt{2})=\frac{1}{1+\sqrt{2}}$

៣-គេអោយអនុគមន៍ $f_1(x)$; $f_2(x)$; $f_3(x)$; ..... ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខ័ណ្ឌ

$f_1(x)=x$ និង $f_{n+1}(x)=\dfrac{1}{1-f_n(x)}$ ។ គណនា $f_{2002}(2002)$

៤- រកគ្រប់គូនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន (x,y) ដែល $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{1980}$

៥- ចំពោះចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ដែល $A(n)=2903^n-803^n-464^n+261^n$ ។

បង្ហាញថា $A(n)$ ចែកដាច់នឹង 1897

៦-គេអោយត្រីកោណ ABC មាន $\hat{A}=45°$ ។ បន្លាយជ្រុង [BC] ទៅខាង B បាន $BB'=BC$

បន្លាយជ្រុង [BC] ទៅខាង C បាន $CC'=BC$ ។ តាង $B'\hat{A}B=\alpha$, $C'\hat{A}C=\beta$

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $(1+\cot\alpha)(1+\cot\beta)=8$

៧- រកអនុគមន៍ f ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខ័ណ្ឌ

$f(x+y)\ge f(x).f(y)\ge 2003^{x+y}$ គ្រប់ $x,y\in R$ ។

៨- គេអោយ $0<x_1<x_2<\dots<x_{12}$

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\dfrac{x_1+x_2+\dots+x_9}{x_3+x_6+x_9}+\dfrac{x_1+x_2+\dots+x_{12}}{x_4+x_8+x_{12}}<7$

៩- យក k ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន និង M_k សំនុំនៃចំនួនគត់ទាំងអស់ដែល នៅចន្លោះ $2k^2+k$ និង $2k^2+3k$

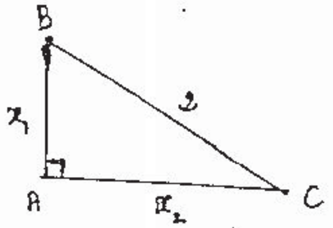
រួមទាំងចំនួនទាំងពីរ ។ តើគេអាចញែក M_k ជាពីរសំនុំរង A និង B ដែល

$\sum_{x\in A}x^2=\sum_{x\in B}x^2$?

អត្រាពិន្ទុ ១- ៧ពិន្ទុ ២- ៨ពិន្ទុ ៣-១០ពិន្ទុ ៤- ១៥ពិន្ទុ ៥-១០ពិន្ទុ ៦-២០ពិន្ទុ

៧- ៧ពិន្ទុ ៨-៨ពិន្ទុ ៩- ១៥ពិន្ទុ

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS



⑨ កំណត់តម្លៃ m ; $m \neq 0$

ដើម្បី $x_1 ; x_2$ ជាប្រវែងជ្រុង AB និង AC

នៃត្រីកោណ ABC លុះត្រាតែ :

x_1, x_2 វិជ្ជមាន, សមីការមានឫស 2

ដូច្នេះត្រូវផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ :

(1) $P > 0$

(2) $\Delta \geq 0$

(3) $x_1^2 + x_2^2 = BC^2$ ឬ $(S^2 - 2P) = 4$

ឬ
$$\begin{cases} m^2 - m - 3 > 0 & (1) \\ m^2 - 4(m^2 - m - 3) \geq 0 & (2) \\ m^2 - 2(m^2 - m - 3) = 4 & (3) \end{cases}$$

(3) : $m^2 - 2m - 2 = 0$ មានឫស

$m_1 = 1 - \sqrt{3}$; $m_2 = 1 + \sqrt{3}$

(2) $-3m^2 + 4m + 12 \geq 0$ មានឫស :

$m = \dfrac{2 - 2\sqrt{10}}{3}$; $m = \dfrac{2 + 2\sqrt{10}}{3}$

(1) $m^2 - m - 3 > 0$ មានឫស :

$\dfrac{1 - \sqrt{13}}{2}$, $\dfrac{1 + \sqrt{13}}{2}$

$1-\sqrt{3}$ 0 $1+\sqrt{3}$

$\dfrac{2-2\sqrt{10}}{3}$ $\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$ $\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$ $\dfrac{2+2\sqrt{10}}{3}$

ដូចនេះ : $\boxed{m = 1 + \sqrt{3}}$

ដំណោះស្រាយវិញ្ញាសាទី២

① ប្រៀបធៀប : $\sqrt{2001} + \sqrt{2003}$ និង $2\sqrt{2002}$

គេមាន : $2002^2 - 1 < 2002^2$

$\sqrt{2001 \times 2003} < 2002$

$2\sqrt{2001 \times 2003} < 2 \times 2002$

$2 \times 2002 + 2\sqrt{2001} . \sqrt{2003} < 4 . 2002$

$\sqrt{2001}^2 + 2\sqrt{2001} . \sqrt{2003} + \sqrt{2003}^2 < 4 . 2002$

$(\sqrt{2001} + \sqrt{2003})^2 < 4 . 2002$

$\sqrt{2001} + \sqrt{2003} < 2\sqrt{2002}$

② គណនាផលបូក :

$S = \dfrac{1}{1+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \dfrac{1}{\sqrt{2002} . \sqrt{2003}}$

មាន $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = (\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2}) = \dots$

$= (\sqrt{2003} - \sqrt{2002})(\sqrt{2003} + \sqrt{2002}) = 1$

គេបាន : $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1$

$\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

⋮

$\dfrac{1}{\sqrt{2003}+\sqrt{2002}} = \sqrt{2003} - \sqrt{2002}$

បូកអង្គ : $S = \sqrt{2003} - 1$

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

3) គណនា $f_{2002}(2002)$

តាមសម្មតិកម្ម $f_1(x)=x$

គេបាន: $f_1(2002)=2002$

$$f_2(2002)=\frac{1}{1-f_1(2002)}=-\frac{1}{2001}$$

$$f_3(2002)=\frac{1}{1-f_2(2002)}=\frac{2001}{2002}$$

$$f_4(2002)=\frac{1}{1-f_3(2002)}=2002$$

នាំឲ្យ $f_4(2002)=f_1(2002)=2002$

$f(5)(2002)=f_2(2002)=-\frac{1}{2001}$

$f(6)(2002)=f_3(2002)=\frac{2001}{2002}$

⋮

$f_{3n}(2002)=\frac{2001}{2002}$

$f_{3n+1}(2002)=2002$

$f_{3n+2}(2002)=-\frac{1}{2001}$

ដោយ 2002 មានរាង $3n+1$

ដូចនេះ: $f_{2002}(2002)=2002$

4) រកគូនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន (x,y) ដែល

ផ្ទៀងផ្ទាត់: $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{1980}$ $(1<x,y<1980)$

លើកការេ: $x+y+2\sqrt{xy}=1980$

$2\sqrt{xy}=1980-(x+y)$

គេឃើញថា: $\sqrt{xy}\in Z_+$ ដែល x,y ជា

លក្ខខណ្ឌៈ ឬ ... ហេតុនេះ;

xy ត្រូវតែជាការេប្រាកដ

តាង $xy=k^2$; $(k\in Z_+)$ (1)

នោះ: $2k=1980-(x+y)$

ឬ $(x+y)=1980-2k=2(990-k)$

(1),(2) $x;y$ ជាឫសសមីការ:

$t^2-2(990-k)t+k^2=0$ (*)

$\Delta'=(990-k)^2-k^2=990(990-2k)$

$=1980(495-k)$

ល.ខ. $\Delta'\geq 0$ លុះត្រាតែ $k\leq 495$

Δ' ត្រូវតែជាការេប្រាកដ.

តាង $1980(495-k)=X^2$, $X\in N$

ឬ $6^2\times 55(495-k)=X^2$

ហេតុនេះ: $495-k=55$ ឬ $k=440$

$495-k=220$ ឬ $k=275$

$495-k=0$ ឬ $k=495$

បើ $k=440$ នោះសមីការ (*) មានឫស: 880; 220

$k=275$ នោះសមីការ (*) មានឫស 1375; 55

$k=495$ នោះសមីការ (*) មានឫសឌុប 495

ដូចនេះ: គូ (x,y) គឺ:

(220, 880); (880, 220)

(1375 ; 55); (55, 1375)

(495; 495)

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

របៀបទី២ : ឧបមាថា $x \geq y$

យក $1980 = 4\times 495 = 9\times 220$
$= 36\times 55$

នាំឲ្យ : $\sqrt{1980} = 2\sqrt{495} = 3\sqrt{220} = 6\sqrt{55}$

a) $\sqrt{1980} = 2\sqrt{495} = \sqrt{495}+\sqrt{495}$

នោះ: $x = y = 495$

b) $\sqrt{1980} = 3\sqrt{220} = \sqrt{4\times 220}+\sqrt{220}$

នោះ: $x = 880\ ;\ y = 220$

c) $\sqrt{1980} = 6\sqrt{55} = \sqrt{25\times 55}+\sqrt{55}$

នោះ: $x = 1375\ ;\ y = 55$.

ចំណាំ: $6\sqrt{55} = \sqrt{16\times 55}+\sqrt{4\times 55}$ (ដូច b)
$6\sqrt{55} = \sqrt{9\times 55}+\sqrt{9\times 55}$ (ដូច a)

ដូចនេះ: $(x = y = 495)$ ពេល $x<y$
$(x = 880; y = 220)$ $(220; 880)$
$(x = 1375; y = 55)$ $(55, 1375)$

(5) បង្ហាញថា $A(n)$ ចែកដាច់នឹង 1897

$A(n) = 2903^n - 803^n - 464^n + 261^n$

សម្គាល់ $1897 = 7\times 271$

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\dots+b^{n-1})$

ចំពោះ $n \geq 1$:

$A(n) = (2903^n - 803^n) - (464^n - 261^n)$

$= 2100\,P(n) - 203\,Q(n)$

$= 7\,[30P(n) - 29Q(n)]$

នោះ: $A(n)$ ចែកដាច់នឹង 7 (1)

$A(n) = (2903^n - 464^n) - (803^n - 261^n)$

$= 2439\,S(n) - 542\,T(n)$

$= 271\,[9S(n) - 2T(n)]$

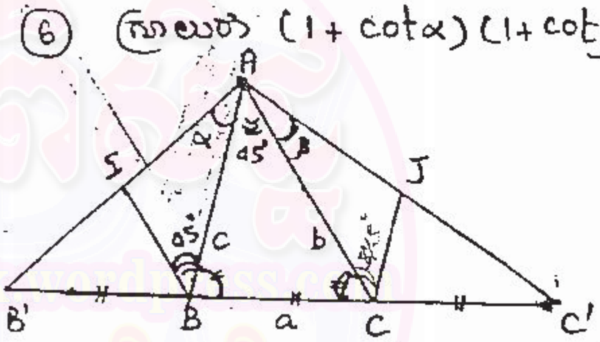
នោះ: $A(n)$ ចែកដាច់នឹង 271 (2)

(1) និង (2) ចែកដាច់នឹង 7 និង 271

ដោយ $(7, 271) = 1$ នោះ:

$A(n)$ ចែកដាច់នឹង 1897

(6) ស្រាយថា $(1+\cot\alpha)(1+\cot\beta)$



តាង $AB = c\ ;\ BC = a\ ;\ AC = b$

$S = S_{ABC} = \frac{1}{2}bc\sin 45^\circ = \frac{1}{2}ac\sin\hat{B}$

$= \frac{1}{2}ab\sin\hat{C} = \frac{bc\sqrt{2}}{4}$

$S_{ABB'} = \frac{1}{2}ac\sin(\pi - B) = S$

$S_{ACC'} = \frac{1}{2}ab\sin(\pi - C) = S$

តាម B គូស $(BI)//(AC)$ នោះ I

កណ្ដាល $[BB']$ $[AB']$

$S_{ABI} = \frac{1}{2}AI\cdot AB = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}AB'\cdot AB) =$.

Δ ABI តាមទ្រឹស្តីបទ cos និង sin

$\cos\widehat{ABI} = \frac{AB^2+BI^2-AI^2}{2\,AB\cdot BI}\ ;\ \sin\widehat{ABI} = \frac{2S_{ABI}}{AB\cdot BI}$

$\cot\widehat{ABI} = \frac{AB^2+BI^2-AI^2}{4\cdot S_{ABI}}$

$\cot 45^\circ = \frac{AB^2+BI^2-AI^2}{4\cdot S_{ABI}}$ $(\widehat{ABI} = 45^\circ$

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

ដូចគ្នា $\cot\alpha = \dfrac{AI^2 + AB^2 - BI^2}{2S}$

$\cot 45^\circ + \cot\alpha = \dfrac{2AB^2}{2S} = \dfrac{c^2}{S}$ (1)

ដូចគ្នា តាម C គូស $(CJ) /\!/ (AB)$, $\widehat{ACJ} = 45^\circ$

គេបាន: $\cot 45^\circ + \cot\beta = \dfrac{2AC^2}{2S} = \dfrac{b^2}{S}$ (2)

(1) និង (2):

$(1+\cot\alpha)(1+\cot\beta) = \dfrac{b^2c^2}{S^2}$

តែ $S = \dfrac{bc\sqrt{2}}{4}$ នោះ: $\dfrac{b^2c^2}{8} = S^2$

ដូចនេះ: $(1+\cot\alpha)(1+\cot\beta) = 8$.

⑦ កំណត់អនុគមន៍ f ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល.ខ

$f(x+y) \geq f(x)\cdot f(y) \geq 2003^{x+y}$

$x, y \in \mathbb{R}$.

យក $x = y = 0$ គេបាន:

$f(0+0) \geq f(0)\cdot f(0) \geq 2003^{0+0}$

$f(0) \geq [f(0)]^2 \geq 1$

នាំឲ្យ $f(0) = 1$

យក $y = -x$ គេបាន:

$f(0) \geq f(x)\cdot f(-x) \geq 2003^0$

$1 \geq f(x)\cdot f(-x) \geq 1$

នាំឲ្យ $f(x)\cdot f(-x) = 1$ (1)

យក $y = 0$ គេបាន:

$f(x) \geq f(x)\cdot f(0) \geq 2003^x$

$f(x) \geq f(x)\cdot 1 \geq 2003^x$

$f(x) \geq 2003^x$ (2)

$f(-x) \geq 2003^{-x}$

$\dfrac{1}{f(-x)} \leq \dfrac{1}{2003^{-x}} = 2003^x$

តាម (1): $f(x) = \dfrac{1}{f(-x)} \leq 2003^x$ (3)

(2) និង (3) គេបាន $f(x) = 2003^x$

⑧ (សរសេរ): $\dfrac{x_1+x_2+\dots+x_9}{x_3+x_6+x_9} + \dfrac{x_1+x_2+\dots+x_{12}}{x_4+x_8+x_{12}}$

មាន: $x_1 < x_2 < x_3$ នោះ: $x_1+x_2+x_3 < 3x_3$

$x_4 < x_5 < x_6$ នោះ: $x_4+x_5+x_6 < 3x_6$

$x_7 < x_8 < x_9$ នោះ: $x_7+x_8+x_9 < 3x_9$

បូកអង្គ: $x_1+x_2+\dots+x_9 < 3(x_3+x_6+x_9)$

$\Rightarrow \dfrac{x_1+x_2+\dots+x_9}{x_3+x_6+x_9} < 3$ (1)

ដូចគ្នា: $\dfrac{x_1+x_2+\dots+x_{12}}{x_4+x_8+x_{12}} < 4$ (2)

ដូចនេះ: $\dfrac{x_1+x_2+\dots+x_9}{x_3+x_6+x_9} + \dfrac{x_1+x_2+\dots+x_{12}}{x_4+x_8+x_{12}} < 7$

⑨ តាមសម្មតិកម្ម $M_k = \{2k^2+k, \dots, 2k^2+3k\}$

តាងសំណុំ $A = \{2k^2+k, 2k^2+k+1, \dots, 2k^2+2k\}$

$B = \{2k^2+2k+1, 2k^2+2k+2, \dots, 2k^2+3k\}$

តាង $f(n) = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

ដូចនេះ: $\sum_{x\in A} x^2 = f(2k^2+2k) - f(2k^2+k-1)$

$= \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)(12k^2+12k+1)$ (1)

ហើយ $\sum_{x\in B} x^2 = f(2k^2+3k) - f(2k^2+2k)$

$= \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)(12k^2+12k+1)$ (2)

(1) និង (2) $\sum_{x\in A} x^2 = \sum_{x\in B} x^2$.

www.pisethsok.wordpress.com

(3)

ប្រឡងជ្រើសរើស សិស្សពូកែ ទូទាំងប្រទេស
ផ្នែកអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា និង រូបវិទ្យា
ថ្នាក់ទី៩ និង ទី១២ ឆ្នាំសិក្សា២០០២-២០០៣

ហ៊ិត-ស៊ីអាត
អធិការ គណិតវិទ្យា
TEL: 011 953 029

~~*~*~*~*~*

<u>វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាទី 12</u> (ថ្ងៃទី 28-05-03)

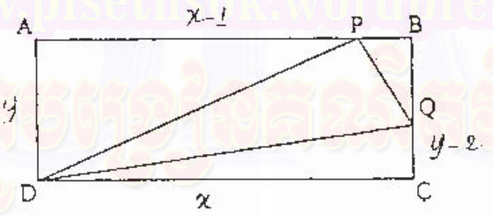
រយៈពេល 3 ម៉ោង - ពិន្ទុ 100

1-(ពិន្ទុ 05) មាន $f(x) = 2x + 1$ និង $g[f(x)] = x^2 + 3x + 1$ ។ គណនា $g(3)$ ។

2-(ពិន្ទុ 05) គណនា $\sqrt{9+\sqrt{80}} - \sqrt{9-\sqrt{80}}$ ។

3-(ពិន្ទុ 10) m និង n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{4}{7}$ ។ គណនា $m^2 + n^2$ ។

4-(ពិន្ទុ 10) ក្នុងរូបខាងក្រោម $ABCD$ ជាចតុកោណកែង ហើយ $PB = 1$, $BQ = 2$ ។ ដោយដឹងថា ផ្ទៃក្រលានៃត្រីកោណ APD ស្មើ 55 និងផ្ទៃក្រលានៃត្រីកោណ CQD ស្មើ 48 ចូររកផ្ទៃក្រលានៃត្រីកោណ PDQ ។



5-(ពិន្ទុ 10) ស្រាយបំភ្លឺថា គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n , ចំនួន $\frac{n}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6}$ ក៏ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដែរ ។

6-(ពិន្ទុ 20) គេអោយ $U_0 = 1$, $U_1 = 2$ និង $U_{n+1} = \frac{U_n^2 + 1}{U_{n-1}}$ ចំពោះ $n \geq 1$ ។

ក/- គណនា U_1

ខ/- បង្ហាញថា $U_{n+1} = 3U_n - U_{n-1}$ ចំពោះ $n \geq 1$ ។

7-(ពិន្ទុ 20) គេឧបមាថា $x^2 + x + 1 = 0$ ។ គណនា $x^{2003} + \frac{1}{x^{2003}}$ ។

8-(ពិន្ទុ 20) ត្រីកោណ ABC មានមុំទាំង 3 ជាមុំស្រួច ហើយ $\hat{B} = 60^\circ$ ។ ស្រាយបំភ្លឺថាបន្ទាត់ពុះ មុំមួយដែលផ្គុំដោយកំពស់គូសពី A និង C កាត់តាមផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC ។

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

កម្រងកំណែប្រលងសិស្សពូកែ
ទូទាំងប្រទេសនៅ កំពត 28/5/03

វិញ្ញាសាទី1

① គណនា $g(3)$

$f(x) = 2x+1 = 3$ នោះ $x = 1$

$g(3) = 1+3+1 = 5$

② គណនា $\sqrt{9+\sqrt{80}} - \sqrt{9-\sqrt{80}}$

តាង $x = \sqrt{9+\sqrt{80}} - \sqrt{9-\sqrt{80}}$

$x > 0$ ព្រោះ: $\sqrt{9+\sqrt{80}} > \sqrt{9-\sqrt{80}}$

$x^2 = 16$ នោះ $x = 4$

ម្យ៉ាង $\sqrt{9+\sqrt{80}} = 2+\sqrt{5}$

$\sqrt{9-\sqrt{80}} = -2+\sqrt{5}$ $(2-\sqrt{5}<0)$

នោះ: $\sqrt{9+\sqrt{80}} - \sqrt{9-\sqrt{80}} = 4$

③ គណនា m^2+n^2

មាន $\frac{1}{m}+\frac{1}{n} = \frac{4}{7}$ នោះ: $\begin{cases} m > \frac{7}{4} \\ n > \frac{7}{4} \end{cases}$

ដោយ m, n គត់ : $m \geq 2; n \geq 2$

យើងបាន: $\begin{cases} n = \frac{7m}{4m-7} = \frac{7}{4-\frac{7}{m}} & (1) \\ m = \frac{7n}{4n-7} = \frac{7}{4-\frac{7}{n}} & (2) \end{cases}$

បើ $m = 2$; (1) នាំឲ្យ $n = 14$

បើ $m > 2$; $\frac{1}{n} = \frac{4}{7} - \frac{1}{m} > \frac{1}{14}$

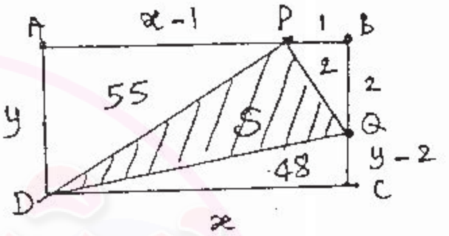
$2 < n < 14$

ចំពោះ $2 < n < 14$; តាម (2) : គ្មាន

$n = 2$ នោះ $m = 14$ ដូចករណី $m = 2$

ដូចនេះ: $m^2+n^2 = 2^2+14^2 = 200$

④



តាង $AB = x$; $AD = y$

ក្រឡាផ្ទៃ ΔAPD : $\frac{1}{2}y(x-1) = 55$

ក្រឡាផ្ទៃ ΔCDQ : $\frac{1}{2}x(y-2) = 48$

ទាញបាន: $x = 12$; $y = 10$

ក្រឡាផ្ទៃ PDQ គឺ: $S = 12\times10-55-48 = 17$

$S = 16$ ឯកតាផ្ទៃ. $=17$ ឯកតាផ្ទៃ

⑤ ស្រាយថា $\frac{n}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n^3}{6}$ ជាចំនួនគត់

តាង $E = \frac{n}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n^3}{6}$

$6E = n(n+1)(n+2)$

• $n ; n+1 ; n+2$ ជាចំនួនគត់តគ្នា នោះ មានចំនួនមួយជាចំនួនគូ

ដូចនេះ: $n(n+1)(n+2) \vdots 2$

• $n(n+1)(n+2) \vdots 3$ ព្រោះ:

បើ $n \equiv 0 \pmod 3$ នោះ: $n(n+1)(n+2) \vdots 3$

បើ $n \equiv 1 \pmod 3$ នោះ: $(n+2) \vdots 3$

បើ $n \equiv 2 \pmod 3$ នោះ: $(n+1) \vdots 3$

ដូចនេះ: $n(n+1)(n+2) \vdots 6$

... E ជាចំនួនគត់

www.pisethsok.wordpress.com
សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

តាង $f(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

ចំពោះ $n=1$ $\quad f(1) = \frac{1.2.3}{6} = 1 \in N$ ពិត

$n=2$ $\quad f(2) = \frac{2.3.4}{6} = 4 \in N$ ពិត

ឧបមាថាពិតដល់ k គឺ $k(k+1)(k+2) \vdots 6$ $(k \in N)$ យើងនឹងស្រាយថា ពិតដល់ $(k+1)$

$$f(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}$$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)}{6} + \frac{3(k+1)(k+2)}{6}$$

ដោយ $k(k+1)(k+2) \vdots 6$

ត្រូវស្រាយថា $\frac{3(k+1)(k+2)}{6}$ ជាចំនួនគត់

បើ $(k+1)(k+2) \vdots 2$

- បើ k គូ នោះ $(k+2)$ គូ នោះ $(k+1)(k+2) \vdots 2$
- បើ k សេស នោះ $(k+1)$ គូ នោះ $(k+1)(k+2) \vdots 2$

ដូចនេះ: $f(k+1)$ ពិត ។

ដំណាល $f(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ ជាចំនួនគត់

⑥ ក) គណនា u_2: $\quad u_0 = 1$; $u_1 = 2$

$n=1$: $\quad u_2 = \frac{u_1^2+1}{u_0} = \frac{2^2+1}{1} = 5$

ខ) បង្ហាញថា $u_{n+1} = 3u_n - u_{n-1}$ $(n\geq1)$

$u_{n+1} = \frac{u_n^2+1}{u_{n-1}}$ នោះ: $u_{n+1} \cdot u_{n-1} = u_n^2 + 1$

ឬ $u_{n+1} \cdot u_{n-1} - u_n^2 = 1$

- $y_n = u_{n-1} \cdot u_{n+1} - u_n^2$ ជាតំលៃថេរគ្រប់ $n \geq 1$ ដូចនេះ: $u_n \cdot u_{n+2} - u_{n+1}^2 = u_{n-1} \cdot u_{n+1} - u_n^2 = 1$

ឬ $\frac{u_n + u_{n+2}}{u_{n+1}} = \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{u_n}$ គ្រប់ $n \geq 1$

- $z_n = \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{u_n}$ ជាតំលៃថេរ គ្រប់ n

$(z_1 = z_2 = \dots = z_n)$

ចំពោះ: $n=1$, $z_1 = \frac{u_0 + u_2}{u_1} = \frac{1+5}{2}$

ដូចនេះ: $z_n = \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{u_n} = z_1 = 3$

ឬ $\boxed{u_{n+1} = 3u_n - u_{n-1}}$

របៀបទី2 : ស្រាយតាមកំណើន :

$u_{n+1} = 3u_n - u_{n-1}$ ចំពោះ $(n$

មាន $u_2 = 5 = 3.2 - 1 = 3u_1 - u_0$

ឧបមាថាពិតដល់ $n=k$ នោះ: $u_{k+1} = 3u_k - u_{k-1}$

យើងនឹងស្រាយថា ពិតដល់ $n = k+1$

គឺ: $u_{k+2} = 3u_{k+1} - u_k$

តាមសម្មតិកម្ម $u_{k+1} = \frac{u_k^2+1}{u_{k-1}}$

នោះ: $u_{k+1} \cdot u_{k-1} = u_k^2 + 1$

គុណអង្គនឹង $u_{k+1} \neq 0$ លើ $u_{k+1} = 3u_k - 1$

$$u_{k+1}^2 = 3u_k u_{k+1} - u_{k+1} u_{k-1}$$

$$= 3u_k u_{k+1} - u_k^2 - 1$$

$$u_{k+1}^2 + 1 = u_k(3u_{k+1} - u_k)$$

$$\frac{u_{k+1}^2+1}{u_k} = 3u_{k+1} - u_k = u_{k+2}$$

ដូចនេះ: $u_{k+2} = 3u_{k+1} - u_k$ ពិត

នោះ: $u_{n+1} = 3u_n - u_{n-1}$ $\quad (n\geq1)$

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

គណនា $x^{2003}+\frac{1}{x^{2003}}$

ដោយ: $x^2+x+1=0$ នោះ: $x+\frac{1}{x}=-1$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=(-1)^2=1$

ឬ $x^2+\frac{1}{x^2}=-1$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=1$ ឬ $x^3+\frac{1}{x^3}=2$ $(n=3)$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)=-2$ ឬ $x^4+\frac{1}{x^4}=-1$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)=1$ ឬ $x^5+\frac{1}{x^5}=-1$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^5+\frac{1}{x^5}\right)=1$ ឬ $x^6+\frac{1}{x^6}=+2$ $(n=6)$

ហេតុនេះ $x^n+\frac{1}{x^n}=2$ កាលណា $n=3k$ $(k\in\mathbb{N}^*)$

$x^n+\frac{1}{x^n}=-1$ បើ $n=3k-2$ ឬ $n=3k-1$ $(k\in\mathbb{N}^*)$

នោះ: $2003=668\times3-1$ ជា $3k-1$

ដូចនេះ: $x^{2003}+\frac{1}{x^{2003}}=-1$

របៀបទី2: $x^2+x+1=0$ មានឫសពីរ:

$x_1=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$; $x_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

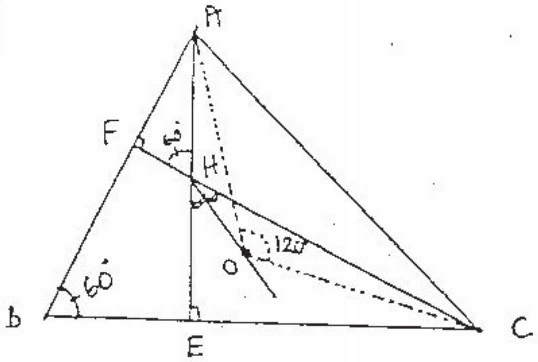
ករណី $x_1=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$

តាម Demoivre: $x^{2003}+\frac{1}{x^{2003}}=-1$

ករណី $x_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$

តាម Demoivre: $x^{2003}+\frac{1}{x^{2003}}=-1$

(8)



យក H ជាប្រសព្វកំពស់ [AE] និង [CF]

O ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅ Δ ABC

$\widehat{AOC}=2\widehat{ABC}=120°$ (មុំផ្ចិតនិងមុំ

- ចតុកោណ BEHF ចារឹកក្នុងរង្វង់:

$\widehat{EHF}=180°-\widehat{B}=180°-60°=120°$

$\widehat{AHC}=\widehat{EHF}=120°$

ដូចនេះ: $\widehat{AHC}=\widehat{AOC}=120°$

នាំឲ្យ A ; H ; O ; C ស្ថិតលើរង្វង់តែមួយ:

ហេតុនេះ: $\widehat{OHC}=\widehat{OAC}$ (ស្កាត់ធ្នូ OC)

$\widehat{EHO}=\widehat{ACO}$ (មុំបន្ទប់ផង)

ម្យ៉ាងទៀត Δ OAC សមបាត (ព្រោះជាកាំ

នោះ: $\widehat{OAC}=\widehat{ACO}$

ដូចនេះ: $\widehat{EHO}=\widehat{OHC}$ បញ្ជាក់ថា (HO) ជាបន្ទាត់ពុះ: ∠EHC ។

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

ប្រឡងជ្រើសរើស សិស្សពូកែ ខ្នាតប្រទេស
ផ្នែកអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា និង រូបវិទ្យា
ថ្នាក់ទី៩ និង ទី១២ ឆ្នាំសិក្សា២០០២-២០០៣

~~*~*~*~*~*

<u>វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាទី 12</u> (ថ្ងៃទី 30-05-03)

រយៈពេល 3 ម៉ោង - ពិន្ទុ 100

1-(ពិន្ទុ 05) x និង y ជាចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $x^2+3xy+y^2=60$ ។ រកតំលៃធំបំផុតនៃផលគុណ xy ។

2-(ពិន្ទុ 20) គេអោយ n ចំនុចនៅក្នុងប្លង់តែមួយ និងគ្មាន 3 ចំនុចណាឋិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ ។ N ជាចំនួនអង្កត់ដែលភ្ជាប់ពីរៗចំនុច ។

ក/- តើមានរូបដែល $N=n$, $N=2n$ ដែរឬទេ ? បើមានចូរបញ្ជាក់តំលៃនៃ n រួចគូររូបបង្ហាញក្នុងករណីនីមួយៗ ។

ខ/- ជាទូទៅ តើមានចំនុចប៉ុន្មានដែល $N=kn$? ។

3-(ពិន្ទុ 25) k ជាចំនួនគត់ដែល $k\geq 2$ ។ ស្វ៊ីត (x_n) កំនត់ដោយ $x_0=x_1=1$ និង $x_{n+1}=\dfrac{x_n^k+1}{x_{n-1}}$ ចំពោះ $n\geq 1$ ។

បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $k\geq 2$ ស្វ៊ីត (x_n) ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនគត់ ។

4-(ពិន្ទុ 25) ក្នុងឆ្នាំនេះ សុខបានប្រលងតែសគណិតវិទ្យា 4 លើក ។ ពិន្ទុអតិបរមានៃការប្រលងមួយលើកៗស្មើ 100 ។ ពិន្ទុដែលសុខបានទទួលសុទ្ធតែមានលេខ 2 ខ្ទង់ ដែលខ្ទង់នីមួយៗខុសពី 0 ហើយពិន្ទុទាំង 4 លើកមានលេខខុសៗគ្នាទាំង 8 ។ មធ្យមភាគនៃពិន្ទុទាំង 4 លើករបស់សុខ ស្មើនឹងមធ្យមភាគនៃពិន្ទុនីមួយៗត្រលប់លេខ (ឧទាហរណ៍ : ពិន្ទុ ៩៤ ត្រលប់លេខទៅជា 49) ហើយមធ្យមភាគនេះជាចំនួនគត់ដែលលេខនៃខ្ទង់នីមួយៗខុសពីលេខទាំង 8 នៃពិន្ទុទាំង 4 លើក ។

តើមធ្យមភាគនៃពិន្ទុរបស់សុខស្មើប៉ុន្មាន ? ចូរអោយឧទាហរណ៍មួយនៃពិន្ទុទាំង 4 របស់សុខ ។

5-(ពិន្ទុ 25) ABC ជាត្រីកោណដែលមានមុំ B ជាមុំស្រួច ។ កន្ទះបន្ទាត់ពុះក្នុងនៃមុំ A ជួបជ្រុង $[BC]$ ត្រង់ D ។ P ជាចំនុចមួយនៅលើជ្រុង $[AC]$ ចន្លោះ A និង C ។

ស្រាយបំភ្លឺថា $\angle BPD < \angle DPC$ ។

www.pisethsok.wordpress.com

កម្រងកំណែវិញ្ញាសាទី2

① រកតំលៃធំបំផុតនៃ xy :

មាន $x^2+3xy+y^2=60$

$(x-y)^2+5xy=60$

$5xy=60-(x-y)^2$

$xy=12-\frac{(x-y)^2}{5}\le 12$

ដូចនេះ $xy=12$ កាលណា $x=y$ នោះ xy មានតំលៃធំបំផុត $\boxed{12}$

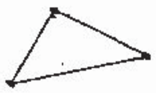
② ក) ប្រសិនបើ $N=n$; $N=2n$

- ចំពោះ n ចំណុច ចំនួនអង្កត់
ដែលគូសពីចំនុចមួយ ទៅចំនុចផ្សេងទៀត មាន $(n-1)$ អង្កត់
ដូចនេះ ចំពោះ n ចំណុច គេបាន ចំនួនអង្កត់ $N=\frac{(n-1).n}{2}$
ព្រោះ អង្កត់ដែលគូសចេញពីចំនុចនីមួយៗ ត្រូវរាប់ 2ដង

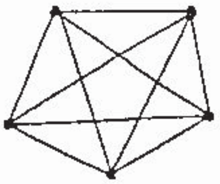
សង្កេតឃើញថា :

ចំនុច	ចំនួនអង្កត់	ឬទៅ.
2	1	$1 = \frac{2(2+}{2}$
3	3	$2+1 = \frac{3(3+}{2}$
4	6	$3+2+1 = \frac{4(}{}$
5	10	$4+3+2+1 =$
⋮	⋮	⋯
n	$\frac{n(n-1)}{2}$	$(n-1)+(n-2)+\dots+1=\frac{(n}{}$

- កាលណា $N=n$ នោះ $\frac{(n-1)n}{2}=n$ នោះ $n=3$



- កាលណា $N=2n$ នោះ $\frac{(n-1)n}{2}=2n$ នោះ $n=5$



ខ) ចំនួនចំនុចបើ $N=kn$

$\frac{(n-1)}{2}n=kn$ នោះ $n=2k+1$

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

បង្ហាញថា x_n ជាចំនួនគត់ ចំពោះគ្រប់ $K \geq 2$

ដោយ $x_0 = x_1 = 1$ និង $x_{n+1} = \frac{x_n^k + 1}{x_{n-1}}$ $(n \geq 1)$

មាន: $x_2 = \frac{1^k + 1}{1} = 2$ ជាចំនួនគត់

$x_3 = \frac{2^k + 1}{1} = 2^k + 1$ ក៏ជាចំនួនគត់ដែរ

ឧបមាថា $x_1 ; x_2 ; x_3 , \dots , x_n$ ជាចំនួនគត់

ស្រាយថា x_{n+1} ជាចំនួនគត់

មាន: $x_{n+1} = \frac{x_n^k + 1}{x_{n-1}}$ និង $x_n = \frac{x_{n-1}^k + 1}{x_{n-2}}$

នាំឲ្យ $x_{n+1} = \frac{(x_{n-1}^k + 1)^k + x_{n-2}^k}{x_{n-2}^k \cdot x_{n-1}}$

តាង $N = (x_{n-1}^k + 1)^k + x_{n-2}^k$

* $N \vdots x_{n-2}^k$ ព្រោះ x_n គត់ ឬ $\frac{x_{n-1}^k + 1}{x_{n-2}}$ គត់

ឬ $x_{n-1}^k + 1$ ចែកដាច់នឹង x_{n-2}

$(x_{n-1}^k + 1)^k$ ចែកដាច់នឹង x_{n-2}^k

$(x_{n-1}^k + 1)^k + x_{n-2}^k$ ចែកដាច់នឹង x_{n-2}^k (1)

* $N \vdots x_{n-1}$ ព្រោះ $x_{n-1}^k + 1 \equiv 1 \pmod{x_{n-1}}$

នាំឲ្យ $(x_{n-1}^k + 1)^k \equiv 1 \pmod{x_{n-1}}$

$(x_{n-1}^k + 1)^k + x_{n-2}^k \equiv 1 + x_{n-2}^k \pmod{x_{n-1}}$

តែ $x_{n-1} = \frac{x_{n-2}^k + 1}{x_{n-3}}$ នាំឲ្យ $x_{n-1} \cdot x_{n-3} = x_{n-2}^k + 1 \equiv 0 \pmod{x_{n-1}}$

ដូចនេះ: $N \equiv 0 \pmod{x_{n-1}}$ (2)

(1) និង (2) x_{n+1} ជាចំនួនគត់

www.pisethsok.wordpress.com
សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

មធ្យមភាគ M :

គូចំនួនពីរខ្ទង់4គោល : $(10a+b)$; $(10c+d)$; $(10e+f)$; $(10g+h)$

$$M = \frac{(10a+b)+(10c+d)+(10e+f)+(10g+h)}{4} = \frac{(10b+a)+(10d+c)+(10f+e)+(10h+g)}{4}$$

$$M = \frac{11a+11b+11c+11d+11e+11f+11g+11h}{4.2}$$ (បូកចំនួនពីរខ្ទង់ទាំង2)

$$M = \frac{11}{8}(a+b+c+d+e+f+g+h)$$

ដោយលេខទាំង8 ខុសៗគ្នា ហើយខុសពី0 យើងបាន :

$$M = \frac{11}{8}(1+2+3+4+5+6+7+8+9-K)$$ ដែល $1 \le K \le 9$; K គត់

$$M = \frac{11}{8}(45-K)$$ ដោយ M ជាចំនួនគត់ នោះ $(45-K) \vdots 8$

$1 \le K \le 9$ ⇒ $36 \le 45-K \le 44$

និងបាន : $45-K = 40$ ⇒ $K=5$

$\boxed{M = 55}$

ខ) ឧទាហរណ៍ : បើ $M = 55$ ផលបូកចំនួនពីរខ្ទង់4គឺ : $55 \times 4 = 220$

$$\begin{array}{r} 55 \\ \times\ 4 \\ \hline 20 \\ 20 \\ \hline 220 \end{array}$$

មានន័យថា : ផលបូកលេខខ្ទង់ដប់10 និងផលបូកលេខខ្ទង់រាយស្មើ20ដូចគ្នា

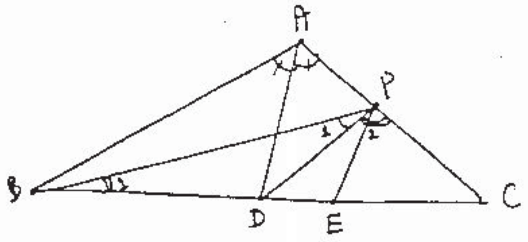
ដែលលេខខ្ទង់រាយនិងខ្ទង់ដប់10 1គូៗមានផលបូកស្មើ10 :

$1+9 = 2+8 = 3+7 = 4+6$ (គ្មានលេខ5 ព្រោះជាលេខមធ្យមភាគ)

និងបានចំនួនពីរខ្ទង់4លើកគឺ : $(12, 98, 26, 84)$

⇒ $(13 ; 97 ; 74 ; 36)$; ...

⑤



សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

ស្រាយបញ្ជាក់ $\hat{P}_1 < \hat{P}_2$

ដោយ $\angle B$ ស្រួច នោះ $\widehat{PBC} < \widehat{ABC} < 90^\circ$

នាំឲ្យ $\sin B_1 < \sin B$

$\triangle ABC$ មាន: $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$ (AD ពុះក្នុងមុំ $\hat{A}$)

$\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{\sin C}{\sin B}$ (ទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស)

នាំឲ្យ $\dfrac{\sin C}{\sin B} = \dfrac{DB}{DC}$ (1)

ក្នុងបន្ទាត់ពុះ (PE) នៃមុំ $\angle BPC$ នៃ $\triangle BPC$

$\dfrac{PB}{PC} = \dfrac{EB}{EC}$ (ពុះក្នុង)

$\dfrac{PB}{PC} = \dfrac{\sin C}{\sin B_1}$ (ទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស)

នាំឲ្យ $\dfrac{\sin C}{\sin B_1} = \dfrac{EB}{EC}$ (2)

តែ $\sin B_1 < \sin B$ ជា $\dfrac{\sin C}{\sin B_1} > \dfrac{\sin C}{\sin B}$

(1) និង (2) $\dfrac{EB}{EC} > \dfrac{DB}{DC}$

D ចែកអង្កត់ [BC] តាមផលធៀបតូចជាង , D ស្ថិតនៅឆ្វេង E

ដូចនេះ E ស្ថិតនៅចន្លោះ D និង C

នាំឲ្យ $\hat{P}_1 < P_2$

សំគាល់ ដោយសារ $\sin \hat{P}_1 < \sin \hat{P}_2$ នាំឲ្យ $\hat{P}_1 < \hat{P}_2$ (១,២)

ព្រោះមុំទាំងពីរ $\hat{P}_1$; $\hat{P}_2$ ស្រួចទាំងអស់ ។

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

(4)

ប្រលងជ្រើសរើសសិស្សពូកែគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១២ ចំនួន ០៤រូប សំរាប់
ចូលរួមប្រលងគណិតវិទ្យាអូឡាំព្យាដ លើកទី៣ (១៩_២៣ ឧសភា ២០០៣)

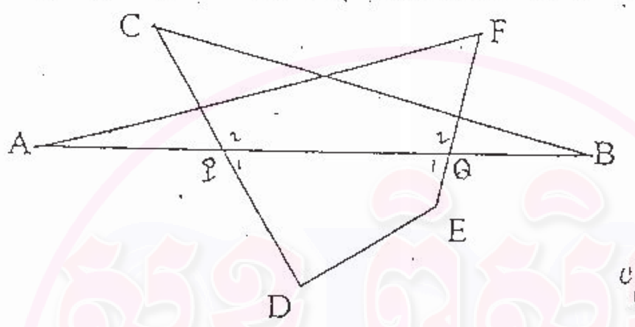
សម័យប្រលង : ០២_០១_០៣

រយៈពេល : ៣ម៉ោង (១០០ពិន្ទុ)

អធិការ គណៈ...
TEL: 011 953 029

វិញ្ញាសាសំរាប់ថ្ងៃទី១ :

I. (១០ពិន្ទុ) រកផលបូករង្វាស់ (គិតជាដឺក្រេ) នៃមុំ A, B, C, D, E និង F នៅក្នុងរូបខាងក្រោមនេះ ÷



II. (១៥ពិន្ទុ) បើ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ចូរបង្ហាញថា មានតំលៃគត់ នៃ x និង y ជានិច្ច ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $x^2 - y^2 = n^3$ ។

III. (២០ពិន្ទុ) $ABCD$ ជាការេ ហើយ E ជាចំនុចមួយនៅក្នុងការេ ដែល $AE = 1$, $BE = 2$ និង $CE = 3$ ។ រករង្វាស់នៃមុំ $\angle AEB$ (គិតជាដឺក្រេ) និងផ្ទៃក្រលានៃការេ។

IV. (២៥ពិន្ទុ) គណនា $f(n)$ ដោយដឹងថា :

$$f(0) = f(1) = 0$$

និង $f(n+1) = 2f(n) - f(n-1) + n + 1, \quad n \in \mathbb{N}$ ។

V. (៣០ពិន្ទុ) a, b និង c ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។ ស្រាយបំភ្លឺថា បើ $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$ ជាចំនួនសនិទាន នោះ a, b និង c ជាការេប្រាកដ។

C:\Olympiad III 03\Math papers D1.doc

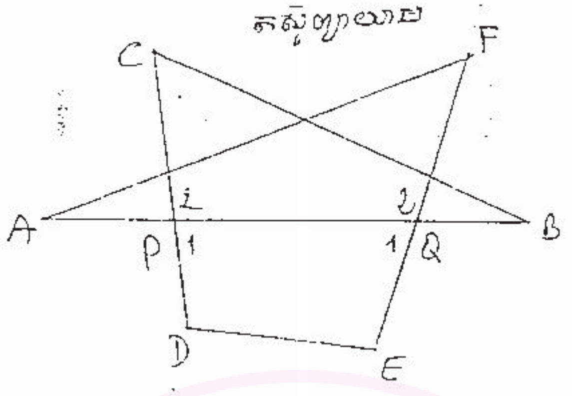
សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

អត្រាកំណែ វិញ្ញាសាទី 1

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែ ដើម្បី SEA-MO

ថ្ងៃ 02/01/03

I. (ពិន្ទុ 10)



- ចតុ. DEQP : $D + E + P_1 + Q_1 = 360°$ (1)
- ត្រីកោណ AQF : $A + F + Q_2 = 180°$ (2)
- ត្រីកោណ CBP : $B + C + P_2 = 180°$ (3)

$P_1 + P_2 = 180°$

$Q_1 + Q_2 = 180°$

បូកអង្គនិងអង្គ (1), (2) និង (3) :

$$A + B + C + D + E + F = 360°$$

{ - គូររូប 10, - ។ 0 }

II. (ពិន្ទុ 15)

- យក $x = \frac{n(n+1)}{2}$ និង $y = \frac{n(n-1)}{2}$, $n \in N$] 10

បើ n ជាចំនួនគត់សេស នោះ n+1 និង n-1 ចែកដាច់នឹង 2

បើ n ជាចំនួនគត់គូ នោះ n ចែកដាច់នឹង 2

ដូចនេះ x និង y ជាចំនួនគត់] 5

- ផ្ទៀងផ្ទាត់ :

$$x^2 - y^2 = \frac{n^2}{4}\left[(n+1)^2 - (n-1)^2\right]$$

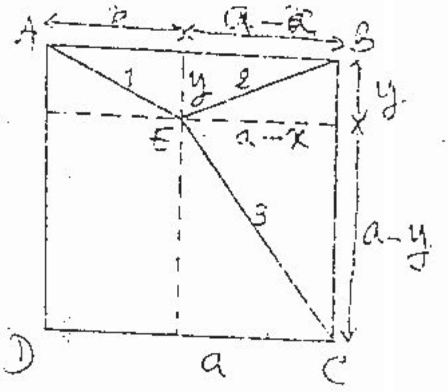
$$= \frac{n^2}{4} \cdot 2n \cdot 2$$

$$= n^3$$

10 + បរិយាយគ្រប់ 5

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

(III). (ពិន្ទុ 20)



រក $\widehat{AEB}$:

តាង a ជារង្វាស់ជ្រុងការេ

គេបាន $x^2 + y^2 = 1$ (1)

$(a-x)^2 + y^2 = 4$ (2)

$(a-x)^2 + (a-y)^2 = 9$ (3) — 5 ពិន្ទុ

(1) ជំនួស (2) : $(a-x)^2 + 1 - x^2 = 4$

$x = \frac{a^2-3}{2a}$

(2) ជំនួស (3) : $4 - y^2 + (a-y)^2 = 9$

$y = \frac{a^2-5}{2a}$

(1) : $\left(\frac{a^2-3}{2a}\right)^2 + \left(\frac{a^2-5}{2a}\right)^2 = 1$

$a^4 - 10a^2 + 17 = 0$

$a^2 = 5 - 2\sqrt{2}$ មិនយក ព្រោះនាំឲ្យ $x<0, y<0$

$a^2 = 5 + 2\sqrt{2}$ យក — 10 ពិន្ទុ

ទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុសក្នុងត្រីកោណ AEB :

$5 + 2\sqrt{2} = 1^2 + 2^2 - 2 \times 1 \times 2 \cos \widehat{AEB}$

$\cos \widehat{AEB} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ នាំឲ្យ $\boxed{\widehat{AEB} = 135^\circ}$ 5 ពិន្ទុ

ដូច្នេះ ក្រឡាផ្ទៃការេ : $\boxed{5 + 2\sqrt{2} \text{ ឯកតាក្រឡាផ្ទៃ}}$

www.pisethsok.wordpress.com
សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

III (ពិន្ទុ 25)

$$f(n+1) = 2f(n) - f(n-1) + n + 1$$

ទាញបាន: $f(n+1) - f(n) = f(n) - f(n-1) + n + 1$

$$f(n) - f(n-1) = f(n-1) - f(n-2) + n$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$f(3) - f(2) = f(2) - f(1) + 3$$

$$f(2) - \underbrace{f(1)}_{0} = f(1) - \underbrace{f(0)}_{0} + 2$$

បូក: $f(n+1) = f(n) + (n+1) + n + \cdots + 3 + 2$

$$f(n+1) - f(n) = \frac{1}{2} n \left[(n+1) + 2 \right]$$

$$f(n+1) - f(n) = \frac{1}{2} n(n+3) \quad (1) \quad \text{-- 7 pts}$$

តាម (1): $f(n+1) - f(n) = \frac{1}{2} n(n+3)$

$$f(n) - f(n-1) = \frac{1}{2}(n-1)(n+2)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$f(3) - f(2) = \frac{1}{2} \times 2 \times 5$$

$$f(2) - \underbrace{f(1)}_{0} = \frac{1}{2} \times 1 \times 4$$

បូក: $f(n+1) = \frac{1}{2}\left[n(n+3) + (n-1)(n+2) + \cdots + 2\times 5 + 1\times 4 \right]$ 7 pts

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{p=1}^{n} p^2 + \sum_{p=1}^{n} 3p \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + 3 \times \frac{1}{2} n(n+1) \right]$$

សំរាយ $\sum p$ 3 pts

$$f(n+1) = \frac{1}{6} n(n+1)(n+5) \quad \text{-- 7 pts}$$

ជំនួស n ដោយ $n-1$

$$\boxed{f(n) = \frac{1}{6}(n-1)n(n+4)} \quad \text{-- 4 pts}$$

www.pisethsok.wordpress.com

(ទំ. 30)

យើងត្រូវបង្ហាញថា:

- បើ $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$ នោះ a ជាការេប្រាកដ
- បើ $\sqrt{a}+\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$ នោះ a និង b ជាការេប្រាកដ
- បើ $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \in \mathbb{Q}$ នោះ a, b និង c ជាការេប្រាកដ

ក) បើ $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$

តាង $\sqrt{a} = \frac{p}{q}$, p និង q ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដែលបឋមរវាងគ្នា

តាមស.ក. a ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន

ដោយ p និង q បឋមរវាងគ្នា

ដូចនេះ a ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានកាលណា $q^2=1$

យើងបាន $a=p^2$ ជាការេប្រាកដ។

ខ) បើ $\sqrt{a}+\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$

តាង $\sqrt{a}+\sqrt{b} = r$, $r \in \mathbb{Q}$

បើ $r=0$ នោះ $a=b=0$ ផ្ទុយស.ក.

ដូចនេះ $r \neq 0$

$\sqrt{b} = r-\sqrt{a}$; $b = r^2-2r\sqrt{a}+a$

$\sqrt{a} = \frac{r^2+a-b}{2r} \in \mathbb{Q}$

តាម ក) a ជាការេប្រាកដ

ស្រដៀងគ្នាដែរយើងបាន $\sqrt{b} = \frac{r^2+b-a}{2r} \in \mathbb{Q}$

តាម ក) b ជាការេប្រាកដ

គ) បើ $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \in \mathbb{Q}$

តាង $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} = \frac{p}{q}$, $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, a, b, c, p, q គត់វិជ្ជមាន

យើងបាន $q\sqrt{a}+q\sqrt{b} = p-q\sqrt{c}$

លើកជាការេ: $2q^2\sqrt{ab}+2pq\sqrt{c} = p^2+q^2(c-a-b)$

$$\sqrt{4q^4ab}+\sqrt{4p^2q^2c} = p^2+q^2(c-a-b) \in \mathbb{Q}$$

តាម ខ) យើងបាន $4q^4ab$ និង $4p^2q^2c$ ជាការេប្រាកដ

ដូចនេះ c ជាការេប្រាកដ

ស្រដៀងគ្នាដែរ:

$$\sqrt{4q^4ac}+\sqrt{4p^2q^2b} = p^2+q^2(b-a-c) \in \mathbb{Q}$$

$$\sqrt{4q^4bc}+\sqrt{4p^2q^2a} = p^2+q^2(a-b-c) \in \mathbb{Q}$$

តាម ខ) b និង a ជាការេប្រាកដ

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

(12) ហ៊ន ស៊ីពាន

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១២ ចំនួន ០៤រូប សំរាប់
ចូលរួមប្រឡងគណិតវិទ្យាអូឡាំពិច លើកទី៣ (១៩_២៣ ឧសភា ២០០៣)
សម័យប្រឡង : ០២_០១_០៣
រយៈពេល : ៣ម៉ោង (១០០ពិន្ទុ)

វិញ្ញាសាសំរាប់ថ្ងៃទី២ :

I. (៥ពិន្ទុ) រកចំនួនពិតវិជ្ជមាន x ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $x.x^{\frac{3}{x}} = \frac{x^x}{x}$ ។

II. (១៥ពិន្ទុ)

១. f ជាអនុគមន៍កំនត់ដោយ $f(n) = 3^{3n} + 7$ ដែល $n \in \mathbb{N}$ ។

បង្ហាញថា $f(n+1) - f(n)$ ចែកដាច់នឹង 8 ។

២. បង្ហាញថា $E = \frac{n}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6}$ (ដែល $n \in \mathbb{N}$) ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ។

III. (២៥ពិន្ទុ) g ជាអនុគមន៍ ដែលបំពេញលក្ខណៈ ដូចខាងក្រោម :

(i) $g(n)$ កំនត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n

(ii) $g(n)$ ជាចំនួនគត់,

(iii) $g(2) = 2$

(iv) $g(mn) = g(m).g(n)$ ចំពោះគ្រប់ m និង n

(v) $g(m) > g(n)$ បើ $m > n$

បង្ហាញថា $g(n) = n$ ចំពោះ $n = 1, 2, 3, \ldots$ ។

IV. (២៥ពិន្ទុ) ABC ជាត្រីកោណកែង ត្រង់ A ហើយមានកំពស់ $[AD]$។ រង្វង់ផ្ចិត O_1 និង O_2 ចារឹករៀងគ្នា ក្នុងត្រីកោណ ABD និង ACD ។ បន្ទាត់ (O_1O_2) ជួបជ្រុង $[AB]$ និង $[AC]$ រៀងគ្នា ត្រង់ K និង L ។ តាង S_1 និង S_2 ជាផ្ទៃក្រលារៀងគ្នា នៃត្រីកោណ ABC និង AKL ។

បង្ហាញថា $S_1 \geq 2S_2$ ។

V. (៣០ពិន្ទុ) គេបានជំនួសលេខនីមួយៗដោយអក្សរ នៅក្នុងផលបូក ដូចខាងក្រោម :

```
  S E V E N
  S E V E N
+     S I X
-----------
T W E N T Y
```

រកលេខដែលត្រូវគ្នានឹងអក្សរនីមួយៗខាងលើ បើអក្សរនីមួយៗ តាងលេខខុសៗគ្នា ហើយ ខុសពីលេខ 9 ។

www.pisethsok.wordpress.com
សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

I (ពិន្ទុ 5)

$$\frac{x^2 \cdot x^{\frac{3}{x}}}{x^x} = 1$$

$$x^{2+\frac{3}{x}-x} = 1$$

$$x^{\frac{-x^2+2x+3}{x}} = 1$$

- បើ $x = 1$ នោះ $1^4 = 1$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ — ត្រូវបាន 3 ពិន្ទុ 0
- បើ $x \neq 1$ នោះ $-x^2+2x+3 = 0$

$x = -1$; $x = 3$ (មិនយក)

ដូចនេះ សមីការមានឫស $x = 1$; $x = 3$

II (ពិន្ទុ 15)

1. (ពិន្ទុ 5)

$$f(n+1) - f(n) = \left(3^{2(n+1)} + 7\right) - \left(3^{2n} + 7\right)$$
$$= 3^{2n+2} - 3^{2n}$$
$$= 3^{2n}\left(3^2 - 1\right)$$
$$= 8 \cdot 3^{2n}$$

ដូចនេះ: $f(n+1) - f(n)$ ចែកដាច់នឹង 8 — ត្រូវ 5 ពិន្ទុ 0

2. (ពិន្ទុ 10)

$$E = \frac{n}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6}$$
$$6E = 2n + 3n^2 + n^3$$
$$= n(n^2 + 3n + 2)$$
$$= n(n+1)(n+2)$$

ដោយ n ; $n+1$; $n+2$ ជាបីចំនួនគត់តគ្នា នោះគេបាន:

$n(n+1)(n+2)$ ចែកដាច់នឹង 2
$n(n+1)(n+2)$ ចែកដាច់នឹង 3 — មិនមានតួចែករួម

ពោលគឺ: $n(n+1)(n+2)$ ចែកដាច់នឹង 2×3 គឺ 6

ដូចនេះ: $6E$ ចែកដាច់នឹង 6 គឺ E ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ

www.pisethsok.wordpress.com
សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

III (ពិន្ទុ 25)

បង្ហាញថា $g(n) = n$ ចំពោះគ្រប់ $n = 1, 2, 3, \ldots$

+ $g(2) = g(1\cdot 2) = g(1)\cdot g(2)$

$2 = 2\cdot g(1)$ នាំឲ្យ $g(1) = 1$

ដូចនេះ៖ ទំនាក់ទំនងពិតចំពោះ $\underline{n = 1}$

+ ឧបមាថា ទំនាក់ទំនងពិតចំពោះ $n = k$

គេបាន $g(k) = k$

+ គេពិនិត្យចំពោះ $n = k+1$

• បើ $k+1 = 2l$ ដែល $1 \le l < k$

$g(k+1) = g(2l) = g(2)\cdot g(l)$ ព្រោះ $1 \le l < k$

$= 2l$

$g(k+1) = 2l = k+1$

• បើ $k+1 = 2l+1$ ដែល $1 \le l < k$

គេបាន៖

$2l = g(2l) < g(2l+1)$ ព្រោះ $2l < 2l+1$ (1)

ហើយ $g(2l+1) < g(2l+2)$ ព្រោះ $2l+1 < 2l+2$ (2)

តាម (1) & (2) : $2l < g(2l+1) < g[2(l+1)]$

$2l < g(2l+1) < g(2)\cdot g(l+1)$

$2l < g(2l+1) < 2(l+1)$

$2l < g(2l+1) < 2l+2$

ហើយ $g(2l+1)$ ជាចំនួនគត់

នាំឲ្យបាន $g(2l+1) = 2l+1$

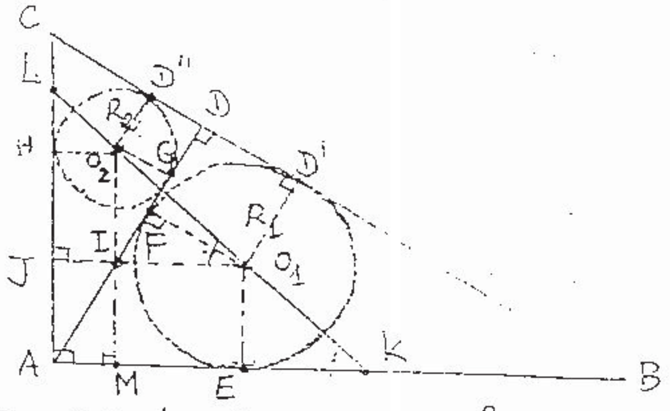
$g(k+1) = k+1$

ដូចនេះ៖ ទំនាក់ទំនងពិតចំពោះ $n = k+1$

សន្និដ្ឋាន៖ $\boxed{g(n) = n \text{ ចំពោះ } n = 1; 2; 3; \ldots}$

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

(ពិន្ទុ25)



តាង $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$, $AD=h$

$R_1=$ កាំរង្វង់(O_1) , $R_2=$ កាំរង្វង់(O_2)

គេបាន : $S_1=\frac{1}{2}ah$ (1)

$S_2=\frac{1}{2}AK.AL$ (2)

តែ : $AK=AE+EK=AF+EK$ (3) ព្រោះ : $AE=AF$

$AE=AF=AD-FD=h-R_1$ ព្រោះ : O_1FDD' ជាការេជ្រុង R_1

$O_1I=O_1J-IJ=O_1J-O_2H$ ព្រោះ : $IJ=O_2H=R_2$

$=AE-O_2H$ ព្រោះ : $O_1J=AE$

$O_1I=h-R_1-R_2$ (4)

$O_2I=HJ=AH-AJ=AG-O_1E$ ព្រោះ : $AH=AG$, $AJ=O_1E$

$O_2I=AG-O_1E$ (5)

តែ : $AG=AD-GD=h-R_2$ ព្រោះ : $GO_2D''D$ ជាការេជ្រុង R_2

(5) នាំឲ្យ $O_2I=h-R_2-R_1$ (6)

តាម (4)&(6) គេបាន $IO_1=IO_2=h-R_1-R_2$

ដូចនេះ : ΔIO_1O_2 ជាត្រីកោណកែងសមបាតត្រង់ I ហើយ $\widehat{IO_1O_2}=45^\circ$ 1ពិន្ទុ

គេទាញបាន $\widehat{EKO_1}=\widehat{IO_1O_2}=45^\circ$ (មុំត្រូវគ្នា)

ហើយ ΔEKO_1 និង ΔAKL ជាកែងសមបាត

ទាំងនេះ : $EK=EO_1=R_1$; $AK=AL$ #

(3) : $AK=h-R_1+R_1=h$

(2) : $S_2=\frac{1}{2}h^2$

គេបាន : $\frac{S_1}{S_2}=\frac{ah}{h^2}=\frac{a}{h}=\frac{a^2}{ah}=\frac{b^2+c^2}{bc}$ ព្រោះ : $a^2=b^2+c^2$; $ah=bc$

$=\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\geq 2$ នាំឲ្យ $\boxed{S_1\geq 2S_2}$ 15ពិន្ទុ

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

V (ពិន្ទុ 30)

- គេគាត់សំគាល់ថា : $T = 1$ មិនមែន $T = 2$ (ព្រោះ: $S+S$ អាចមិនគ្រប់ អាចត្រាទុកមិនលើស 1)

បើ $T = 2$ លុះត្រាតែ $S = E = 9$ ផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម (ស.ក. ... +9)

ដូចនេះ: $T = 1$ ទៅ

- ដើម្បីឲ្យ $T = 1$ លុះត្រាតែ $S \geq 5$

- បើ x ជាលេខត្រាទុក ពីខ្ទង់ដប់ទៅខ្ទង់រយ នោះគេបាន:

$2E + x = 10a + E$ ដែល $0 \leq E < 9$, $0 \leq a \leq 1$, $0 \leq x \leq 2$

$E = 10a - x$

. បើ $a = 0$ នោះ: $E = -x$ ផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម ($E = 0$ នោះ: គ្មានI ; $E < 0$)

. បើ $a = 1$ នោះ: $E = 10 - x$

+ បើ $x = 0$ នោះ: $E = 10$ មិនអាចបាន

+ បើ $x = 1$ នោះ: $E = 9$ មិនអាចបាន

+ បើ $x = 2$ នោះ: $E = 8$ ព្រោះពីខ្ទង់ដប់ទៅខ្ទង់រយត្រូវត្រាទុក 2

- ដោយ $E = 8$ នោះ: ត្រាទុកពីខ្ទង់ដប់ទៅខ្ទង់រយគឺ 1 ។

ម្យ៉ាងទៀត $S \geq 5$ (តាមសំរាយខាងលើ) ហើយ $S \neq 8$ និង $S \neq 9$

. បើ $S = 5$ នោះ: $S + S + 1 = 5 + 5 + 1 = 11$

គេបាន $W = 1$ ផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម ព្រោះ: $T = 1$ រួចហើយ ។

. បើ $S = 7$ នោះ: គេបាន :

ឧបមាញត្រូវ
ប្រើលាយ tâtonner

គោល 10

$V \geq 6$ ហើយ $V \neq 7$; $V \neq 8$; $V \neq 9$ គឺ $V = 6$

+ បើ $V = 6$ នោះ: $N = 0$; $N = 1$ (+1 ត្រាទុកខ្ទង់10)

ករណី $N = 1$ មិនអាចយកបានទេ ព្រោះ: $T = 1$ រួចហើយ

ករណី $N = 0$ នោះ: $X = Y$ មិនអាចយកបានទេ ព្រោះ: $X \neq Y$

នោះបញ្ជាក់ថា $S = 7$ មិនអាចយកបានទេ គឺ $S = 6$ 3pts

- ដោយ $S = 6$ នោះ: គេបាន $W = 3$ 3pts ព្រោះ: $6 + 6 + 1 = 13$

- ដោយ $S = 6$ និង $N \neq 0$ ដើម្បីកុំឲ្យ ... 2 ... ខ្ទង់ 3

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

(5)

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែប្រចាំរាជធានីភ្នំពេញ

ថ្ងៃទី ០១ - ៤ - ២០០៣

វិញ្ញាសាទី១: គណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១២ រយៈពេល ៣ម៉ោង

ហ៊ិត ស៊ីវុទ្ធ
និពន្ធ: គណិតវិទ្យា
TEL: 011 953 029

20P I ក) គេអោយចំនួន $A = \underbrace{11\ldots11}_{n+1 \text{ តួនៃ } 1}$ $B = \underbrace{11\ldots11}_{2n \text{ តួនៃ } 1}$ $C = \underbrace{66\ldots66}_{n \text{ តួនៃ } 6}$

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $A + B + C + 8$ ជាការេប្រាកដ ។

ខ) គណនាផលបូក $S = \sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}} + \ldots + \sqrt{1+\frac{1}{2002^2}+\frac{1}{2003^2}}$

20P II ក) គេអោយ a, b, c ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\begin{cases} a+b+c=0 \\ ab+bc+ca=0 \end{cases}$

គណនាតំលៃនៃកន្សោម $A = (a-1)^{2001} + b^{2002} + c^{2003}$

ខ) រក 11 ចំនួនមិនអវិជ្ជមាន ដែលចំនួននីមួយៗ ស្មើនឹងការេ នៃផលបូក 10 ចំនួនផ្សេងទៀត ។

10P III ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើផលគុណឫសមួយនៃសមីការ $x^2 + ax + 1 = 0$ ជាមួយឫសណាមួយនៃសមីការ $x^2 + bx + 1 = 0$ ជាឫសនៃសមីការ $x^2 + abx + 1 = 0$ នោះ $\frac{4}{a^2b^2} - \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 2$

10P IV យក a , b , c ជាប្រវែងជ្រុង និង A, B, C ជាមុំនៃត្រីកោណ ABC , S ជាក្រលាផ្ទៃត្រីកោណ ABC ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\cot A + \cot B + \cot C = \frac{a^2+b^2+c^2}{4S}$

10P V ស្រាយបញ្ជាក់ថាកន្សោម $10^n + 18n - 1$ ចែកដាច់នឹង 27 ចំពោះ n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ។

30P VI ក) គេអោយជ្រុងនៃការេ $ABCD$ មានរង្វាស់ស្មើ 1 ។ នៅលើ ជ្រុង $[AB]$, $[AD]$ គេដៅចំនុច P និង Q ដែលបរិមាត្រ ត្រីកោណ APQ ស្មើ 2 ។ គណនា មុំ $\widehat{PCQ}$

ខ) គេអោយចតុកោណប៉ោង $ABCD$ មានក្រលាផ្ទៃ S និងកន្លះបរិមាត្រ ស្មើ 2 ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $S \leq 1$ ។

កម្រងវិញ្ញាសាទី 1

1.ក. (ចូរបង្ហាញថា) $A+B+C+8$ (10)

ដំណោះស្រាយ:

$$A = \underbrace{111\ldots1}_{(n+1)\text{ខ្ទង់}} = \frac{99\ldots9}{9} = \frac{10^{n+1}-1}{9}$$

$$B = \underbrace{11\ldots11}_{2n\text{ខ្ទង់}} = 10^{2n-1}+10^{2n-2}+\cdots+10+1 = \frac{10^{2n}-1}{9}$$

$$C = \underbrace{66\ldots66}_{n\text{ខ្ទង់}6} = 6\cdot\frac{10^{n}-1}{9}$$

ដូចនេះ: $A+B+C+8$

$$= \frac{10^{n+1}-1}{9} + \frac{10^{2n}-1}{9} + 6\cdot\frac{10^{n}-1}{9} + 8$$

$$= \frac{10\cdot10^{n} + 10^{2n} + 6\cdot10^{n} - 8 + 72}{9}$$

$$= \frac{1}{9}\left(10^{2n} + 16\cdot10^{n} + 64\right)$$

$$= \frac{1}{9}\left(10^{n}+8\right)^{2}$$

$$= \left(\frac{10^{n}+8}{3}\right)^{2} = \underbrace{33\ldots3}_{(n-1)\text{ខ្ទង់}3}6^{2}.$$

(10) គណនាផលបូក:

$$S = \sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}} + \cdots + \sqrt{1+\frac{1}{2002^2}+\frac{1}{2003^2}}$$

គេបាន: $$S = \sum_{n=1}^{2002}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}$$

$$S = \sum_{n=1}^{2002}\sqrt{\frac{n^4+2n^3+n^2+n^2+2n+1+n^2}{n^2(n+1)^2}}$$

$$= \sum_{n=1}^{2002}\sqrt{\frac{n^4+2n^3+3n^2+2n+1}{n^2(n+1)^2}}$$

$$= \sum_{n=1}^{2002}\sqrt{\frac{(n^2+n+1)^2}{n^2(n+1)^2}}$$

$$= \sum_{n=1}^{2002}\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}$$

$$= \sum_{n=1}^{2002}\left(1+\frac{1}{n(n+1)}\right)$$

$$= 2002 + \sum_{n=1}^{2002}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 2002 + 1 - \frac{1}{2003}$$

$$\boxed{S = 2003 - \frac{1}{2003}} = \frac{2002\times2004}{2003}$$

20 II ក) គណនាតំលៃនៃ $A=(a-1)^{2001}+b^{2002}+c^{2003}$ (10)

ដឹងថា $a+b+c=0$; $ab+bc+ca=0$

នោះ: $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

នាំឲ្យ $a^2+b^2+c^2=0$

ឬ: $a=b=c=0$

ដូចនេះ: $A=(a-1)^{2001}+b^{2002}+c^{2003}$

$$\boxed{A=-1}$$

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

(10) តាង $x_1, x_2, \dots, x_{11}$ ជាឫសប្រព័ន្ធ

ដែលការេនៃផលបូក ១០ ចំនួនផ្សេងទៀត:

$x_1 = (x_2+x_3+\dots+x_{11})^2$

$x_2 = (x_1+x_3+\dots+x_{11})^2$

គេបាន $x_1 - x_2 = (x_2+x_3+\dots+x_{11})^2 - (x_1+x_3+\dots+x_{11})^2$

$= (x_2-x_1)(x_2+x_1+2x_3+\dots+2x_{11})$

$(x_1-x_2)(1+x_2+x_1+2x_3+\dots+2x_{11})=0$

$x_1 = x_2$

តាមដំរូវនេះ គេបាន:

$x_1 = x_2 = \dots = x_{11} = x$

នាំ: $x = (\underbrace{x+\dots+x}_{10\text{ដង}})^2$

$x = 100x^2$

គេបាន: $x=0$ ឬ $x=\frac{1}{100}$

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{1}{a^2b^2}-\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}=2$

តាង α, β រៀងគ្នាជាឫសសមីការ

$x^2+ax+1=0$ និង $x^2+bx+1=0$

ហើយ $\alpha\beta$ ជាឫសសមីការ

$x^2+abx+1=0$ នោះគេបាន

$\frac{1}{a^2b^2}-\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}=2$

គេមាន: $\alpha+\frac{1}{\alpha}=-a$ (1)

$\beta+\frac{1}{\beta}=-b$ (2)

$\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}=-ab$ (3)

(1) និង (2): $(\alpha+\frac{1}{\alpha})(\beta+\frac{1}{\beta})=ab$

$\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=ab$

ជំនួស (3) បាន $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=2ab$ (4)

ម្យ៉ាងទៀត: លើកជាការេ (1), (2)

$$\begin{cases}\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}=a^2-2\\ \beta^2+\frac{1}{\beta^2}=b^2-2\end{cases}$$

គុណអង្គ: $\alpha^2\beta^2+\frac{1}{\alpha^2\beta^2}+\frac{\alpha^2}{\beta^2}+\frac{\beta^2}{\alpha^2}=(a^2-2)(b^2-2)$

តែ (3): $(\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta})^2=a^2b^2$

$\alpha^2\beta^2+\frac{1}{\alpha^2\beta^2}=a^2b^2-2$

នាំអោយ $\frac{\alpha^2}{\beta^2}+\frac{\beta^2}{\alpha^2}=(a^2-2)(b^2-2)-a^2b^2+2$ (5)

តាម (4): $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=2ab$

$\frac{\alpha^2}{\beta^2}+\frac{\beta^2}{\alpha^2}=4a^2b^2-2$ (6)

(5) និង (6):

$4a^2b^2-2=(a^2-2)(b^2-2)-a^2b^2+2$

$4a^2b^2-2=a^2b^2-2a^2-2b^2+4-a^2b^2+2$

$4a^2b^2=8-2a^2-2b^2$

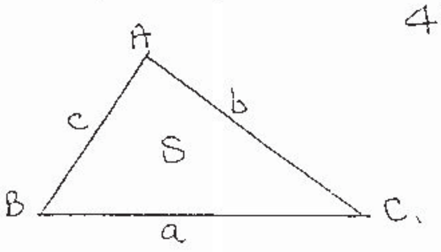
ចែកអង្គនឹង $2a^2b^2$

$2=\frac{4}{a^2b^2}-\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}$

www.pisethsok.wordpress.com

ស្រាយបញ្ជាក់ថា :

១) $\cot A + \cot B + \cot C = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{4S}$



តាម ទ្រឹស្តីបទ Sinus:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$= b^2 + c^2 - 4\cdot\frac{1}{2}bc\sin A\cdot\frac{\cos A}{\sin A}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 4S\cot A$

$b^2 = a^2 + c^2 - 4S\cot B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 4S\cot C$

ដូច : $a^2+b^2+c^2 = 2(a^2+b^2+c^2) - 4S(\cot A+\cot B+\cot C)$

យ: $4S(\cot A+\cot B+\cot C) = a^2+b^2+c^2$

$\cot A + \cot B + \cot C = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{4S}$

ស្រាយថា $10^n + 18n - 1$ ចែកដាច់នឹង 27

គ្រប់ n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ

ចំពោះ $n \geq 1$: យើងបាន:

$10^n - 1 + 18n$

$(10-1)(10^{n-1}+10^{n-2}+\dots+10+1)+18n$

$9(10^{n-1}+10^{n-2}+\dots+10+1+2n)$

$9(10^{n-1}+10^{n-2}+\dots+10+1-n+3n)$

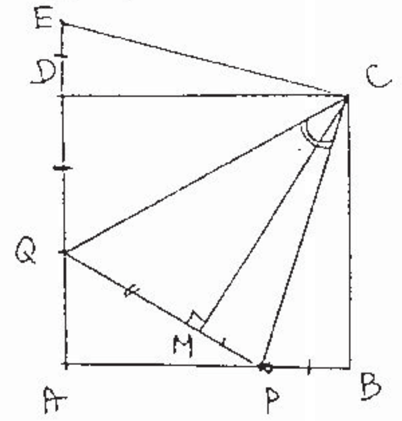
$9[(10^{n-1}-1)+(10^{n-2}-1)+\dots+(10-1)+(1-1)+3n]$

ដោយ $10^k - 1$ ចែកដាច់នឹង 3

$3n$ ចែកដាច់នឹង 3

ដូចនេះ : $10^n + 18n - 1$ ចែកដាច់នឹង 27

VI (10) ក)



គណនាមុំ $\widehat{PCQ}$

តាមសម្មតិកម្ម : $AQ + AP + PQ = 2$ (1)

និង $AQ + QD = 1$

$AP + PB = 1$

$AQ + QD + AP + PB = 2$ (2)

(1) និង (2): $PQ = PB + QD$

លើ (PQ) យកចំនុច M ដែល

$MP = PB$; $DQ = QM$

លើបន្លាយ [DA] យកចំនុច E ដែល

$DE = PB$

កាលណា: $\Delta PBC \cong \Delta CDE$

នាំអោយ $CP = CE$

ដូចនេះ: $\Delta CPQ \cong \Delta CQE$ (ករណីទី3

ទាញបាន $\widehat{CQD} = \widehat{CQM}$

នាំអោយ ΔCMQ កែងត្រង់ M

យើងបាន $\Delta CDQ \cong \Delta CMQ$,

$\Delta CMP \cong \Delta CPB$

នាំអោយ $\widehat{QCD} = \widehat{QCM}$; $\widehat{MCP} = \widehat{PCB}$

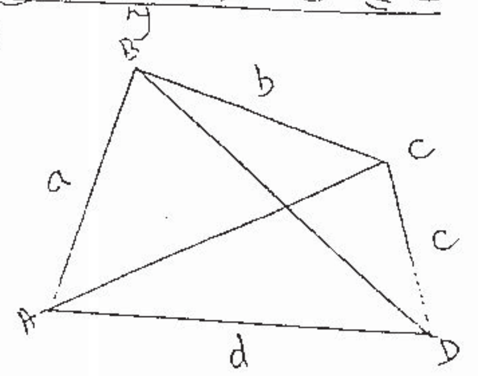
ឬ $\widehat{PCQ} = \dfrac{\widehat{C}}{2} = 45^\circ$

$\boxed{\widehat{PCQ} = 45^\circ}$

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

ម) (ស្រាយបញ្ជាក់ថា) $S \le 1$

(20)



តាង ABCD ជាចតុកោណប៉ោងមួយ

ដែល $AB = a$; $BC = b$; $CD = d$

$AD = d$ យើងបាន

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD}$$

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \hat{B} + \frac{1}{2} cd \sin \hat{D}$$

$$2S \le ab + cd \quad (1)$$

ដូចគ្នា $S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD}$

$$S = \frac{1}{2} ad \sin \hat{A} + \frac{1}{2} bc \sin \hat{C}$$

$$2S \le ad + bc \quad (2)$$

$(1)+(2)$: $4S \le (ab+cd) + (ad+bc)$

$$\le a(b+d) + c(b+d)$$

$$4S \le (a+c)(b+d)$$

តាម Cauchy : 2 ចំនួន $(a+c)$ និង $(b+d)$

$$4S \le (a+c)(b+d) \le \left(\frac{a+c+b+d}{2}\right)^2$$

$$\le 4$$

$$\boxed{S \le 1}$$ ($p = 2$)

www.pisethsok.wordpress.com

ហ៊ត ស៊ីកាត

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែប្រចាំរាជធានីភ្នំពេញ

ថ្ងៃទី ០១ - ៤ - ២០០៣

វិញ្ញាសាទី២: គណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១២ រយៈពេល ៣ម៉ោង

10P I រកគ្រប់បណ្តាឫស ជាចំនួនពិត នៃសមីការ $\sqrt{x+2002\sqrt{x+2002\sqrt{x+\ldots+2002\sqrt{x+2002\sqrt{2003x}}}}}=x$

(n រ៉ាឌីកាល់)

10P II គេអោយ $S = 1.2.3+2.3.4+3.4.5+\ldots+n(n+1)(n+2)$

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $4S+1$ ជាការេប្រាកដចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។

15P III គេអោយ n ជាចំនួនគត់សេស វិជ្ជមាន និង $n \geq 3$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះ គ្រប់ចំនួនពិត $x \neq 0$

គេបានជានិច្ច $(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!})(1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots-\frac{x^n}{n!}) < 1$

30P IV ក) គេអោយចតុកោណប៉ោង ABCD ។ អង្កត់ទ្រូងទាំងពីរនៃចតុកោណកាត់គ្នាត្រង់ P ។ ចំងាយពីចំនុច A, B, P ទៅបន្ទាត់ (CD) រៀងគ្នាស្មើ a, b, p ហើយ $CD = c$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $S_{ABCD} = \frac{1}{2p}abc$

ខ) តាមចំនុចមួយនៅក្នុងត្រីកោណ គូសបន្ទាត់ 3 ស្របជាមួយជ្រុងនៃត្រីកោណ ។ បន្ទាត់ទាំងនេះចែកត្រីកោណជា 6 ចំនែក ក្នុងនោះ មាន 3 ចំនែកជាត្រីកោណ ដោយក្រលាផ្ទៃ S_1, S_2, S_3 ។ គណនាក្រលាផ្ទៃត្រីកោណដែលអោយជាអនុគមន៍នៃ S_1, S_2, S_3 ។

15P V គេអោយស្វ៊ីត (U_n) ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\begin{cases} U_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ U_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\sqrt{1-U_n^2}} \quad ; n \geq 0 \end{cases}$

កំនត់កន្សោមនៃ U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

10P VI. ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម

ក) $(\cos 72^\circ)^x + (\cos 36^\circ)^x = 3 \cdot 2^{-x}$

ខ) $4^{x^2+x} + 2^{1-x^2} = 2^{(x+1)^2} + 1$

10P VII ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\underbrace{\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}}}_{n \text{ រ៉ាឌីកាល់}} + \underbrace{\sqrt[3]{30+\sqrt[3]{30+\sqrt[3]{30+\ldots+\sqrt[3]{30+\sqrt[3]{30}}}}}}_{n \text{ រ៉ាឌីកាល់}} < 9$

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

កំណែវិញ្ញាសាទី២

ការគ្រប់គ្រងដំណោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

ល.ខ. $x \geq 0$

តាង $y_1^2 = 2003x = x + 2002x$ (1)

$y_2^2 = x + 2002y_1$ (2)

$y_3^2 = x + 2002y_2$ (3)

- - -

$y_n^2 = x + 2002y_{n-1}$ (n)

នោះគេបាន: គ្រប់ $y_k \geq 0$ $(k = \overline{1,n})$

ដើម្បីការពិនិត្យការបានតាង $y_n = x$

យើងនឹងស្រាយថា $y_1 = x$

ឧបមាថា $x > y_1$

យក (1) − (2): $2002(x - y_1) > 0$

នោះ: $y_1 > y_2$ ដែលផ្ទុយនឹងសម្មតិកម្ម

ដូចគ្នា (2) និង (3); - - -

គេបាន: $y_2 > y_3 > \dots > y_n$

ដូចនេះ: $x > y_1$ នោះ $x > y_n$

ផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម $y_n = x$.

ស្រដៀង. បើ $x < y_1$ នោះ $x < y_n$

ផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម $y_n = x$.

តាមរយៈ $y_1^2 = 2003x$, $y_1 = x$ នោះ: $2003x = x^2$

$$\boxed{x = 0 \text{ ឬ } x = 2003}$$

(10)

II. $S = 1.2.3 + 2.3.4 + \dots + n(n+1)(n+2)$

ពិនិត្យ: $k(k+1)(k+2)$

$= \frac{1}{4}k(k+1)(k+2)[(k+3) - (k-1)]$

$= \frac{1}{4}k(k+1)(k+2)(k+3) - \frac{1}{4}(k-1)k(k+1)(k+2)$

បើ $k = 1$: $1.2.3 = \frac{1}{4}1.2.3.4 - 0$

$k = 2$: $2.3.4 = \frac{1}{4}2.3.4.5 - \frac{1}{4}1.2.3.4$

$k = 3$: $3.4.5 = \frac{1}{4}3.4.5.6 - \frac{1}{4}2.3.4.5$

⋮

$k = n$: $n(n+1)(n+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3) - \frac{1}{4}(n-1)n(n+1)(n+2)$

បូកអង្គ: $S = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$

នោះ $4S + 1 = n(n+1)(n+2)(n+3) + 1$

$= (n^2+3n)(n^2+3n+2) + 1$

$= [(n^2+3n)^2 + 2(n^2+3n) + 1]$

$$\boxed{4S + 1 = [n^2 + 3n + 1]^2}$$

VII (15) ស្រាយបញ្ជាក់ថា គ្រប់ចំនួនពិត $x \neq 0$

n ចំនួនគត់សេសវិជ្ជមាន $n \geq 3$

នោះ: $\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right)\left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \dots - \frac{x^n}{n!}\right)$

តាង $F(x) = f(x).g(x)$

យើងនឹងស្រាយថា $F(x) < 1$ គ្រប់ $x \in \mathbb{R}^*$

យក $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$

$f'(x) = 1 + x + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$

$f'(x) = f(x) - \frac{x^n}{n!}$

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

ឃើញ $g(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots - \frac{x^n}{n!}$

$g'(x) = -1 + x - \frac{x^2}{2!} + \cdots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$

$= -\left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \cdots - \frac{x^n}{n!}\right) - \frac{x^n}{n!}$

$= -g(x) - \frac{x^n}{n!}$

ដោយ: $F(x) = f(x)\cdot g(x)$

$F'(x) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

$= \left[f(x) - \frac{x^n}{n!}\right]g(x) + f(x)\left[-g(x) - \frac{x^n}{n!}\right]$

$= -\frac{x^n}{n!}g(x) - \frac{x^n}{n!}f(x)$

$= -\frac{x^n}{n!}\left[g(x) + f(x)\right]$

$= -\frac{x^n}{n!}2\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right)$

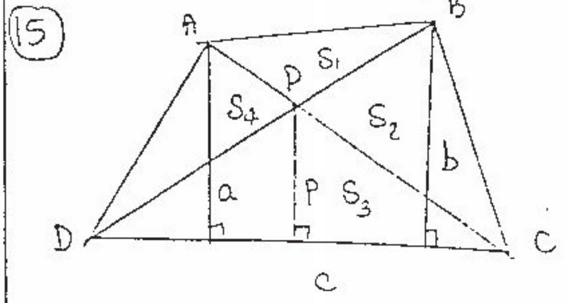
(n គត់សេស, $n > 3$)

$F'(x)$ មានសញ្ញាដូច $-\frac{x^n}{n!}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$F'(x)$	+	0	−
$F(x)$	↗	1	↘

ដូចនេះ $F(x) < 1$ គ្រប់ $x \neq 0$

ក.
(15)



(ស្រាយបញ្ជាក់ថា) $S_{ABCD} = \frac{1}{2p}abc$

តាង $S_{APB} = S_1$, $S_{BPC} = S_2$, $S_{CDP} = S_3$ និង $S_{APD} = S_4$ តាមលក្ខណៈយើងបាន:

$\frac{S_{APD}}{S_{CDP}} = \frac{S_3 + S_4}{S_3} = \frac{a}{p}$

$S_{BCD} = S_2 + S_3 = \frac{1}{2}bc$

គុណអង្គនឹងអង្គ: $\frac{(S_3+S_4)(S_2+S_3)}{S_3} = \frac{1}{2p}ab$

$\left(1 + \frac{S_4}{S_3}\right)(S_2+S_3) = \frac{1}{2p}abc$

$S_2 + S_3 + S_4 + \frac{S_2S_4}{S_3} = \frac{1}{2p}ab$

យើងនឹងស្រាយថា $\frac{S_2S_4}{S_3} = S_1$

គឺស្រាយថា: $\frac{S_4}{S_3} = \frac{S_1}{S_2}$

មាន $\frac{S_1}{S_2} = \frac{AP}{PC}$ (1)

$\frac{S_4}{S_3} = \frac{AP}{PC}$ (2)

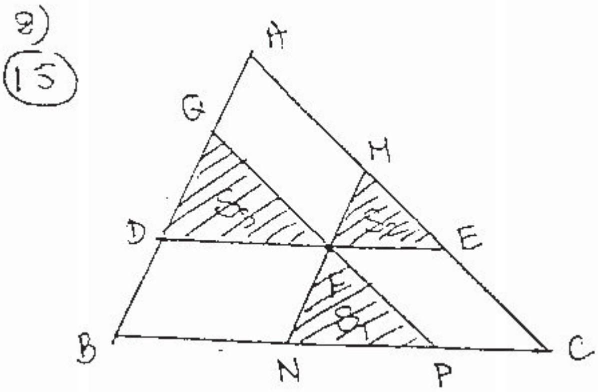
(1) និង (2) គេបាន $\frac{S_1}{S_2} = \frac{S_4}{S_3}$

ឬ $S_1 = \frac{S_2S_4}{S_3}$

(*) $S_2 + S_3 + S_4 + S_1 = \frac{1}{2p}abc$

ដូចនេះ: $S = \frac{1}{2p}abc$

ខ)
(15)



www.pisethsok.wordpress.com

ដោយ F ជាចំនុចក្នុង Δ ABC ដែលគូស បន្ទាត់ (DE) // (BC), (PG) // (CA) (MN) // (AB) ដោយ D, G ∈ [AB] M, E ∈ [AC] ; N, P ∈ [BC] ។ រួមមានត្រីកោណ : Δ ABC ; Δ FNP Δ MEF និង Δ DGF គឺ $S; S_1; S_2; S_3$ ហើយត្រីកោណទាំង 4 ដូចគ្នា ។

យើងបាន: $\frac{S_1}{S} = \left(\frac{NP}{BC}\right)^2$

ឬ $\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}} = \frac{NP}{BC}$

ដូចគ្នា: $\frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}} = \frac{EF}{BC} = \frac{PC}{BC}$

$\frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = \frac{DF}{BC} = \frac{BN}{BC}$

បូកអង្គ : $\frac{\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = \frac{NP+PC+BN}{BC} = \frac{BC}{BC} = 1$

នាំឱ្យបាន $\sqrt{S} = \sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}$

$$S = \left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}\right)^2$$

ស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ

$u_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$u_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\sqrt{1-u_n^2}}$; $n \geq 0$

កំណត់តួទូទៅ u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

គេ $u_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{2^2}$

$u_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\sqrt{1-u_0^2}}$

$u_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{2^2}}}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\sqrt{\cos^2\frac{\pi}{2^2}}}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\cos\frac{\pi}{2^2}}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2\sin^2\frac{\pi}{2^3}} = \sin\frac{\pi}{2^3}$

ឧបមា $u_k = \sin\frac{\pi}{2^{k+2}}$ (10)

នាំឱ្យ $u_{k+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{2^{k+2}}}}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\cos\frac{\pi}{2^{k+2}}}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2\sin^2\frac{\pi}{2^{k+3}}}$

$= \sin\frac{\pi}{2^{k+3}}$ ពិត (5)

តាមវិចារកំណើនគេបាន: $u_n = \sin\frac{\pi}{2^{n+2}}$

VI ដោះស្រាយសមីការ :

(5) ក) $(\cos72°)^x + (\cos36°)^x = 3\cdot2^{-x}$

គុណនឹង 2^x : $(2\cos72°)^x + (2\cos36°)^x = 3$ (1)

គេមាន : $2\cos72°\cdot2\cos36°$

$= \frac{2\sin36°\cos36°\cdot2\cos72°}{\sin36°}$

$= \frac{\sin72°\cdot2\cos72°}{\sin36°} = \frac{\sin144°}{\sin36°}$

$= \frac{\sin(180°-36°)}{\sin36°} = \frac{\sin36°}{\sin36°} = 1$

ហេតុនេះ: $(2\cos72°)^x\cdot(2\cos36°)^x = 1$ (2)

តាម (1) និង (2) , ប៉ុន្តែចំនួនទាំងពីរ $(2\cos72°)^x$ និង $(2\cos36°)^x$ ជាឫសសមីការ

$$t^2 - 3t + 1 = 0 \quad (3)$$

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

សមីការ (3) មានឫស $t_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

$t_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

គេស្គាល់ថា: $2\cos 72^\circ = 2\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

គេបាន $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$

$x = 2$

$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^x = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{-2}$

$x = -2$

ដូចនេះ: សមីការមានឫសពីរ $x = 2$, $x = -2$

ខ) $4^{x^2+x} + 2^{1-x^2} = 2^{(x+1)^2} + 1$

$2^{2(x^2+x)} + 2^{1-x^2} - 2^{(x+1)^2} - 1 = 0$

$2^{2(x^2+x)} + 2^{1-x^2} - 2^{2(x^2+x)} \cdot 2^{1-x^2} - 1 = 0$

$2^{2(x^2+x)}\left(1 - 2^{1-x^2}\right) - \left(1 - 2^{1-x^2}\right) = 0$

$\left(1 - 2^{1-x^2}\right)\left(2^{2(x^2+x)} - 1\right) = 0$

$1 - 2^{1-x^2} = 0$ នាំ: $1 - x^2 = 0$

$x = \pm 1$

$2^{2(x^2+x)} - 1 = 0$

$2(x^2+x) = 0$ ឬ $x = 0$

$x = -1$

ដូចនេះ: សមីការមានឫសបីគឺ:

$x = 0;\ x = -1;\ x = 1$

10) VII ស្រាយបញ្ជាក់ថា:

$\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots\sqrt{6}}} + \sqrt{30+\sqrt{30+\cdots+\sqrt{30}}}$

មាន

$\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots+\sqrt{6}}} < \sqrt{6+\sqrt{6+\cdots+\sqrt{9}}} < 3$

$\sqrt{30+\sqrt{30+\cdots+\sqrt{30}}} < \sqrt{30+\sqrt{30+\cdots+\sqrt{36}}} < 6$

ដូចនេះ:

$\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots+\sqrt{6}}} + \sqrt{30+\sqrt{30+\cdots+\sqrt{30}}} < 9$

www.pisethsok.wordpress.com
សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

(6)

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស

ផ្នែកអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា

ថ្នាក់ទី ៩ និងទី ១២ ឆ្នាំសិក្សា ២០០៣-២០០៤

សម័យប្រឡង: ១១-៥-០៤

វិញ្ញាសា គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២ លើកទី១ ថ្ងៃទី ១១-៥-០៤ (រយៈពេល ៣ ម៉ោង)

អធិការ គណិតវិទ្យា
TEL: 011 953 029

១-(ពិន្ទុ១០) គេចែកការេមួយដែលមានជ្រុងប្រវែង 3 ឯកតា ជា ៩ ក្រឡាប៉ុនៗគ្នា។
ចូរយកចំនួនគត់ពី 1 ដល់ 9 ទៅបំពេញក្នុងក្រឡាទាំង ៩ នោះដើម្បីអោយបានផលបូកចំនួនតាមជួរដេកនីមួយៗស្មើ 15 ផលបូកចំនួនតាមជួរឈរនីមួយៗស្មើ 15 ហើយផលបូកចំនួនតាមអង្កត់ទ្រូងនីមួយៗស្មើ 15 ដែលក្រឡានីមួយៗមានចំនួនគត់តែមួយគត់ហើយខុសៗគ្នា។

២-(ពិន្ទុ១០) កំនត់រិសធំបំផុតនៃសមីការ $x^{2004}+3x^{2002}-10x^{2000}=4x^{2003}-8x^{2001}$ នៅក្នុងសំនុំចំនួនពិត។

៣-(ពិន្ទុ១០) បង្ហាញថា $1^n+8^n-3^n-6^n$ ចែកដាច់នឹង 10 ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។

៤-(ពិន្ទុ១០) n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។ (u_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ហើយ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ :

$$u_{m+1}=v_{m+1}=a$$
$$u_{n+1}=v_{n+1}=b$$
$$u_{p+1}=v_{p+1}=c \quad \text{ដែល } a>0\,;\,b>0\,;\,c>0 \text{ ។}$$

បង្ហាញថា $(a^{b-c})(b^{c-a})(c^{a-b})=1$ ។

៥-(ពិន្ទុ១៥) បង្ហាញថា គ្មានចំនួនគត់ x ; y ; z ណាដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $x^2+y^2-8z=6$ ទេ។

៦-(ពិន្ទុ២០) អនុគមន៍ f កំនត់ដោយ $y=f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x^3-3x+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{2}}+\sqrt[3]{\dfrac{x^3-3x-(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{2}}$

គណនាតំលៃនៃ $f(\sqrt[4]{2004})$ ។

៧-(ពិន្ទុ២៥) M ជាចំនុចមួយស្ថិតនៅលើជ្រុង[AC]នៃត្រីកោណABC មួយដែលមានផ្ទៃក្រលា a^2 ។

r_1 និង r_2 ជាកាំរៀងគ្នានៃរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABM និងBCM ។

ក្នុងករណីដែល $r_1=r_2$ បង្ហាញថា $BM^2=a^2\cot\left(\dfrac{B}{2}\right)$ ។

(Bជារង្វាស់មុំក្នុងនៃត្រីកោណ ABC ត្រង់កំពូល B)

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

អត្រាកំរែគណិតវិទ្យា

វិញ្ញាសាទី១ សំរាប់ថ្ងៃទី ១១-៤-០៤

១-(ពិន្ទុ១០)

4	9	2
3	5	7
8	1	6

2	7	6
9	5	1
4	3	8

២-(ពិន្ទុ១០) កំនត់ឫសធំបំផុតនៃសមីការ :

គេបាន : $x^{2000}\left(x^4-4x^3+3x^2+8x-10\right)=0$ ពិន្ទុ2

$x^{2000}\left(x^4-4-4x^3+8x+3x^2-6\right)=0$

$x^{2000}\left[(x^2-2)(x^2+2)-4x(x^2-2)+3(x^2-2)\right]=0$ ពិន្ទុ4

$x^{2000}(x^2-2)(x^2-4x+5)=0$

$x^{2000}=0$ នោះ $x=0$

$x^2-2=0$ នោះ $x=\pm\sqrt{2}$

$x^2-4x+5=0$ មាន $\Delta'=-1$ ពិន្ទុ4

សមីការមានឫសធំបំផុត $x=\sqrt{2}$

៣-(ពិន្ទុ១០) បង្ហាញថា $1^n+8^n-3^n-6^n$ ចែកដាច់នឹង 10 :

តាង $S=1^n+8^n-3^n-6^n$

គេបាន $S=(1-3)(1+3+\cdots+3^{n-1})+(8-6)(8^{n-1}+8^{n-2}\cdot 6+\cdots+6^{n-1})$

$S=(-2)(1+3+\cdots+3^{n-1})+(2)(8^{n-1}+8^{n-2}\cdot 6+\cdots+6^{n-1})$

$S=2p\ ;p=-1-3-\cdots-3^{n-1}+8^{n-1}+8^{n-2}\cdot 6+\cdots+6^{n-1}$ ពិន្ទុ4

ដូចនេះ S ចែកដាច់នឹង 2 (1)

ម្យ៉ាងទៀត :

$S=(1^n-6^n)+(8^n-3^n)$

$S=(1-6)(1+6+\cdots+6^{n-1})+(8-3)(8^{n-1}+8^{n-2}\cdot 3+\cdots+3^{n-1})$

$S=(-5)(1+6+\cdots+6^{n-1})+(5)(8^{n-1}+8^{n-2}\cdot 3+\cdots+3^{n-1})$

$S=5q\ ;q=-1-6-\cdots-6^{n-1}+8^{n-1}+8^{n-2}\cdot 3+\cdots+3^{n-1}$ ពិន្ទុ3

ដូចនេះ S ចែកដាច់នឹង 5 (2)

តាម (1) និង (2) គេបាន $1^n+8^n-3^n-6^n$ ចែកដាច់នឹង 10 ពិន្ទុ3

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

៤-(ពិន្ទុ១០) បង្ហាញថា $(a^{b-c})(b^{c-a})(c^{a-b}) = 1$

គេមាន:

$a = u_1 + md = v_1 q^m$

$b = u_1 + nd = v_1 q^n$

$c = u_1 + pd = v_1 + q^p$ ពិន្ទុ3

$b - c = d(n-p)\ ;\ c - a = d(p-m)\ ;\ a - b = d(m-n)$

គេបាន : $(a^{b-c})(b^{c-a})(c^{a-b}) = (v_1 q^m)^{d(n-p)}(v_1 q^n)^{d(p-m)}(v_1 q^p)^{d(m-n)}$

$= (v_1^{d(n-p+p-m+m-n)})(q^{d(mn-mp+np-nm+mp-np)})$

$= (v_1^0)(q^0) = 1$

ដូចនេះ $\boxed{(a^{b-c})(b^{c-a})(c^{a-b}) = 1}$ ពិន្ទុ7

៥-(ពិន្ទុ១៥) បង្ហាញថាគ្មានចំនួនគត់ x, y, z ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $x^2 + y^2 - 8z = 6$ ទេ :

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ n គេបាន :

$n = 4a + r$ ដែល a ជាចំនួនគត់ និង $r = 0;1;2;3$

$n^2 = 8(2a^2 + r) + r^2 = 8b + r^2$ ដែល $b = 2a^2 + r$ ជាចំនួនគត់ហើយ $r^2 = 0;1;4;9$

នេះបញ្ជាក់ថា $n^2 = 8m + s$ ដែល m ជាចំនួនគត់ និង $s = 0;1;4$ ពិន្ទុ5

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $x\ ;\ y$ គេបាន :

$x^2 = 8p + s$ ដែល p ជាចំនួនគត់ និង $s = 0;1;4$

$y^2 = 8q + t$ ដែល q ជាចំនួនគត់ និង $t = 0;1;4$

$x^2 + y^2 = 8(p+q) + (s+t) = 8z + v$ ដែល $z = p + q$ ជាចំនួនគត់ និង $v = 0;1;2;4;5$ ពិន្ទុ5

បានន័យថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $x;y;z$ គេបាន :

$x^2 + y^2 - 8z = 0$

ឬ $x^2 + y^2 - 8z = 1$

ឬ $x^2 + y^2 - 8z = 2$

ឬ $x^2 + y^2 - 8z = 4$

ឬ $x^2 + y^2 - 8z = 5$

ដូចនេះ | គ្មានចំនួនគត់ x, y, z ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $x^2 + y^2 - 8z = 6$ ទេ | ពិន្ទុ5

៦-(ពិន្ទុ២០) គណនា $f(\sqrt[3]{2004})$:

តាង $A = \sqrt[3]{\dfrac{x^3 - 3x + (x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{2}}$ និង $B = \sqrt[3]{\dfrac{x^3 - 3x - (x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{2}}$

គេបាន : $A^3 + B^3 = x^3 - 3x$ ពិន្ទុ5

www.pisethsok.wordpress.com

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

តាង $A + B = y$

$$A \cdot B = \sqrt[3]{\frac{(x^3-3x)^2-(x^2-1)^2(x^2-4)}{4}} = \sqrt[3]{\frac{4}{4}} = 1$$

$y^3 = (A+B)^3$

$= A^3 + B^3 + 3AB(A+B)$

$y^3 = x^3 - 3x + 3y$

$y^3 - x^3 + 3x - 3y = 0$ ពិន្ទុ10

$(y-x)(y^2+xy+x^2-3) = 0$

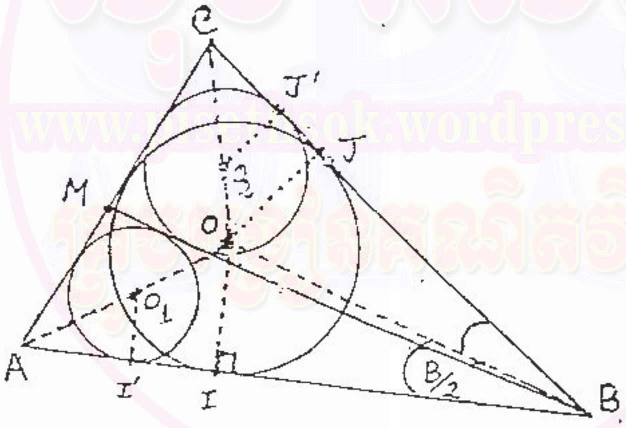
$y - x = 0$ គេបាន $y = x$

$y^2 + xy + x^2 - 3 = 0$ មាន $\Delta = -3x^2 + 12 < 0$ ព្រោះ $x = \sqrt[4]{2004}$ → ធំជាង និង 3

គេបាន $y = x = \sqrt[4]{2004}$

ដូចនេះ $\boxed{f(\sqrt[4]{2004}) = \sqrt[4]{2004}}$ ពិន្ទុ5

ឝ-(ពិន្ទុ២៥) បង្ហាញថា $BM^2 = a^2 \cot\left(\frac{B}{2}\right)$:



ពិន្ទុ5

តាង : s_1 និង p_1 ជាផ្ទៃក្រលា និង កន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណ ABM

s_2 និង p_2 ជាផ្ទៃក្រលា និង កន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណ MBC

s និង p ជាផ្ទៃក្រលា និង កន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណ ABC

r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង ΔABC

I និង I' ជាចំនុចប៉ះរវាង$[AB]$ជាមួយរង្វង់ចារឹកក្នុងΔABC និងΔABM

J និង J' ជាចំនុចប៉ះរវាង$[BC]$ជាមួយរង្វង់ចារឹកក្នុងΔABC និងΔMBC

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

គេបាន :

$s = pr$

$s_1 = p_1r_1$

$s_2 = p_2r_2$

$s = s_1 + s_2 = p_1r_1 + p_2r_2$

$pr = p_1r' + p_2r' = (p_1 + p_2)r'$ (1) ព្រោះ $r_1 = r_2 = r'$ ពិន្ទុ

ម្យ៉ាងទៀត : $2p_1 + 2p_2 = 2p + 2BM$ រឺ $p_1 + p_2 = p + BM$

(1) អាចសរសេរ : $pr = (p + BM)r'$ ហើយ $\frac{r'}{r} = \frac{p}{p+BM}$ (2)

$\Delta I'AO_1 \sim \Delta IAO$: $\frac{AI'}{AI} = \frac{r'}{r}$ ហើយ $\Delta J'CO_2 \sim \Delta JCO$: $\frac{CJ'}{CJ} = \frac{r'}{r}$ (3) ពិន្ទុ

ក្នុងត្រីកោណABC គេមាន $p = AI + BJ + JC = AI + BC$

នោះ $AI = p - BC$

ក្នុងត្រីកោណABC គេមាន $p = CJ + AI + IB = CJ + AB$

នោះ $CJ = p - AB$

តាមរបៀបដូចគ្នា :

ក្នុងត្រីកោណABM គេមាន $AI' = p_1 - BM$

ក្នុងត្រីកោណMBC គេមាន $CJ' = p_2 - BM$

(3) : $\frac{r'}{r} = \frac{p_1 - BM}{p - BC} = \frac{p_2 - BM}{p - AB} = \frac{p_1 + p_2 - 2BM}{2p - (BC + AB)}$

$\frac{r'}{r} = \frac{p + BM - 2BM}{AC}$ ព្រោះ $p_1 + p_2 = p + BM$ ហើយ $2p = AC + BC + AB$

$\frac{r'}{r} = \frac{p - BM}{AC}$ (4) ពិន្ទុ

តាម (2) និង (4) :

$\frac{p}{p+BM} = \frac{p - BM}{AC}$ នាំអោយ $p \cdot AC = p^2 - BM^2$

នាំអោយ $BM^2 = p(p - AC) = p \cdot BI$ (5) ព្រោះ $BI = p - AC$

ក្នុងត្រីកោណកែងIBO : $BI = r\cot \hat{OBI} = r\cot\left(\frac{B}{2}\right)$

(5) : $MB^2 = (pr)\cot\left(\frac{B}{2}\right) = a^2\cot\left(\frac{B}{2}\right)$ ព្រោះ $a^2 = pr$

ដូចនេះ

$$\boxed{BM^2 = a^2\cot\left(\frac{B}{2}\right)}$$

ពិន្ទុ

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស

ផ្នែកអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា

ថ្នាក់ទី ៩ និងទី ១២ ឆ្នាំសិក្សា ២០០៣-២០០៤

សម័យប្រឡង: ១១-៥-០៤

វិញ្ញាសា គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២ លើកទី២ ថ្ងៃទី ១៣-៥-០៤ (រយៈពេល ៣ ម៉ោង)

១-(ពិន្ទុ១០) នារី សុខ និង សៅ ជាបេក្ខជនសិស្សពូកែថ្នាក់ទី១២លើមុខវិជ្ជាផ្សេង១គ្នា (គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា និង ភាសាខ្មែរ)។

(1): បើនារី ប្រលងគណិតវិទ្យា នោះ សុខ ប្រលងរូបវិទ្យា។

(2): បើនារី ប្រលងភាសាខ្មែរ នោះ សៅ ប្រលងរូបវិទ្យា។

(3): បើ សុខ មិនប្រលងភាសាខ្មែរ នោះ សៅ ប្រលងគណិតវិទ្យា ។

តើបេក្ខជនណាប្រលងមុខវិជ្ជាណា ?

២-(ពិន្ទុ១៥)ចូរបំពេញលេខអោយបានសមស្របត្រង់សញ្ញា * ក្នុងការគណនាផលគុណរវាងពីរចំនួន ដែលនៅខាងស្តាំនេះដោយបកស្រាយពន្យល់ផង។

```
       * * *
     × * 2 *
     -------
       * * *
   * * * *
   * 8 *
  ---------
 * * 9 * 2 *
```

៣-(ពិន្ទុ១៥) (x_n) ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនដែលកំនត់ដោយ: $x_1 = 2003, x_2 = 2004$ និង $x_{n+1} = x_n(x_n - 1) + 2$ ចំពោះ $n \geq 2$

បង្ហាញថា $(x_1^2+1)(x_2^2+1)\dots(x_{2004}^2+1) - 1 = (x_{2005} - 1)^2$ ។

៤-(ពិន្ទុ១៥) a, b, c, d ជាបួនចំនួនគត់ដែលចែកមិនដាច់នឹង 5 ។

m ជាចំនួនគត់មួយដែលធ្វើអោយ $am^3 + bm^2 + cm + d$ ចែកដាច់នឹង 5 ។

បង្ហាញថា មានចំនួនគត់ n ដែលធ្វើអោយ $dn^3 + cn^2 + bn + a$ ចែកដាច់នឹង 5 ដែរ ។

៥-(ពិន្ទុ២០) $a_1, a_2, \dots, a_n$ និង $b_1, b_2, \dots, b_n$ ជាចំនួនពិត ។

ក-បង្ហាញថា $(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$

បញ្ជាក់ថាវិសមភាពខាងលើក្លាយជាសមភាពកាលណា $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$ ។

ខ-ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការដែលមានអញ្ញាត $x_1, x_2, \dots, x_{2004}$:

$$\begin{cases} \sqrt{1+x_1} + \sqrt{1+x_2} + \cdots + \sqrt{1+x_{2004}} = 2004\sqrt{\frac{2005}{2004}} & (1) \\ \sqrt{1-x_1} + \sqrt{1-x_2} + \cdots + \sqrt{1-x_{2004}} = 2004\sqrt{\frac{2003}{2004}} & (2) \end{cases}$$

៦-(ពិន្ទុ២៥) រង្វង់ពីរមានកាំ R និង r $(R > r)$ មានផ្ចិតរួម O ហើយស្ថិតក្នុងប្លង់តែមួយ។ M ជាចំនុចនឹងនៅលើរង្វង់តូច ហើយ B ជាចំនុចចល័តលើរង្វង់ធំ។ បន្ទាត់ (BM) ជួបរង្វង់ធំម្តងទៀតត្រង់ចំនុច C ។ បន្ទាត់ (L) កែងនឹង (BM) ត្រង់ M ។ បន្ទាត់ (L) ជួបរង្វង់តូច ម្តងទៀតត្រង់ A ។

ក-គណនា ផលបូក $S = BC^2 + CA^2 + AB^2$ ជាអនុគមន៍នៃ R និង r ។

ខ-យក I ជាចំនុចកណ្តាលនៃ $[AB]$ ។ កំនត់សំណុំនៃចំនុច I ។

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

ទិញ្ញសាទិ២ សំរាប់ថ្ងៃទី ១៣.៤.០៤

១-(ពិន្ទុ១០) -បើ នារី ប្រលង គណិតវិទ្យា នោះ សុខ ប្រលង រូបវិទ្យា (តាម(1))

តាម(3) គេបាន សៅ ប្រលង គណិតវិទ្យា ព្រោះសុខមិនប្រលងភាសាខ្មែរ ។ (1p)

គេបាន នារី និង សៅ ប្រលង គណិតវិទ្យាតែមួយ ដែលជាករណីមិនអាចមាន ។ + (2p)

ដូចនេះ នារីមិនប្រលងគណិតវិទ្យាទេ ។ = ពិន្ទុ3

-បើនារីប្រលងភាសាខ្មែរ នោះ សៅប្រលងរូបវិទ្យា (តាម(2)) ។

ក្នុងករណីនេះ សុខត្រូវប្រលងគណិតវិទ្យា (គឺមិនប្រលងភាសាខ្មែរទេ) ហើយបណ្តាលអោយសៅប្រលង 1p

គណិតវិទ្យាដែរ (តាម(3)) ។ គេបាន សុខ និង សៅ ប្រលង គណិតវិទ្យាតែមួយ ដែលជាករណីមិនអាចមាន ។ 2p

ដូចនេះ នារីមិនប្រលងភាសាខ្មែរទេ គឺ នារីច្បាស់ជាប្រលង រូបវិទ្យា ។ = ពិន្ទុ3

-បើសុខមិនប្រលងភាសាខ្មែរ គឺសុខប្រលងគណិតវិទ្យា (ព្រោះសល់តែខ្មែរនិងគណិត) ។ 1p

តែតាម(3) គេបាន សៅ ប្រលងគណិតវិទ្យាដែរ ជាករណីមិនអាចមាន ។ដូចនេះ សុខប្រលងភាសាខ្មែរ ។ 1p

សរុបមកគេបាន :

នារីប្រលង រូបវិទ្យា សុខប្រលងភាសាខ្មែរ ហើយ សៅប្រលង គណិតវិទ្យា

2p = ពិន្ទុ4

២-(ពិន្ទុ១៥)

-ដោយ $2\times***$ នៃតំនាងគុណ បានចំនួនដែលមានលេខបួនខ្ទង់ ហើយ(*) ទៅតួគុណ គុណនឹង * * *

ទៅតំនាងគុណ បានចំនួនដែលមានលេខបីខ្ទង់ នោះ(*) = 1 ។ គេបានតួគុណ = 121 ។ {2, 1, 2} = ពិន្ទុ5

-ដោយ 1 ទៅខ្ទង់រយនៃតួគុណ គុណនឹង(*) ទៅខ្ទង់ដប់នៃតំនាងគុណ បានលទ្ធផល 8 នោះ (*) = 8 ។ ពិន្ទុ2

-ដោយផលគុណមានលេខខ្ទង់ដប់ស្មើ 2 នោះ(*) ទៅខ្ទង់ឯកតា នៃតំនាងគុណត្រូវស្មើ 7 ។ ពិន្ទុ2

-ដោយ 2 គុណនឹង (*) ទៅខ្ទង់រយនៃតំនាងគុណ បានចំនួនមានលេខពីរខ្ទង់ ហើយខ្ទង់ឯកតាត្រូវបូកនឹង 8 ផង បូកនឹងលេខដែលត្រាទុកផងដើម្បីអោយបាន 9 នោះ(*) = 9 (គេសាកចាប់ពី 5 ដល់ 9) ។ ពិន្ទុ2

ដូចនេះគេបាន :

$$
\begin{array}{r}
987 \\
\times\ 121 \\
\hline
987 \\
1974 \\
987 \\
\hline
119427
\end{array}
$$

ពិន្ទុ4

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

៣-(ពិន្ទុ១៥) បង្ហាញថា $(x_1^2+1)(x_2^2+1)\cdots(x_{2004}^2+1)-1=(x_{2005}-1)^2$

តាង $S_n=(x_1^2+1)(x_2^2+1)\cdots(x_n^2+1)-1$

គេនឹងបង្ហាញថា $S_n=(x_{n+1}-1)^2$ ពិន្ទុ2

-ចំពោះ $n=1$ គេបាន $S_1=(x_1^2+1)-1=(2003)^2=(2004-1)^2=(x_2-1)^2$: ពិត

-ឧបមាថាទំនាក់ទំនងពិតដល់ $n=p$: $S_p=(x_{p+1}-1)^2$ ពិន្ទុ3

-ពិនិត្យចំពោះ $n=p+1$:

$S_{p+1}=(x_1^2+1)(x_2^2+1)\cdots(x_{p+1}^2+1)-1=\left[(x_1^2+1)(x_2^2+1)\cdots(x_p^2+1)-1+1\right](x_{p+1}^2+1)-1$ ពិន្ទុ2

$=\left[S_p+1\right](x_{p+1}^2+1)-1=\left[(x_{p+1}-1)^2+1\right](x_{p+1}^2+1)-1$

$=\left[(x_{p+1}^2+1)-2x_{p+1}+1\right](x_{p+1}^2+1)-1$ ពិន្ទុ2

$=\left[(x_{p+1}^2+1)^2-2x_{p+1}(x_{p+1}^2+1)+(x_{p+1}^2+1)\right]-1$

$=\left[(x_{p+1}^2+1)-x_{p+1}\right]^2=\left[x_{p+1}(x_{p+1}-1)+2-1\right]^2=(x_{p+2}-1)^2$

$S_{p+1}=(x_{p+2}-1)^2$: ទំនាក់ទំនងពិតចំពោះ $n=p+1$ ពិន្ទុ4

ដូចនេះ $S_n=(x_{n+1}-1)^2$ ចំពោះគ្រប់ n ; $n\geq 1$ ។

ដោយយក $n=2004$ គេបាន $\boxed{(x_1^2+1)(x_2^2+1)\cdots(x_{2004}^2+1)-1=(x_{2005}-1)^2}$ ពិន្ទុ2

៤-(ពិន្ទុ១៥) បង្ហាញថាមានចំនួនគត់ $n: dn^3+cn^2+bn+a$ ចែកដាច់នឹង 5 :

តាង : $A=am^3+bm^2+cm+d$

$B=dn^3+cn^2+bn+a$

A ចែកដាច់នឹង 5 តែ d ចែកមិនដាច់នឹង 5 នោះ am^3+bm^2+cm ចែកមិនដាច់នឹង 5 (2p)

ដោយ $am^3+bm^2+cm=m(am^2+bm+c)$ ចែកមិនដាច់នឹង 5 នោះគេបាន m ចែកមិនដាច់នឹង 5 ។

គេបាន $m=5q+r$ ដែល q ជាចំនួនគត់ ហើយ $r=1;2;3;4$ ។ (2p) = ពិន្ទុ4

គេសិក្សា $An^3-B=am^3n^3+bm^2n^3+cmn^3-cn^2-bn-a$ (2p)

$=a(m^3n^3-1)+bn(m^2n^2-1)+cn^2(mn-1)$

$=(mn-1)(am^2n^2+amn+a+bmn^2+bn+cn^2)$

$B=An^3-(mn-1)(am^2n^2+amn+a+bmn^2+bn+cn^2)$ (2p) = ពិន្ទុ4

ដើម្បីអោយ B ចែកដាច់នឹង 5 គេគ្រាន់តែជ្រើសរើសចំនួនគត់ n ដែលធ្វើអោយ $mn-1$ ចែកដាច់នឹង 5 ។

បើ $m=5q+r$; $n=5p+s$ នោះគេបាន $mn-1=5k+rs-1$ ដែល $k=5pq+qs+pr$ (2p)

ដើម្បីអោយ $mn-1$ ចែកដាច់នឹង 5 លុះត្រាតែ $rs-1$ ចែកដាច់នឹង 5 ។ (1p) = ពិន្ទុ3

ដោយ $1\leq r\leq 4$ នោះគេអាចរក s បាន តាមរបៀបដូចខាងក្រោម :

បើ $r=1$ នោះ $s=1$; $n=5p+1$ ដែល p ជាចំនួនគត់ (1p)

បើ $r=2$ នោះ $s=3$; $n=5p+3$ ដែល p ជាចំនួនគត់ (1p)

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

បើ $r = 3$ នោះ $s = 2$; $n = 5p + 2$ ដែល p ជាចំនួនគត់ (1p)

បើ $r = 4$ នោះ $s = 4$; $n = 5p + 4$ ដែល p ជាចំនួនគត់ (1p)

ដូចនេះ **គេអាចរកបាន n ដែលធ្វើអោយ B ចែកដាច់នឹង 5** = ពិន្ទុ4

៥-(ពិន្ទុ២០) ក-បង្ហាញថា $(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$

-បើ $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ នោះគេបាន $0 \le 0$: ពិត (1p)

-បើមាន $a_i \ne 0$ នោះ $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 > 0$ ហើយគេមាន :

$(a_1x + b_1)^2 = a_1^2x^2 + 2a_1b_1x + b_1^2 \ge 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$(a_2x + b_2)^2 = a_2^2x^2 + 2a_2b_2x + b_2^2 \ge 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$(a_nx + b_n)^2 = a_n^2x^2 + 2a_nb_nx + b_n^2 \ge 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (2p) = ពិន្ទុ3

បូកអង្គនិងអង្គ :

$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)x^2 + 2(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)x + (b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \ge 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (2)

លុះត្រាតែ :

$\Delta' = (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 - (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \le 0$ (3)

ដូចនេះ $\boxed{(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)}$ = ពិន្ទុ5

-កាលណា $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \cdots = \dfrac{a_n}{b_n} = t$ គេបាន :

$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 = t^2(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)^2$ (i) (1p)

$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) = t^2(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)^2$ (ii) (1p)

តាម(i)និង(ii) :

$\boxed{(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 = (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)}$ = ពិន្ទុ2

ខ-ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ :

ដែនកំណត់ : $-1 \le x_i \le 1$, $i = 1, 2, \ldots, 2004$

(1) សមមូល $(\sqrt{1+x_1} + \sqrt{1+x_2} + \cdots + \sqrt{1+x_{2004}})^2 = (2004)(2005)$ (1p)

$(\sqrt{1+x_1} + \sqrt{1+x_2} + \cdots + \sqrt{1+x_{2004}})^2 \le (1 + 1 + \cdots + 1)(1 + x_1 + 1 + x_2 + \cdots + 1 + x_{2004})$ (1p)

$(\sqrt{1+x_1} + \sqrt{1+x_2} + \cdots + \sqrt{1+x_{2004}})^2 \le (2004)(2004 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{2004})$

$(2004)(2005) \le (2004)(2004 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{2004})$

$1 \le x_1 + x_2 + \cdots + x_{2004}$ (3) (1p) = ពិន្ទុ3

(2) សមមូល $(\sqrt{1-x_1} + \sqrt{1-x_2} + \cdots + \sqrt{1-x_{2004}})^2 = (2004)(2003)$ (1p)

$(\sqrt{1-x_1} + \sqrt{1-x_2} + \cdots + \sqrt{1-x_{2004}})^2 \le (2004)(2004 - x_1 - x_2 - \cdots - x_{2004})$

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

$(2004)(2003) \le (2004)(2004 - x_1 - x_2 - \cdots - x_{2004})$ (1p)

$x_1 + x_2 + \cdots + x_{2004} \le 1$ (4) (1p) = ៦ពិន្ទុ

តាម (3) និង (4) : $x_1 + x_2 + \cdots + x_{2004} = 1$ (5) (1p)

វិសមភាពក្លាយជាសមភាព នោះគេបាន : $\sqrt{1+x_1} = \sqrt{1+x_2} = \cdots = \sqrt{1+x_{2004}}$ (1p)

ហើយ $x_1 = x_2 = \cdots = x_{2004}$ (1p)

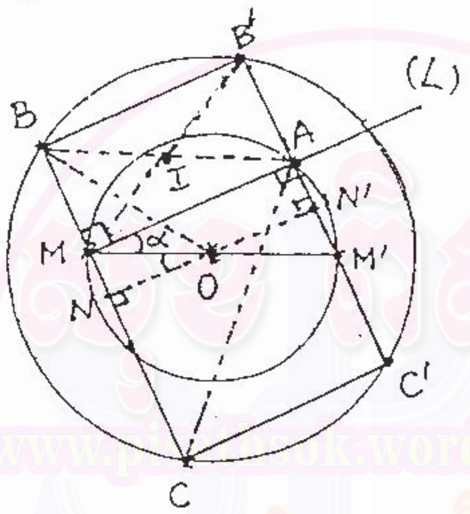
(5) អាចសរសេរ : $2004x_1 = 1$ ហើយ $x_1 = \dfrac{1}{2004}$ (1p)

ដូចនេះ

$$\boxed{x_1 = x_2 = \cdots = x_{2004} = \frac{1}{2004}}$$

= ៤ពិន្ទុ

៦-(ពិន្ទុ២៥)ក -គណនាផលបូក S :



ត្រូវតាមលម្អិតបម=៥ពិន្ទុ

តាម : [MM'] ជាអង្កត់ផ្ចិតរង្វង់តូច ។ $\widehat{OMA} = \alpha$ ហើយ N ជាចំនុចកណ្ដាលនៃ [BC] ។ (2p)

គេបាន $S = BC^2 + CA^2 + AB^2 = (BM + MC)^2 + (MC^2 + MA^2) + (MB^2 + MA^2)$ (1p)

$S = 2(MA^2 + MB^2 + MC^2 + MB \cdot MC)$ (1) = ពិន្ទុ3

-ក្នុងត្រីកោណកែង AMM' : $MA = 2r\cos\alpha$ (1p)

-ក្នុងត្រីកោណកែង NOB & NOM : $ON = r\cos\alpha$; $MN = r\sin\alpha$ (1p)

$MB = NB - NM = \sqrt{R^2 - r^2\cos^2\alpha} - r\sin\alpha$ (1p) = ពិន្ទុ3

- ម្យ៉ាងទៀត $MC = MN + NC = MN + BN = r\sin\alpha + \sqrt{R^2 - r^2\cos^2\alpha}$ (2p)

-គេបាន $MB \cdot MC = R^2 - r^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = R^2 - r^2$ (1p) ពិន្ទុ3

(1) អាចសរសេរ :

$$S = 2\left[4r^2\cos^2\alpha + (\sqrt{R^2 - r^2\cos^2\alpha} - r\sin\alpha)^2 + (r\sin\alpha + \sqrt{R^2 - r^2\cos^2\alpha})^2 + R^2 - r^2\right]$$ (2p)

$$S = 2\left[4r^2\cos^2\alpha + 2(R^2 - r^2\cos^2\alpha) + 2r^2\sin^2\alpha + R^2 - r^2\right]$$ (2p)

$$\boxed{S = 6R^2 + 2r^2}$$

= ពិន្ទុ4

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

(7)

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែប្រចាំរាជធានីភ្នំពេញ

ថ្ងៃទី ០១ - ៤ - ២០០៤

វិញ្ញាសាទី១: គណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១២ រយៈពេល ៣ម៉ោង

ហ៊ត_ស៊ីអាត
អធិការ គណិតវិទ្យា
TEL: 011 953 029

(១៥ពិន្ទុ) ១- ក) ចូរប្រៀបធៀបចំនួន $(2004!)^2$ និង 2004^{2004}

ខ) ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំពោះគ្រប់ $n \in N$, $n! \le \left(\frac{1+n}{2}\right)^n$

(២០ពិន្ទុ) ២- យក I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABC ។ R និង r គឺជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅ និង រង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណ ABC ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា:

ក) $r = 4R.\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$

ខ) $IA.IB.IC = 4R.r^2$

(១០ពិន្ទុ) ៣- ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំនួន $A = 11\ldots122\ldots2$ មាន 2004 ខ្ទង់នៃលេខ 1 និង 2004 នៃលេខ 2 ជាផលគុណនៃ ពីរចំនួនគត់តគ្នា ។

(១០ពិន្ទុ) ៤-ចូរប្រៀបធៀបចំនួន $A = 4\tan 5^\circ.\tan 9^\circ$ និង $B = 3\tan 6^\circ.\tan 10^\circ$

(២០ពិន្ទុ) ៥-គេអោយពហុកោណនិយ័ត $A_1A_2A_3\ldots A_{4n}$ ចារឹកក្នុងរង្វង់ (O) ។ ដោយដឹងថា ចំនួនចតុកោណដែលមានកំពូលទាំងបួនផ្គុំដោយកំពូលនៃពហុកោណនិយ័តមាន $\frac{65}{4}$ ដងផលគុណនៃចំនួនការេ និង ចំនួនចតុកោណកែងដែលមានកំពូលផ្គុំដោយកំពូលនៃពហុកោណនិយ័ត ។ គណនា ផលបូក

$$S = C_{2004n}^{0} + C_{2004n}^{2}3^2 + C_{2004n}^{4}3^4 + \ldots + C_{2004n}^{2004n}3^{2004n}$$

(១៥ពិន្ទុ) ៦- ក) រកអនុគមន៍ កំនត់ដោយ $f\left(\frac{x+1}{x-2}\right) + 2f\left(\frac{x-2}{x+1}\right) = x$

ខ) រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង (C) នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ដែល $f(2x) = 4\cos x.f(x) - 2x$ ត្រង់ចំនុចមានអាប់ស៊ីសស្មើ 0 ។

(១០ពិន្ទុ) ៧- ស្រាយបញ្ជាក់ថា គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n នោះចំនួន $\frac{n^5}{5} + \frac{n^3}{3} + \frac{7n}{15}$ ជាចំនួនគត់ ។

www.pisethsok.wordpress.com
សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

កំណែវិញ្ញាសាទី1

① ក) ប្រៀបធៀបចំនួន $(2004!)^2$ និង 2004^{2004}

ពិនិត្យ $(n!)^2 = [1.2.3\ldots(n-1)n]^2$

$= (1.n)[2(n-1)]\ldots[(n-1)2].(n.1)$

ដោយ $1.n \geq n$

$2(n-1) \geq n$

$\vdots$

$n.1 \geq n$

គុណអង្គនិងអង្គ $(n!)^2 \geq n^n$

បើ $n=2004$ នោះ: $(2004!)^2 > 2004^{2004}$

2) ស្រាយបញ្ជាក់ថា គ្រប់ $n \in IN$

$$n! \leq \left(\frac{1+n}{2}\right)^n$$

តាម cauchy 2 តួ:

$1+n \geq 2\sqrt{1.n}$

$2+(n-1) \geq 2\sqrt{2(n-1)}$

$\vdots$

$n+1 \geq 2\sqrt{n.1}$

គុណអង្គនិងអង្គ: $(n+1)^n \geq 2^n\sqrt{(n!)^2}$

$$n! \leq \left(\frac{1+n}{2}\right)^n$$

② ក) ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$r = 4R.\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$$

ដោយផ្ទៃ $S = pr = \dfrac{abc}{4R}$

$\Rightarrow \quad r = \dfrac{abc}{4pR}$

ដែល $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$

នោះ: $r = \dfrac{abc}{2R(a+b+c)} \quad (1)$

តាមទ្រឹស្តីបទ ស៊ីនុស: $a = 2R\sin A$

$b = 2R\sin B$

$c = 2R\sin C$

ពី(1): $r = \dfrac{2R\sin A.2R\sin B.2R\sin C}{2R.2R(\sin A+\sin B+\sin C)}$

$r = \dfrac{2R\sin A.\sin B.\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C} \quad (2)$

មាន $\sin A + \sin B + \sin C$

$= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \sin(A+B)$

$= 2\sin\frac{A+B}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right]$

$= 2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)\left[2\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}\right]$

$= 4\cos\frac{C}{2}.\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}$

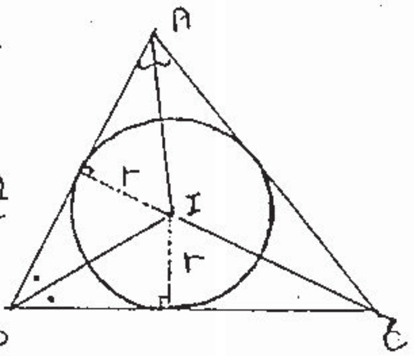
តាម(2):

$r = \dfrac{2R.2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}2\sin\frac{C}{2}\ldots}{4\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}}$

$$r = 4R\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$$

2) ស្រាយថា $IA.IB.IC = 4Rr^2$

តាមរូបខាងស្តាំ:



$\sin\frac{A}{2} = \dfrac{r}{IA}$

$\Rightarrow r = IA.\sin\frac{A}{2}$

ដូចគ្នា:

$r = IB.\sin\frac{B}{2}$

$r = IC\sin\frac{C}{2}$

នោះ: $r^3 = IA.IB.IC.\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}.\sin\ldots$

តាមសំរាយ(ក) $IA.IB.IC = 4Rr^2$

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

ក. កំពូល 4 ពីចំណោម 4n កំពូលរបស់ពហុកោណនិយ័ត យើងបានចតុកោណមួយ

ចំនួនចតុកោណ $C_{4n}^4 = \dfrac{(4n)!}{(4n-4)!\,4!}$

$$C_{4n}^4 = \frac{(4n-3)(4n-2)(4n-1)4n}{4!}$$

$$= \frac{(4n-3).2(2n-1)(4n-1)4n}{1.2.3.4}$$

$$= \frac{1}{3}(4n-3)(2n-1)(4n-1)n$$

ដោយចតុកោណកែងជាពហុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់ មានអង្កត់ទ្រូងជាអង្កត់ផ្ចិត នោះយើងយក កំពូល 2 ក្នុងចំណោម (2n) កំពូល បង្កើតបានចតុកោណកែងមួយ :

ចំនួនចតុកោណកែង :

$$C_{2n}^2 = \frac{(2n)!}{(2n-2)!\,2!} = (2n-1)n$$

ចំពោះចតុកោណកែងនីមួយៗ ការេ មានអង្កត់(ទ្រូង)កែងគ្នា នោះកំពូល មួយទៀតក្នុង n កំពូលនៃ $\frac{1}{4}$ រង្វង់ បង្កើតបានការេមួយ .

ចំនួនការេ : $C_n^1 = n$

តាមសម្មតិកម្ម : $C_{4n}^4 = \dfrac{65}{4}.C_n^1.C_{2n}^2$

$$\frac{1}{3}(4n-3)(2n-1)(4n-1)n = \frac{65}{4}n^2(2n-1)$$

$$4(4n-3)(4n-1) = 3n.65$$

$$64n^2 - 64n + 12 = 195n$$

$$64n^2 - 259n + 12 = 0$$

នោះដំណោះស្រាយគឺ . $n = 4$

មាន $4^{2004n} = (1+3)^{2004n}$

$$= C_{2004n}^0 + C_{2004n}^1.3^1 + C_{2004n}^2.3^2 + \dots + C_{2004n}^{2004n}.3^{2004n}$$

ហើយ $2^{2004n} = (1-3)^{2004n}$

$$= C_{2004n}^0 - C_{2004n}^1.3^1 + C_{2004n}^2.3^2 - \dots + C_{2004n}^{2004n}.3^{2004n}$$

នាំអោយ $4^{2004n} + 2^{2004n} = 2S$

$$2^{2004n}(2^{2004n}+1) = 2S$$

$$S = 2^{2004n-1}.(2^{2004n}+1)$$

ចំពោះ $n = 4$ គេបាន :

$$\boxed{S = 2^{8015}(2^{8016}+1)}$$

⑥ ក) ការកំណត់ $f(x)$

មាន $f\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right) + 2f\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right) = x$

តាង $t = \dfrac{x-2}{x+1}$ នោះ: $tx + t = x - 2$

$$x = \frac{t+2}{1-t}$$

នាំអោយ $f\left(\dfrac{1}{t}\right) + 2f(t) = \dfrac{t+2}{1-t}$ (1)

ជំនួស t ដោយ $\dfrac{1}{t}$

នោះ: $f(t) + 2f\left(\dfrac{1}{t}\right) = \dfrac{1+2t}{t-1}$ (2)

យក (1) គុណនឹង 2

$$2f\left(\frac{1}{t}\right) + 4f(t) = \frac{2t+4}{1-t}$$

$$2f\left(\frac{1}{t}\right) + f(t) = \frac{1+2t}{t-1}$$

ដកអង្គនិងអង្គ :

$$3f(t) = \frac{2t+4+1+2t}{1-t}$$

$$f(t) = \frac{4t+5}{3(1-t)}$$

ដូចនេះ: $\boxed{f(x) = \dfrac{4x+5}{3(1-x)}}$

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

(8)

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែប្រចាំរាជធានីភ្នំពេញ

ថ្ងៃទី ០១ - ៤ - ២០០៥

វិញ្ញាសាទី១: គណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១២ រយៈពេល ៣ម៉ោង

ជិត-ស៊ុំអាន
អធិការ គណិតវិទ្យា
TEL: 011 953 029

I-(ពិន្ទុ១០) ចំនួនមួយជាការេប្រាកដមានរាង $\overline{abcd}$ ។ ដោយដឹងថា $\overline{ab} - \overline{cd} = 1$ ។ រកចំនួន $\overline{abcd}$

II-(ពិន្ទុ១០) រកគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ដែលចំពោះគ្រប់ n មានមួយចំនួនគត់ x ផ្ទៀងផ្ទាត់

$S99(1999^n+1) = 2(x^2+x)$ ។

III-(ពិន្ទុ១០) រកគ្រប់ចំនួនសនិទាន a ដែល $|4a-2| \le 1$ និង $A = \frac{4a-1}{27a^4}$ ជាចំនួនគត់ ។

IV-(ពិន្ទុ២០) យក M ជាចំនុចមួយនៅលើជ្រុង AB = 1 នៃត្រីកោណសម័ង្ស ABC ។ បណ្តាចំនុច P , Q រៀងគ្នាជាចំណោលកែងនៃ M លើជ្រុង AC និង BC ។ ចំណែក P_1 , Q_1 រៀងគ្នាជាចំណោលកែងនៃ P និង Q លើជ្រុង AB ។

ក- គណនារង្វាស់ P_1Q_1

ខ- កំណត់ទីតាំងចំនុច M ដើម្បីអោយ PQ មានរង្វាស់ខ្លីបំផុត ។

V-(ពិន្ទុ១០) រកគ្រប់អនុគមន៍ $f: R \to R$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខ័ណ្ឌ :

$$\begin{cases} f(1) = 2005 \\ 4xy\,(x^2-y^2) + (x+y).f(x-y) = (x-y).f(x+y) \end{cases}$$

VI-(ពិន្ទុ២០) គេអោយ $f(x) = x^2 + 6ax - a$ ដោយ a ជាប៉ារ៉ាម៉ែត ។

ក) រកគ្រប់តំលៃនៃ a ដើម្បីអោយសមីការ $f(x) = 0$ មានរឹសយ៉ាងតិចមួយ ។

ខ) ឧបមាថា x_1 , x_2 ជារឹសសមីការ $f(x) = 0$ (មិនបាច់ផ្សេងគ្នា) រកតំលៃតូចបំផុតនៃកន្សោម

$$A = \frac{9a-4a^2}{(1+x_1)(1+x_2)} - \frac{70a^3+1}{(1-6a-x_1)(1-6a-x_2)}$$

VII-(ពិន្ទុ២០) គេអោយត្រីកោណ ABC មាន AB = 22 ; BC = 19 ; CA = 13 ។

1)យក M ជាទីប្រជុំទំងន់នៃត្រីកោណ ABC ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $AM^2 + CM^2 = BM^2$

2)រកសំនុំចំនុច P ក្នុងប្លង់នៃត្រីកោណ ABC ដែល $AP^2 + CP^2 = BP^2$

3)កំណត់តំលៃធំបំផុត និង តូចបំផុតនៃ BP ដោយដឹងថា $AP^2 + CP^2 = BP^2$

www.pisethsok.wordpress.com
សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page
Facebook.com/TeacherSokPiseth
pisethsok.wordpress.com
plus.google.com/+PisethSok_SPS

កម្រងវិញ្ញាសា : ប្រលងសិស្សពូកែគណិតវិទ្យា

ថ្នាក់ទី១២ : ថ្ងៃ 01.04.05

លំហាត់ទី1

(ពិន្ទុ10)

រកចំនួន $\overline{abcd}$:

តាង $\overline{abcd} = n^2 \ (n \in \mathbb{N}^*)$

$100\overline{ab} + \overline{cd} = n^2$

ដោយ $\overline{ab} = \overline{cd} + 1$

គេបាន: $101\,\overline{cd} + 100 = n^2$

ឬ $(n-10)(n+10) = 101\,\overline{cd}$

ដោយ n^2 មាន 4ខ្ទង់ គេបាន: $n < 100$

ទាញបាន $n + 10 = 101$

$n = 91$

ដូចនេះ: $\boxed{\overline{abcd} = 8281}$

(ពិន្ទុ10)

ការកំណត់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n

គេមាន $999(1999^n + 1) = 2(x^2 + x)$

បើមាន n ចំនួនគត់ធម្មជាតិដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លំហាត់

គុណអង្គទាំងពីរនឹង ២

$1998 \cdot 1999^n + 1998 = 4x^2 + 4x$

$1998 \cdot 1999^n + 1999 = (2x+1)^2$

ចម្លើយ

- បើ $n = 1$: $(2x+1)^2 = 1999^2$

នាំឲ្យ: $2x + 1 = \pm 1999$

ឬ $x = 999$ ឬ $x = -1000$

- បើ $n \geq 2$ នោះ $(2x+1) \vdots 1999$

ដោយសារ 1999 ចំនួនបឋម

នាំឲ្យ $(2x+1)^2 \vdots 1999^2$

ល.ខ នេះមិនអាចទាញបាន

$1998 \cdot 1999^n + 1999 \vdots 1999^2$

ចំពោះ: គ្រប់ $n \geq 2$

ដូចនេះ: $\boxed{n = 1}$

III (ពិន្ទុ10)

ការកំណត់ចំនួនពិត a

ចំពោះ $|4a-2| \leq 1$ នោះ: $\frac{1}{4} \leq a \leq \frac{3}{4}$

$A = \frac{4a-1}{27a^4}$

ចំពោះ: $a \geq \frac{1}{4}$ នោះ: $A \geq 0$

ស្មើ $A = 0$ កាល $a = \frac{1}{4}$

យក k ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដែល

$A = k$

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

$$\frac{4a-1}{27a^4}=\frac{1}{k}\qquad \left(K=\frac{1}{k}\right)$$

$$27a^4-4ak+k=0$$

$$81a^4-12ak+3k=0$$

$$81a^4-18a^2+1+18a^2-12ak+3k-1=0$$

$$(9a^2-1)^2+2(3a-1)^2-12a(k-1)+3(k-1)=0$$

$$(9a^2-1)^2+2(3a-1)^2+3(k-1)(1-4a)=0$$

ព្រោះ: $3(k-1)(1-4a)\le 0$

ដោយ $a\ge\frac{1}{4}$ នាំ $1-4a\le 0$

នោះ: $k-1\ge 0$

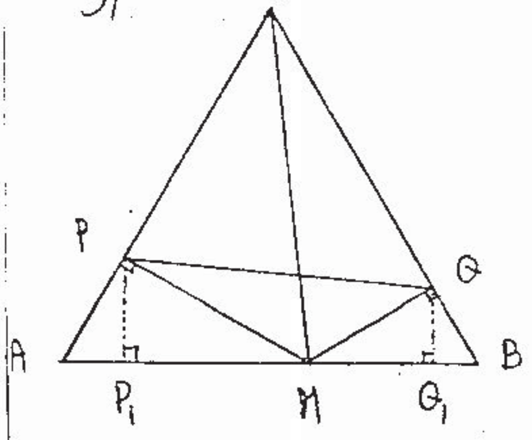
$k\ge 1$ នាំ $K\le 1$

ដោយ K ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន $K=1$

គេបាន $a=\frac{1}{3}$.

ដូចនេះ: $\boxed{a=\frac{1}{4}\ ;\ a=\frac{1}{3}}$

(ពិន្ទុ20)



ក. គណនារង្វាស់ P_1Q_1

យើងមាន $S_{ABC}=S_{ACM}+S_{MBC}$

$$\frac{AB^2\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{2}(MP\cdot AC)+\frac{1}{2}(MQ\cdot BC)$$

$$=\frac{1}{2}AB\cdot(MP+MQ)$$

នាំ $MP+MQ=\frac{AB\sqrt{3}}{2}$

ΔMPP_1 និង ΔMQQ_1 កន្លះសមបាត

$$MP_1=MP\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ MQ_1=MQ\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$MP_1+MQ_1=\frac{\sqrt{3}}{2}(MP+MQ)$$

$$P_1Q_1=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot AB$$

10p $\boxed{P_1Q_1=\frac{3}{4}}$

ខ. កំណត់ទីតាំងចំនុច M ដើម្បីអោយ PQ មានរង្វាស់ខ្លីបំផុត

មាន: P_1Q_1 ជាចំណោលកែងនៃ PQ លើ [AB]

នាំអោយ $PQ\ge P_1Q_1$

ដូចនេះ: PQ មានរង្វាស់ខ្លីបំផុត

កាល $[PQ]\ //\ [AB]$

គេបាន $AP=BQ$

$$S_{AMP}=S_{BMQ}$$

10p $AM=BM$

$\boxed{\text{PQ ខ្លីបំផុតកាល M កណ្តាល [AB]}}$

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

(ពិន្ទុ10)

គេឲ្យអនុគមន៍ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\begin{cases} f(1) = 2005 & (1) \\ 4xy(x^2-y^2)+(x+y)f(x-y) = (x-y)f(x+y) & (2) \end{cases}$$

របៀបទី1 :

1): ជំនួស $x = y = 1$

នោះ: $f(0) = 0$

តាង $a = x+y$; $b = x-y$

(2): $(a^2-b^2)ab + af(b) = bf(a)$

$$a^2-b^2 = \frac{bf(a)}{ab} - \frac{af(b)}{ab}$$

$$\frac{f(b)}{b} - b^2 = \frac{f(a)}{a} - a^2$$

ចំពោះគ្រប់ $x \neq 0$ $\frac{f(x)}{x} - x^2$

$$\frac{f(x)}{x} - x^2 = f(1) - 1$$

$$= 2004$$

$$f(x) = x^3 + 2004x$$

គ្រប់ $x \neq 0$

ដោយ $f(0) = 0$ នោះ:

$$\boxed{f(x) = x^3+2004x \quad \text{គ្រប់ } x \in \mathbb{R}}$$

របៀបទី2 តាម (2)

តាង $x = t+1$; $y = t$

$$4(t+1)t[(t+1)^2-t^2] + (2t+1)f(1) = f(2t+1)$$

$$(4t^2+4t)(2t+1) + 2005(2t+1) = f(2t+1)$$

$$[(2t+1)^2-1](2t+1) + 2005(2t+1) = f(2t+1)$$

$$(2t+1)^3 + 2004(2t+1) = f(2t+1)$$

ជំនួស $2t+1$ ដោយ x

3p $\boxed{f(x) = x^3 + 2004x \quad \text{គ្រប់ } x \in \mathbb{R}}$

VI (ពិន្ទុ20)

ក) រកគ្រប់តម្លៃ a ដើម្បី $f(x)=0$ មានឫសយ៉ាងតិចមួយ

5p $f(x) = x^2+6ax-a = 0$

$$\Delta' = 9a^2+a \geq 0$$

$$a(9a+1) \geq 0$$

$$\boxed{a \in \left]-\infty ; -\frac{1}{9}\right] \cup [0 ; +\infty[}$$

ខ) រកតម្លៃតូចបំផុតនៃ A

បើ $x_1 ; x_2$ ជាឫសនៃ $f(x) = 0$

នោះ: $f(x) = (x-x_1)(x-x_2)$

$$f(-1) = (-1-x_1)(-1-x_2)$$

$$= (1+x_1)(1+x_2)$$

ដោយ $f(-1) = 1-6a-a = 1-7a$

នោះ: $(1+x_1)(1+x_2) = 1-7a$ ✓

3p

2) កំណត់សំណុំចំនុច P ក្នុងប្លង់ Δ ABC ដែល $AP^2 + CP^2 = BP^2$

តាង E ជាកណ្តាល [AC] និង D ឆ្លុះនឹង B ធៀបចំនុច E

តាមទ្រឹស្តីបទៈ មេដ្យាន PE នៃ ΔPAC, PBD

$$4PE^2 = 2PA^2 + 2PC^2 - AC^2$$

$$4PE^2 = 2PB^2 + 2PD^2 - BD^2$$

$$2PA^2 + 2PC^2 - AC^2 = 2PB^2 + 2PD^2 - BD^2$$

$$2(PA^2 + PC^2 - PB^2) = 2PD^2 - (BD^2 - AC^2)$$

ដោយ $BD = 2m_b = 39$

$AC = 13$

$BD^2 - AC^2 = 2.26^2$

$$PA^2 + PC^2 - PB^2 = PD^2 - 26^2 = 0$$

ឬ $PD^2 = 26^2$ ឬ $PD = 26$

7p សំណុំចំនុច P ជារង្វង់(C) ផ្ចិត D កាំ PD=26

3) កំណត់តម្លៃតូចបំផុត និងធំបំផុត នៃ BP បើ $AP^2 + CP^2 = BP^2$

តាម 2): ឧបមាថារង្វង់ (C) កាត់បន្ទាត់ (BD) ត្រង់ 2 ចំនុច M និង N

BP តូចបំផុតពេល $M \equiv P$

3p គេបាន $\boxed{BP = BM = 13}$

(M ជាប្រជុំទំងន់ Δ ABC)

BP ធំបំផុត ពេល P ត្រួតលើ N

នោះ $BN = BD + DN$

$= 39 + 26 = 65$

3p $\boxed{BN = 65}$

www.pisethsok.wordpress.com
គ្រូបង្រៀនគណិតវិទ្យា
សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែប្រចាំរាជធានីភ្នំពេញ

ថ្ងៃទី ០១ - ៤ - ២០០៥

វិញ្ញាសាទី២ គណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១២ រយៈពេល ៣ម៉ោង

I-(ពិន្ទុ២០) ក) ស្រាយបញ្ជាក់ថា $11^{10^{2005}}-1$ ចែកដាច់នឹង 10^{2006}

ខ) ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់សេស n នោះ $(n^8-n^6-n^4+n^2)$ ចែកដាច់នឹង 1152

II-(ពិន្ទុ២០) គេអោយអនុគមន៍ $f:N^*\to N^*$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខ័ណ្ឌ :

i) ចំពោះគ្រប់ចំនួន $a\,;b$ បឋមរវាងគ្នា គេមាន $f(ab)=f(a)\,.\,f(b)$

ii) ចំពោះគ្រប់ចំនួនបឋម $p\,;q$ យើងមាន $f(p)+f(q)=f(p+q)$

ក) ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(2)=2\,;\ f(3)=3$

ខ) គណនា $f(1999)$ និង $f(2006)$

III-(ពិន្ទុ២០) គេអោយត្រីកោណ ABC មានមុំ $\widehat{BAC}=45^\circ$ ហៅ BE (E∈ AC) ; CF (F∈ AB) ជាកំពស់ ។ ឧបមា H ជាអរត្តូសង់នៃត្រីកោណ ABC ; M , K រៀងគ្នាជាចំនុចកណ្តាល [BC] និង [AH] ។

ក) ស្រាយបញ្ជាក់ថា MEKF ជា ការេ

ខ) ស្រាយបញ្ជាក់ថាអង្កត់ទ្រូងនៃ ការេ MEKF ប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំនុចកណ្តាលនៃ [OH] ដោយ O ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC

គ) គណនា ប្រវែង EF បើរង្វង់ចារឹកក្រៅ ត្រីកោណ ABC មានកាំស្មើ 2005

IV-(ពិន្ទុ១៥) រកគ្រប់អនុគមន៍ $f:R\to R$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

$$f'\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$ គ្រប់ $x\,;y\in R\ ;\ x\neq y$

V-(ពិន្ទុ១៥) គេអោយបណ្តាចំនួនពិត $a\,;\,b\,;c$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $3a+4b+2005c=0$

ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការ $ax^2+bx+c=0$ មានរឹសជានិច្ច ។

VI-(ពិន្ទុ១០) ស្រាយបញ្ជាក់ថា ស្វ៊ីតដែលមានធាតុបីគឺ $1\,;\sqrt{3}\,;3$ មិនមែនជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ។

៣៣៦-៨៨

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

ព្រឹត្តិការណ៍ : ប្រលងសិស្សពូកែគណិត

ថ្នាក់ទី12 : ថ្ងៃទី 01.4.05

វិញ្ញាសាទី2 :

ចំលើយ

I (ពិន្ទុ20) :

01

(10p) ក) ស្រាយថា $11^{10^{2005}} - 1 \vdots 10^{2006}$

យើងនឹងស្រាយថា គ្រប់ $n \in \mathbb{N}$

គេបាន : $11^{10^{n}} - 1 \vdots 10^{n+1}$

. បើ $n=0$: $11-1 \vdots 10$ ពិត

2p . ឧបមាថា សំណើពិតដល់ $n=k\geq 1$

គឺ : $11^{10^{k}} - 1 \vdots 10^{k+1}$

យើងនឹងស្រាយថា : $11^{10^{k+1}} - 1 \vdots 10^{k+2}$

មាន $11^{10^{k+1}} - 1$

$= \left(11^{10^{k}}\right)^{10} - 1$

$= \left(11^{10^{k}} - 1\right)\left[\left(11^{10^{k}}\right)^{9} + \dots + 1\right]$ (1)

ដោយ $11 \equiv 1 \pmod{10}$

នាំឲ្យ $\left(11^{10^{k}}\right)^{9} \equiv 1 \pmod{10}$

$\left(11^{10^{k}}\right)^{8} \equiv 1 \pmod{10}$

⋮

$\left(11^{10^{k}}\right) \equiv 1 \pmod{10}$

នោះ $\left[\left(11^{10^{k}}\right)^{9} + \left(11^{10^{k}}\right)^{8} + \dots \left(11^{10^{k}}\right) + 1\right] \equiv 10 \pmod{10}$

ពី $\left[\left(11^{10^{k}}\right)^{9} + \left(11^{10^{k}}\right)^{8} + \dots + \left(11^{10^{k}}\right) + 1\right] \vdots 10$ (2)

ហើយ $\left(11^{10^{k}} - 1\right) \vdots 10^{k+1}$ (3)

តាម (2) និង (3)

6p $11^{10^{k+1}} - 1 \vdots 10^{k+1} . 10 = 10^{k+2}$

2p បើ $n = 2005$

នោះ : $11^{10^{2005}} - 1 \vdots 10^{2006}$

ខ) ស្រាយថា $n^8 - n^6 - n^4 + n^2 \vdots 1152$

(10p) ចំពោះ : n ជាចំនួនគត់សេស

តាង $A = n^8 - n^6 - n^4 + n^2$

$= n^2(n^6 - n^4 - n^2 + 1)$

$= n^2(n^2 - 1)(n^4 - 1)$

2p $= n^2(n-1)^2(n+1)^2(n^2+1)$

ចំពោះ $1152 = 2^7 \times 9$.

ដោយ $n = 2K+1$ $(K \in \mathbb{N})$

នោះ : $A = (2K+1)^2(2K)^2(2K+2)^2\left[(2K+1)^2 + \dots\right.$

2p $= 32(2K+1)^2 . K^2 (K+1)^2 (2K^2 + 2 \dots$

មាន $K(K+1) \vdots 2$ អ៊ី $K^2(K+1)^2 \vdots ($

ដូចនេះ : $A \vdots 32 \times 4$.

3p $A \vdots 2^7$ (1)

www.pisethsok.wordpress.com
សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

ម្យ៉ាងទៀត :

$n(n-1)(n+1) \vdots 3$

ដូច្នេះ $n^2(n-1)(n+1) \vdots 9$

នាំឲ្យ $A \vdots 9$ (2)

(1) និង (2) $A \vdots 2^7 \times 9$

3p ដូច្នេះ $\boxed{A \vdots 1152}$

II (ពិន្ទុ 20)

ក) ស្រាយថា $f(2)=2 ; f(3)=3$

តាមល.ខ i) $f(ab)=f(a).f(b)$ $(a;b)=1$ និង តាមល.ខ

ii) $f(p)+f(q)=f(p+q)$

ដែល $p;q$ ជាចំនួនបឋម :

. ករណី $a=2; b=3$

តាម i): $f(6)=f(2).f(3)$

តាម ii) $2f(3)=f(2).f(3)$

5p ដោយ $f(3)\neq 0$ នោះ $\boxed{f(2)=2}$

. ករណី $p=q=2$

តាម ii): $f(4)=f(2)+f(2)=4$

. ករណី $p=2 ; q=3$.

តាម ii) $f(5)=f(2)+f(3)=2+f(3)$

. ករណី $p=5 ; q=2$:

$f(7)=f(5)+2=f(3)+$[illegible]

. ករណី $p=5 ; q=7$

$f(12)=f(5)+f(7)$

$= f(3)+2+f(3)+$[illegible]

$= 2f(3)+6$. (1)

. ករណី $a=4 ; b=3$.

តាម (i) : $f(12)=f(4).f(3)$

$= 4f(3)$ (2)

(1) និង (2) :

$2f(3)+6=4f(3)$

5p $\boxed{f(3)=3}$

គេបាន $f(5)=5 ; f(7)=7$

ខ) គណនា $f(1999)$ និង $f(2006)$

10p ដោយ 1999 ជាចំនួនបឋម :

នោះ $1999+3=2002=2\times7\times11\times$[illegible]

. ករណី $a=5 ; b=3$: $f(15)=15$

. ករណី $p=13 ; q=2$: $f(15)=f(13)+f$[illegible]

នោះ $f(13)=f(15)-f(2)=13$

. ករណី $p=11 ; q=2$ នោះ $f(11)=11$

គេបាន : $f(2002)=f(2).f(7).f(11).f(13)$

$= 2\times7\times11\times13=2002$

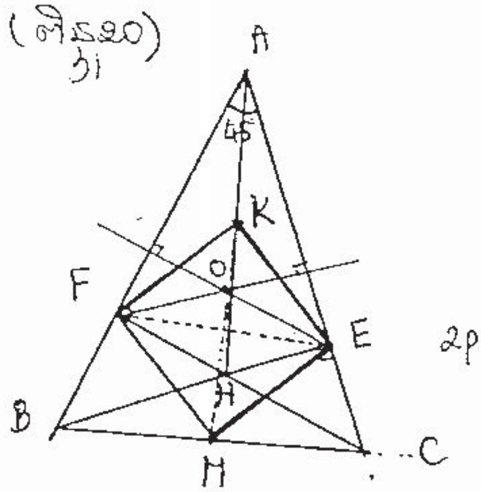
$f(1999)=f(2002)-f(3)=1999$

$f(2006)=f(1999)+f(7)=2006$

www.pisethsok.wordpress.com

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

III (ទំព័រ២០)



ក). ស្រាយបញ្ជាក់ MEKF ជាការេ

- មាន EM និង FM ជាមេដ្យាននៃ Δ កែង BCE និង BCF.

នោះ $EM = FM = \frac{BC}{2}$ (1)

ដូចគ្នា : EK និង FK មេដ្យាន Δ កែង AEH និង AFH

នោះ $EK = FK = \frac{1}{2} AH$ (2)

- មាន $\widehat{BAC} = 45°$

នោះ Δ ABE ; ACF កែងសមបាត

ទំនាក់ : $AE = BE$, $\widehat{ECH} = 45°$

នោះ Δ CEH កែងសមបាត .

ទំនាក់ : $CE = HE$.

នាំឲ្យ Δ កែង AHE ≅ Δ កែង BCE

ទំនាក់ $AH = BC$ (3)

(1) ; (2) ; (3) ផ្ទឹមគ្នា .

MEKF ជាចតុកោណស្មើ (4)

ម្យ៉ាងទៀត :

$\widehat{KAE} = \widehat{KEA}$ (Δ AKE សមបាត)

$\widehat{MBE} = \widehat{MEB}$ (Δ BME សមបាត)

តែ $\widehat{KAE} = \widehat{MBE}$ (Δ AHE ≅ Δ BCE)

នាំឲ្យ $\widehat{KEA} = \widehat{MEB}$

ដោយ $\widehat{KEA} + \widehat{KEH} = 90°$

នោះ $\widehat{MEK} = \widehat{MEB} + \widehat{KEH} = 9$

(4) និង (5) : MEKF ជាការេ

ខ) ស្រាយថាប្រសព្វអង្កត់ទ្រូងនៃ MEK

- រកចំណុចកណ្ដាល [OH] (O ផ្ចិតរង្វង់)

O ផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅ Δ ABC .

ដោយ Δ AFC និង AEB កែងសមបាត

នោះ E ; O ស្ថិតលើមេដ្យាទ័រនៃ AB

$EO \perp AB$, $CF \perp AF$ | នោះ $EO // CF$

$FO // BE$

ដូចគ្នា :

នាំឲ្យ HEOF ជាប្រលេឡូក្រាម

ដែល I ប្រសព្វ HK និង FE

សន្និដ្ឋាន : I កណ្ដាល [OH]

គ) គណនា EF បើកាំរង្វង់ចារឹក O ស្មើ 2

តាម ក) Δ ABC មាន $\widehat{BAC} = 45°$

H អ័រតូសង់ នោះ $BC = AH$

ដូចគ្នា Δ AFE មាន $\widehat{FAE} = 45°$

មាន O អ័រតូសង់ នោះ :

$FE = OA = 2005$

www.pisethsok.wordpress.com
សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

IV (ពិន្ទុ15)

រកគ្រប់អនុគមន៍ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f'\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

ដោយ $x, y \in \mathbb{R}$; $x \neq y$.

ជំនួស x ដោយ $x-y$

y ដោយ $x+y$

គេបាន $f'(x) = \frac{f(x+y)-f(x-y)}{2y}$

ដេរីវេធៀបនឹង x ភាគីទាំងពីរ

5p $f''(x) = \frac{f'(x+y)-f'(x-y)}{2y}$

$$= \frac{1}{2y}\left[\frac{f(x+2y)-f(x)}{2y} - \frac{f(x)-f(x-2y)}{2y}\right]$$

$$= \frac{1}{2y}\left[\frac{f(x+2y)-f(x)}{2y} + \frac{f(x-2y)-f(x)}{(-2y)}\right]$$

$$= \frac{f(x+2y)+f(x-2y)-2f(x)}{4y^2}$$

គេ $f''(x) = \frac{1}{4y^2}\left[f'(x+2y)+f'(x-2y)-2f'(x)\right]$

ដោយ $f'(x+2y) = \frac{f(x+4y)-f(x)}{4y}$

$f'(x-2y) = \frac{f(x-4y)-f(x)}{(-4y)}$

$2f'(x) = 2\cdot\frac{f(x+y)-f(x-y)}{2y}$

ជំនួស y ដោយ $4y$:

$2f'(x) = \frac{f(x+4y)-f(x-4y)}{\ldots}$

ដូច្នេះ $f'''(x) = \frac{1}{4y^2}\left[f'(x+2y)+f'(x-2y)-2f'(x)\right]$

5p $f'''(x) = 0$

គេទាញបាន $f''(x) = a$

$f'(x) = ax+b$

$f(x) = ax^2+bx+c$

5p ចម្លើយ: $\boxed{f(x) = ax^2+bx+c}$ $(a,b,c\in$

V. (ពិន្ទុ15)

ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការ:

$ax^2+bx+c=0$ មានឫសជានិច្ច

− បើ $a=0$ នោះ: $bx+c=0$

5p តាមលក្ខខណ្ឌ $b = -\frac{2005c}{4}$

នោះ: $-\frac{2005c}{4}x + c = 0$

$c\left(-\frac{2005}{4}x+1\right) = 0$

. ចំពោះ: $c=0$ សមី. មានឫសគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$

. ចំពោះ: $c\neq 0$ សមី. មានឫសមួយ

គឺ: $x = \frac{4}{2005}$

− បើ $a\neq 0$ តាង

10p $f(x) = ax^2+bx+c$

គេ $af\left(\frac{4}{2005}\right) = a\left(\frac{16}{2005^2}a+\frac{4}{2005}b+c\right)$

$= \frac{a}{2005^2}\left(16a+4\cdot 2005b+2005^2c\right)$

$= \frac{a}{2005^2}\left[16a+2005(4b+2005c)\right]$

$= \frac{a}{2005^2}\left[16a+2005(-3a)\right]$

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

$$af\left(\frac{u}{2005}\right) = -\frac{5999a^2}{2005^2} < 0$$

ដូចនេះ : **សមីការ មានឫសពីរផ្សេងគ្នា**

VI (ពិន្ទុ 10)

(ក) សួរថា តើគេមានតួបីគឺ : $1; \sqrt{3}; 3$

មិនមែនជាស្វ៊ីតនព្វន្ត :

ឧបមាថាស្វ៊ីតនព្វន្ត មានតួបីគឺ

$1 ; \sqrt{3} ; 3$

តាង $u_m = 1 ; u_n = \sqrt{3} ; u_p = 3$

4p គណនា : $\dfrac{u_p - u_n}{u_n - u_m} = \dfrac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3}$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត : តួទី $m; n; p$ នៃស្វ៊ីត

នព្វន្តគឺ :

$$\frac{u_p - u_n}{u_n - u_m} = \frac{u_1 + (p-1)d - u_1 - (n-1)d}{u_1 + (n-1)d - u_1 - (m-1)d}$$

4p $$= \frac{p-n}{n-m} \quad (2)$$

(1) និង (2) ទាញបាន :

$$\frac{p-n}{n-m} = \sqrt{3}$$

(2p) សមភាពនេះ មិនពិត ព្រោះអង្គទី 2 ជាចំនួនអសនិទាន , អង្គទី1 ជាចំនួនសនិទាន ព្រោះ ($m, n, p \in \mathbb{N}$)

ដូចនេះ : គ្មានស្វ៊ីតនព្វន្ត មានតួ $1; \sqrt{3}; 3$

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស

ផ្នែកអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា

ថ្នាក់ទី ៩ និងទី ១២ ឆ្នាំសិក្សា ២០០៤-២០០៥

ហ៊ិត-ស៊ីអាន
អធិការ គណិតវិទ្យា
TEL: 011 953 029

សម័យប្រឡង : ០៥-០៥-០៥

វិញ្ញាសា គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២ លើកទី១ ថ្ងៃទី ០៥-០៥-០៥

(រយៈពេល ៣ ម៉ោង ពិន្ទុ ១០០)

១-(៥ពិន្ទុ) ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន k គេកំណត់ $k!=1\times 2\times \cdots \times k$ ។

គណនាផលបូក $S=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}$ ។

២-(១០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $n!>3^n$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ដែល $n\ge 7$ ។

៣-(១៥ពិន្ទុ) $S_k=u_1+u_2+\cdots+u_k$ ជាផលបូក k តួដំបូងនៃស៊ីតនព្វន្ត (u_n) មួយដែលមាន $u_1\neq 0$ ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់

$\frac{S_m}{S_n}=\left(\frac{m}{n}\right)^2$ ចំពោះគ្រប់ $m\neq n$ ។

គណនា $\frac{u_{m+2004}}{u_{n+2005}}$ ជាអនុគមន៍នៃ m និង n ។

៤-(១៥ពិន្ទុ) p ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ហើយ $p\ge 2$ ដែល $(p-1)!+1$ ចែកដាច់នឹង p ។

បង្ហាញថា p ជាចំនួនបឋម ។

៥-(១៥ពិន្ទុ) អនុគមន៍ f កំនត់ដោយ $f(x+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}$ ចំពោះគ្រប់ $x\ge 0$ និង $a>0$ ។

បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍ខួបនៅលើ $[0;+\infty[$ ។

៦-(២០ពិន្ទុ) សមីការ $x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$ មានឫសជាចំនួនពិតមួយយ៉ាងតិច ចំពោះ a និង b ជាចំនួនពិត ។

កំណត់តំលៃអប្បបរមានៃ a^2+b^2 ។

៧-(២០ពិន្ទុ) ចំនុច O មួយស្ថិតនៅលើជ្រុង [AB] នៃចតុកោណប៉ោង ABCD មួយ ។ រង្វង់ផ្ចិត O ~~ក៏~~មួយប៉ះជ្រុង [BC], [CD] និង [DA] នៃចតុកោណ ។ ចតុកោណ ABCD ចារឹកក្នុងរង្វង់មួយផ្សេងទៀត ។

បង្ហាញថា $AD+BC=AB$ ។

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

អត្រាកំណែគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២
សំរាប់ថ្ងៃទី ០៥-០៥-០៥

១-(៥ពិន្ទុ) គណនា ផលបូក $S=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}$:

$S=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}=\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$ ៣ពិន្ទុ

$\boxed{S=1-\frac{1}{(n+1)!}=\frac{(n+1)!-1}{(n+1)!}}$ ២ពិន្ទុ

២-(១០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $n!>3^n$, $n\geq 7$:

-បើក $n=7$: $7!=5040>3^7=2187$: ពិត ២ពិន្ទុ

-ឧបមាថា ពិតដល់ $n=k$ គឺថា $k!>3^k$ ៣ពិន្ទុ

-សិក្សាចំពោះ $n=k+1$:

$(k+1)!=k!(k+1)>3^k(k+1)>3^k.3=3^{k+1}$ (ព្រោះ $k+1>7>3$) ៣ពិន្ទុ

បានន័យថា $(k+1)!>3^{k+1}$

ដូចនេះ $\boxed{n!>3^n \quad , \; n\geq 7}$ ២ពិន្ទុ

៣-(១៥ពិន្ទុ) គណនា $\frac{u_{m+2004}}{u_{n+2005}}$ ជាអនុគមន៍នៃ $m\&n$:

គេមាន : $\frac{m^2}{n^2}=\frac{S_m}{S_n}=\frac{[2u_1+(m-1)d]m}{[2u_1+(n-1)d]n}$ ៣ពិន្ទុ

$\frac{m}{n}=\frac{2u_1+(m-1)d}{2u_1+(n-1)d}$ ២ពិន្ទុ

$m[2u_1+(n-1)d]=n[2u_1+(m-1)d]$ ២ពិន្ទុ

$2u_1(m-n)-(m-n)d=0$

$2u_1-d=0$; $d=2u_1$ ព្រោះ $m\neq n$ ២ពិន្ទុ

មៀងទៀត :

$\frac{u_{m+2004}}{u_{n+2005}}=\frac{u_1+(m+2003)d}{u_1+(n+2004)d}=\frac{u_1+(m+2003)2u_1}{u_1+(n+2004)2u_1}$ ៣ពិន្ទុ

ដូចនេះ $\boxed{\frac{u_{m+2004}}{u_{n+2005}}=\frac{2m+4007}{2n+4009}}$ ៣ពិន្ទុ

៤-(១៥ពិន្ទុ) បង្ហាញថា p ជាចំនួនបឋម :

ឧបមាថា p មិនមែនជាចំនួនបឋម នោះមាន d ជាតួចែកនៃ p (ដែល $1<d<p$) ៣ពិន្ទុ

ដូចនេះ $d|(p-1)!$ ២ពិន្ទុ

គេដឹងថា $p|((p-1)!+1)$ គឺមានចំនួនគត់ k ដែល $(p-1)!+1=pk$ ២ពិន្ទុ

ដោយ $d|p$ នោះ $d|pk$ គឺ $d|((p-1)!+1)$ ២ពិន្ទុ

គេបាន : $d|((p-1)!+1)$ និង $d|(p-1)!$ ២ពិន្ទុ

នោះ $d|((p-1)!+1-(p-1)!)$ គឺថា $d|1$ ដែលផ្ទុយនឹង $1<d<p$ ២ពិន្ទុ

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

ដូចនេះ $\boxed{p \text{ ជាចំនួនបឋម}}$ ២ពិន្ទុ

៥-(១៥ពិន្ទុ) បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍ខួប :

f មានដែនកំណត់ $D = [0\,;+\infty[$

គ្រប់ $x \in D\,; x + 2a \in D$ ព្រោះ $a > 0$ ២ពិន្ទុ

$f(x+2a) = f((x+a)+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x+a) - f^2(x+a)}$ ៣ពិន្ទុ

$= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)} - \left(\frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)}\right)^2}$ ២ពិន្ទុ

$= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)} - \left(\frac{1}{4} + \sqrt{f(x) - f^2(x)} + f(x) - f^2(x)\right)}$ ២ពិន្ទុ

$= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - f(x) + f^2(x)} = \frac{1}{2} + \sqrt{\left(f(x) - \frac{1}{2}\right)^2}$ ២ពិន្ទុ

$= \frac{1}{2} + f(x) - \frac{1}{2}$ ព្រោះ $f(x) \geq \frac{1}{2}$ ចំពោះគ្រប់ $x \geq 0$ ២ពិន្ទុ

$f(x+2a) = f(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x \in [0\,;+\infty[$

ដូចនេះ $\boxed{f \text{ ជាអនុគមន៍ខួបនៅលើ } D = [0\,;+\infty[}$ ២ពិន្ទុ

៦-(២០ពិន្ទុ) គណនាតម្លៃអប្បបរមានៃ $a^2 + b^2$:

-បើ $x = 0$ សមីការអាចសរសេរ : $1 = 0$ មិនអាចមាន គឺ $x \neq 0$

-ចែកគ្រប់តួនឹង x^2 គេបាន $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + a\left(x + \frac{1}{x}\right) + b = 0$ ២ពិន្ទុ

តាង $k = x + \frac{1}{x}$; $|k| = \left|\frac{x^2+1}{x}\right| = \frac{|x|^2 + 1}{|x|} = |x| + \frac{1}{|x|} \geq 2$ ២ពិន្ទុ

គេបាន $k^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$ ២ពិន្ទុ

សមីការអាចសរសេរ : $k^2 - 2 + ak + b = 0$ ១ពិន្ទុ

$2 - k^2 = ak + b$ ហើយ $|2 - k^2| = |ak + b.1| \leq \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{k^2 + 1}$ ២ពិន្ទុ

$(2 - k^2)^2 \leq (a^2 + b^2)(k^2 + 1)$

$a^2 + b^2 \geq \frac{(2-k^2)^2}{k^2+1}$ (1) ២ពិន្ទុ

តាង $t = k^2 + 1$

ដោយ $|k| \geq 2$ នោះ $t = k^2 + 1 \geq 5$ ២ពិន្ទុ

(1) អាចសរសេរ : $a^2 + b^2 \geq \frac{(3-t)^2}{t}$ (2) ១ពិន្ទុ

សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $f(t) = \frac{(3-t)^2}{t}$; $t \geq 5$

$f'(t) = \frac{t^2 - 9}{t^2} > 0$ ចំពោះ $t \geq 5$ ២ពិន្ទុ

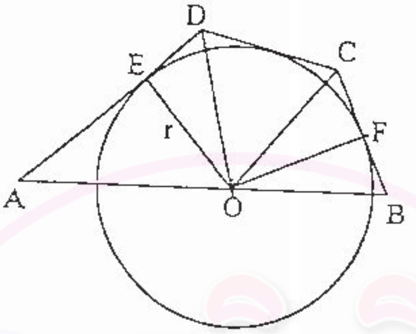
សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

គេទាញបាន f កើនជានិច្ចលើ $[5\,;+\infty[$ គឺថា $f(t) \ge f(5) = \dfrac{(3-5)^2}{5} = \dfrac{4}{5}$

(2) : $a^2+b^2 \ge \dfrac{(3-t)^2}{t} \ge \dfrac{4}{5}$ នោះ $a^2+b^2 \ge \dfrac{4}{5}$ ២ពិន្ទុ

ដូចនេះ $\boxed{\min(a^2+b^2) = \dfrac{4}{5}}$ ២ពិន្ទុ

ឃ-(២០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $AD+BC=AB$:



៤ពិន្ទុ

$AD+BC = AE+ED+BF+FC$ (1)

$BF = r\cot B$ $FC = r\cot\dfrac{C}{2}$ $ED = r\cot\dfrac{D}{2}$ $AE = r\cot A$ ២ពិន្ទុ

$AB = AO+OB = \dfrac{r}{\sin A}+\dfrac{r}{\sin B}$ ២ពិន្ទុ

ដោយ ABCD ចារឹកក្នុងរង្វង់មួយ នោះ $A+C=\pi$; $B+D=\pi$ ២ពិន្ទុ

គេបាន $\dfrac{C}{2} = \dfrac{\pi}{2}-\dfrac{A}{2}$; $\dfrac{D}{2} = \dfrac{\pi}{2}-\dfrac{B}{2}$ ២ពិន្ទុ

(1) អាចសរសេរ : $AD+BC = r(\cot A+\cot\dfrac{D}{2}+\cot B+\cot\dfrac{C}{2})$ ១ពិន្ទុ

$AD+BC = r(\cot A+\tan\dfrac{B}{2}+\cot B+\tan\dfrac{A}{2})$ (2) ២ពិន្ទុ

តែ $\tan\dfrac{A}{2} = \dfrac{1-\cos A}{\sin A}$; $\tan\dfrac{B}{2} = \dfrac{1-\cos B}{\sin B}$ ២ពិន្ទុ

(2) អាចសរសេរ : $AD+BC = r\left(\dfrac{\cos A}{\sin A}+\dfrac{1-\cos B}{\sin B}+\dfrac{\cos B}{\sin B}+\dfrac{1-\cos A}{\sin A}\right)$ ១ពិន្ទុ

$$AD+BC = r\left(\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}\right) = \frac{r}{\sin A}+\frac{r}{\sin B} = AB$$

ដូចនេះ $\boxed{AD+BC=AB}$ ២ពិន្ទុ

ថ្ងៃទី ០៥ ខែ ឧសភា ឆ្នាំ ២០០៥

ប្រធានក្រុមកំណែ គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២

អ៊ី សាងលី

pisethsok.wordpress.com

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស

ផ្នែកអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា

ថ្នាក់ទី ៩ និងទី ១២ ឆ្នាំសិក្សា ២០០៤-២០០៥

សម័យប្រឡង: ០៥-០៥-០៥

វិញ្ញាសា គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២ លើកទី២ ថ្ងៃទី ០៧-០៥-០៥

(រយៈពេល ៣ ម៉ោង ពិន្ទុ ១០០)

១-(១០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $F = \frac{21n+4}{14n+3}$ ជាប្រភាគសម្រួលមិនបានចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ។

២-(១០ពិន្ទុ) រកចំនួនគត់ធម្មជាតិតូចបំផុតដែលមាន 6 ជាលេខខ្ទង់ឯកតា ហើយបើគេប្តូរលេខ 6 ទៅខាងមុខគេបំផុតវិញ នោះគេនឹងបានចំនួនថ្មីដែលស្មើ 4 ដងនៃចំនួនដើមនោះ ។

៣-(១៥ពិន្ទុ) កំណត់គ្រប់អនុគមន៍លេខ g ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $(x-y)g(x+y)-(x+y)g(x-y)=4xy(x^2-y^2)$ ។

៤-(១៥ពិន្ទុ) A និង B ជាចំនុចនឹងនៅក្នុងប្លង់ (P) មួយ ។ គេបន្លាយ [AB] ខាងចំនុច B ឱ្យបាន $BC = \frac{AB}{k^2-1}$ ដែល $k>1$ ។

M ជាចំនុចចល័តក្នុងប្លង់ (P) ដោយ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\frac{MA}{MB} = k$ ។ កំនត់សំណុំនៃចំនុច M ។

៥-(២៥ពិន្ទុ) p ជាចំនួនបឋម ហើយ $C(p;x)$ ជាចំនួនបន្សំនៃ p ធាតុខុសៗគ្នាដោយចាប់យក ម្តង x ធាតុ $(x \le p)$ ។

ក- បង្ហាញថា $C(p;x)$ ជាពហុគុណនៃ p ចំពោះគ្រប់ x ដែល $0<x<p$ ។

ខ- បង្ហាញថា $(a+b)^p - a^p - b^p$ ជាពហុគុណនៃ p ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ a និង b ។

គ- បង្ហាញថា $a^p - a$ ចែកដាច់នឹង p ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ a ។

៦-(២៥ពិន្ទុ) អនុគមន៍ f កំណត់លើសំណុំចំនួនគត់ធម្មជាតិមិនសូន្យ ហើយយកតំលៃលើសំណុំចំនួនគត់ធម្មជាតិ ។

f ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខណៈទាំងបួនខាងក្រោម :

(1) : $f(2)=0$

(2) : $f(3)>0$

(3) : $f(9999)=3333$

(4) : ចំពោះគ្រប់ m ; n គេបាន : $f(m+n)=f(m)+f(n)$

ឬ $f(m+n)=f(m)+f(n)+1$ ។

ក- កំណត់ $f(1)$ និង $f(3)$ ។

ខ- បង្ហាញថា $f(3n) \ge n$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិមិនសូន្យ n ។

គ- កំណត់ $f(2005)$ ។

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

អត្រាកំរែណ គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២

សំរាប់ថ្ងៃទី ០៧_០៥_០៥

១-(១០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $F = \dfrac{21n+4}{14n+3}$ ជាប្រភាគសំរួលមិនបាន :

ឧបមាថាមាន d ជាតួចែករួមធំបំផុតនៃ $21n+4 \& 14n+3$ នោះគេបាន :

$21n+4 = da \quad , a \in \mathbb{N}$

$14n+3 = db \quad , b \in \mathbb{N}$ ២ពិន្ទុ

$21n+4-(14n+3) = (a-b)d$

$7n+1 \qquad = (a-b)d$

$21n+3 \qquad = 3(a-b)d$ ២ពិន្ទុ

$21n+4-(21n+3) = ad - 3(a-b)d$

$1 \quad = (3b-2a)d$ ២ពិន្ទុ

ដោយ $3b-2a$ ជាចំនួនគត់ នោះ $d|1$ គឺ $d=1$ ២ពិន្ទុ

ដូចនេះ **F ជាប្រភាគសំរួលមិនបាន** ២ពិន្ទុ

២-(១០ពិន្ទុ)

តាង $x = \overline{x_1x_2\cdots x_n}$ នោះ $\overline{x_1x_2\cdots x_n6}$ ជាចំនួនដែលស្វែងរក ២ពិន្ទុ

គេបាន $\overline{6x_1x_2\cdots x_n} = 4(\overline{x_1x_2\cdots x_n6})$

$6\times10^n + x = 4(10x+6)$ ១ពិន្ទុ

$2(10^n-4) = 13x$

ដោយ $(2;13)=1$ នោះ $13|(10^n-4)$ ១ពិន្ទុ

-បើ $n=1$ នោះ $10^n-4 = 10-4 = 6$ ចែកមិនដាច់នឹង13 ១ពិន្ទុ

-បើ $n=2$ នោះ $10^n-4 = 10^2-4 = 96$ ចែកមិនដាច់នឹង13 ១ពិន្ទុ

-បើ $n=3$ នោះ $10^n-4 = 10^3-4 = 996$ ចែកមិនដាច់នឹង13 ១ពិន្ទុ

-បើ $n=4$ នោះ $10^n-4 = 10^4-4 = 9996$ ចែកមិនដាច់នឹង13 ១ពិន្ទុ

-បើ $n=5$ នោះ $10^n-4 = 10^5-4 = 99996$ ចែកដាច់នឹង13 ១ពិន្ទុ

ករណីនេះគេបាន $x = \dfrac{2(99996)}{13} = 15384$ ហើយ $\boxed{\overline{x_1x_2\cdots x_n6} = 153846}$ ១ពិន្ទុ

៣-(១៥ពិន្ទុ) កំណត់គ្រប់អនុគមន៍នៃលេខ g :

ដោយចែកគ្រប់អង្គនឹង x^2-y^2 : $\dfrac{g(x+y)}{x+y} - \dfrac{g(x-y)}{x-y} = 4xy$ ២ពិន្ទុ

តាង $f(x) = \dfrac{g(x)}{x}$ នោះ $g(x) = xf(x)$ ២ពិន្ទុ

គេបាន $f(x+y) - f(x-y) = 4xy \qquad (1)$ ១ពិន្ទុ

www.pisethsok.wordpress.com គ្រូបង្រៀនគណិតវិទ្យា
សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

យក $x = x_0 + \frac{h}{2}$; $y = \frac{h}{2}$

(1) អាចសរសេរ $f(x_0+h) - f(x_0) = 4(x_0 + \frac{h}{2})(\frac{h}{2})$ ២ពិន្ទុ

$\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(2x_0 + h)$

$f'(x_0) = 2x_0$ ៣ពិន្ទុ

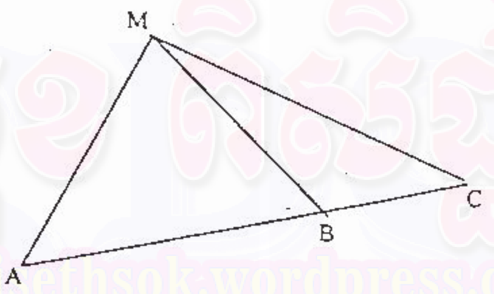
$f'(x) = 2x$ ១ពិន្ទុ

$f(x) = x^2 + c \quad (c \in \mathbb{R})$ ២ពិន្ទុ

$g(x) = x(x^2 + c) = x^3 + cx \quad (c \in \mathbb{R})$

$$\boxed{g(x) = x^3 + cx \quad (c \in \mathbb{R})}$$ ២ពិន្ទុ

៤-(១៥ពិន្ទុ)



៣ពិន្ទុ

កំណត់សំណុំចំនុច M :

តាង $AB = a$ នោះ $AC = AB + BC = a + \frac{a}{k^2-1} = \frac{ak^2}{k^2-1}$ ២ពិន្ទុ

$\Delta CAM \quad : MA^2 = CM^2 + CA^2 - 2CM.CA.\cos C$ ២ពិន្ទុ

$\Delta CBM \quad : MB^2 = CM^2 + CB^2 - 2CM.CB.\cos C$ ២ពិន្ទុ

តែ $MA^2 = k^2.MB^2$

$CM^2 + CA^2 - 2CM.CA.\cos C = k^2CM^2 + k^2CB^2 - 2k^2CM.CB.\cos C$ ២ពិន្ទុ

$(1-k^2)CM^2 = -\left(\frac{k^2a}{k^2-1}\right)^2 + \frac{2k^2a}{k^2-1}CM.\cos C + k^2\frac{a^2}{(k^2-1)^2} - \frac{2k^2a}{k^2-1}CM.\cos C$

$CM^2 = \frac{(ka)^2}{(k^2-1)^2}$ ២ពិន្ទុ

$CM = \frac{ka}{k^2-1}$

ដូចនេះ $\boxed{\text{សំណុំចំនុច M គឺជារង្វង់ផ្ចិត C កាំ } \frac{ka}{k^2-1} \text{ ដែល } k > 1}$ ២ពិន្ទុ

សុខ ពិសិដ្ឋ
www.pisethsok.wordpress.com
គ្រូបង្រៀនគណិតវិទ្យា

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

៥-(២៥ពិន្ទុ) ក- បង្ហាញថា $C(p;x)$ ជាពហុគុណនៃ p ចំពោះគ្រប់ x ដែល $0<x<p$:

$$C(p;x)=\frac{p!}{(p-x)!x!}=\frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-x+1)}{x!}$$ ១ពិន្ទុ

គេទាញបាន $p\mid(x!C(p;x))$ ២ពិន្ទុ

ដោយ $0<x<p$ និង p ជាចំនួនបឋម នោះ $(p,x!)=1$ ២ពិន្ទុ

ដោយ $p\mid x!\,C(p;x))$ និង $(p,x!)=1$ នោះ $p\mid C(p;x)$

ដូចនេះ $C(p;x)$ ជាពហុគុណនៃ p ចំពោះគ្រប់ x ដែល $0<x<p$ ២ពិន្ទុ

ខ-បង្ហាញថា $(a+b)^p-a^p-b^p$ ជាពហុគុណនៃ p ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ a និង b :

$$(a+b)^p-a^p-b^p=C(p;0)a^p+C(p;1)a^{p-1}b+\cdots+C(p;p-1)ab^{p-1}+$$
$$+C(p;p)b^p-a^p-b^p$$ ២ពិន្ទុ

$$=C(p;1)a^{p-1}b+\cdots+C(p;p-1)ab^{p-1}=\sum_{x=1}^{p-1}C(p;x)a^{p-x}b^x$$ ២ពិន្ទុ

តាមសំរាយបញ្ជាក់ខាងលើ : $p\mid C(p;x)$ ចំពោះ $0<x<p$

គេបាន $p\mid C(p;x)a^{p-x}b^x$ ចំពោះ $0<x<p$ ២ពិន្ទុ

គេទាញបាន $p\mid \sum_{x=1}^{p-1}C(p;x)a^{p-x}b^x$ គឺ $p\mid\left((a+b)^p-a^p-b^p\right)$

ដូចនេះ $(a+b)^p-a^p-b^p$ ជាពហុគុណនៃ p ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ a និង b ២ពិន្ទុ

គ- បង្ហាញថា a^p-a ចែកដាច់នឹង p ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ a :

-ចំពោះ $a=0$: $0^p-0\equiv 0\pmod p$: ពិត ២ពិន្ទុ

-ឧបមាថាទំនាក់ទំនងពិតដល់ $a=k$ គឺថា $k^p-k\equiv 0\pmod p$ ២ពិន្ទុ

-សិក្សាចំពោះ $a=k+1$:

$$A=(k+1)^p-(k+1)=((k+1)^p-k^p-1^p)+(k^p-k)$$ ២ពិន្ទុ

តាមសំនួរ (ខ): $(k+1)^p-k^p-1^p)\equiv 0\pmod p$ ១ពិន្ទុ

តាមសម្មតិកម្មកំណើន : $k^p-k\equiv 0\pmod p$ ១ពិន្ទុ

ទាញបាន : $A\equiv 0\pmod p$

ដូចនេះ a^p-a ចែកដាច់នឹង p ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ a ២ពិន្ទុ

៦-(២៥ពិន្ទុ)

ក- កំណត់ $f(1)$ និង $f(3)$:

$f(2)=f(1+1)=f(1)+f(1)=2f(1)=0$ គេបាន $f(1)=0$ ១ពិន្ទុ

ឬ $f(2)=f(1+1)=f(1)+f(1)+1=2f(1)+1=0$ មិនអាចមាន ព្រោះ $f(1)\ge 0$ ១ពិន្ទុ

ដូចនេះ $f(1)=0$ ១ពិន្ទុ

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

$f(3)=f(2+1)=f(2)+f(1)=0+0=0$ ១ពិន្ទុ

ឬ $f(3)=f(2+1)=f(2)+f(1)+1=0+0+1=1$ ១ពិន្ទុ

ដោយ $f(3)>0$ នោះ $\boxed{f(3)=1}$ ២ពិន្ទុ

ខ- បង្ហាញថា $f(3n)\geq n$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិមិនសូន្យ n :

-ចំពោះ $n=1$ $f(3\times 1)=f(3)=1$: ពិត ២ពិន្ទុ

-ឧបមាថាពិតដល់ $n=k$ គឺថា $f(3k)\geq k$ ២ពិន្ទុ

-សិក្សាចំពោះ $n=k+1$:

$f(3(k+1))=f(3k)+f(3)+\Big|^{0}_{1}=f(3k)+1+\Big|^{0}_{1}\geq k+1$: ពិត ២ពិន្ទុ

ដូចនេះ $\boxed{f(3n)\geq n \text{ ចំពោះគ្រប់ } n\geq 1}$ ២ពិន្ទុ

គ-កំណត់ $f(2005)$:

បើ $f(3n)>n$ នោះ $f(3(n+1))=f(3n)+f(3)+\Big|^{0}_{1}>\Big|^{n+1}_{n+2}$ គឺ $f(3(n+1))>n+1$

គឺថា $f(3p)>p$ ចំពោះ $p>n$ ។ ២ពិន្ទុ

តែ $f(3\times 3333)=3333$ & $f(3\times 1)=1$ នោះ $f(3n)=n$; $n\leq 3333$ ២ពិន្ទុ

គេអាចសរសេរ :

$f(2005)=f(3\times 668+1)=f(3\times 668)+f(1)+\Big|^{0}_{1}=668+\Big|^{0}_{1}\geq 668$ (1) ២ពិន្ទុ

ម្យ៉ាងទៀត : $2005=f(3\times 2005)=f((2005+2005)+2005)=$

$=f(2005+2005)+f(2005)+\Big|^{0}_{1}=f(2005)+f(2005)+\Big|^{0}_{1}+f(2005)+\Big|^{0}_{1}\geq 3f(2005)$

គឺ $f(2005)\leq \frac{2005}{3}=668+\frac{1}{3}$ (2) ២ពិន្ទុ

តាម (1) និង (2) : $668\leq f(2005)\leq 668+\frac{1}{3}$

ដោយ $f(2005)$ ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ នោះ $\boxed{f(2005)=668}$ ២ពិន្ទុ

ថ្ងៃទី ០៧ ខែ ឧសភា ឆ្នាំ ២០០៥

ប្រធានក្រុមកំណែ គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២

អ៊ី សាងលី

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស

ផ្នែកអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា

ថ្នាក់ទី ៩ និងទី ១២ ឆ្នាំសិក្សា ២០០៥-២០០៦

សម័យប្រឡង: ០៥-០៥-០៦

វិញ្ញាសា គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២ លើកទី២ ថ្ងៃទី ០៧-០៥-០៦ (រយៈពេល ៣ ម៉ោង)

១-(១០ពិន្ទុ) គណនាផលបូក $S=\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{2005^2}+\frac{1}{2006^2}}$ ។

២-(១០ពិន្ទុ) ស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (a_n) កំណត់ដោយ $a_0>2$ និង $a_n=\frac{1}{2}\left(a_{n-1}+\frac{4}{a_{n-1}}\right)$ ចំពោះ $n=1,2,3,\cdots$ ។

បង្ហាញថា $a_n>2$ ចំពោះគ្រប់ n ។

៣-(១០ពិន្ទុ) គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយ និង p ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ គេបន្លាយជ្រុង $[AB]$ ខាង B ឱ្យបាន $BD=\frac{1}{p}AB$ ។

គេបន្លាយជ្រុង $[BC]$ ខាង C ឱ្យបាន $CE=\frac{1}{p}BC$ ហើយ បន្លាយជ្រុង $[CA]$ ខាង A ឱ្យបាន $AF=\frac{1}{p}CA$ ។

គណនាផលធៀបផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ DEF និង ផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC ។

www.pisethsok.wordpress.com
គ្រូបង្រៀនគណិតវិទ្យា

៤-(២០ពិន្ទុ) គេយក E ជាសំណុំនៃចំនួនពិតដែលធំជាង (-1) ។

អនុគមន៍ $f:E\rightarrow E$ កំណត់ដោយ $f(x+f(y)+xf(y))=y+f(x)+yf(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x;y\in E$

ហើយ $\frac{f(x)}{x}$ កើនដាច់ខាត ចំពោះ $-1<x<0$ និង $x>0$ ។ កំណត់អនុគមន៍ f នោះ ។

៥-(២៥ពិន្ទុ) គេមាន $[BC]$ ជាអង្កត់ធ្នូនឹងមួយនៃរង្វង់ (Γ) មួយ ។ A ជាចំណុចចល័តនៅលើធ្នូធំ BC នៃ (Γ) ។

I ជាផ្ចិតនៃរង្វង់ចារឹកក្នុង ΔABC ហើយ J ជាផ្ចិតនៃរង្វង់ដែលនៅក្រៅ ΔABC ហើយប៉ះនឹង $[BC]$, $[AB)$ និង $[AC)$ ។

ក- កំណត់សំណុំនៃចំណុច I និង J កាលណា A ចល័តនៅលើធ្នូធំ BC ។

ខ- សង់ សំណុំនៃចំណុច I និង J ។

៦-(២៥ពិន្ទុ) គេមាន a និង b ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ d ជាតួចែករួមធំបំផុតរបស់ a និង b ។

ក- បង្ហាញថា មានចំនួនគត់សនិទាន u និង v ដែល $au+bv=d$

ខ- ដោះស្រាយសមីការ $19x-33y=1$ ដែលមានអញ្ញាត x ; y ជាចំនួនគត់សនិទាន ។

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

អត្រាកំណែ គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២

សំរាប់ថ្ងៃទី ០៧-០៥-០៦

១-(១០ពិន្ទុ) គណនាផលបូក $S=\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{2005^2}+\frac{1}{2006^2}}$:

គេមាន : $1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{x^4+x^2+1+2x^3+2x^2+2x}{x^2(x+1)^2}$ ២ពិន្ទុ

$$=\frac{(x^2+x+1)^2}{x^2(x+1)^2}$$ ២ពិន្ទុ

$$\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}}=\frac{x^2+x+1}{x(x+1)}=1+\frac{1}{x(x+1)}$$

$$=1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$$ ២ពិន្ទុ

$$S=\left(1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{2005}-\frac{1}{2006}\right)$$ ២ពិន្ទុ

$$\boxed{S=2005+\frac{2005}{2006}}$$ ២ពិន្ទុ

២-(១០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $a_n>2$ ចំពោះគ្រប់ n

តាមសម្មតិកម្មគេមាន $a_0>2$ ។

- ចំពោះ $n=1$, $a_1-2=\frac{1}{2}\left(a_0+\frac{4}{a_0}\right)=\frac{(a_0-2)^2}{2a_0}>0$

ដូចនេះ $a_1>2$

- ឧបមាថា $a_k>2$

- ពិនិត្យចំពោះ $n=k+1$

$$a_{k+1}=\frac{1}{2}\left(a_k+\frac{4}{a_k}\right)$$ ២ពិន្ទុ

ដោយ $a_k>2$ នោះ $0<\frac{4}{a_k}<2<a_k$ គឺ $a_k\neq\frac{4}{a_k}$ (1 ពិន្ទុ)

តាមវិសមភាពកូស៊ី គេបាន $a_{k+1}>\frac{1}{2}\left(2\sqrt{a_k\times\frac{4}{a_k}}\right)$

$$a_{k+1}>2$$ (1 ពិន្ទុ) ~~២ពិន្ទុ~~

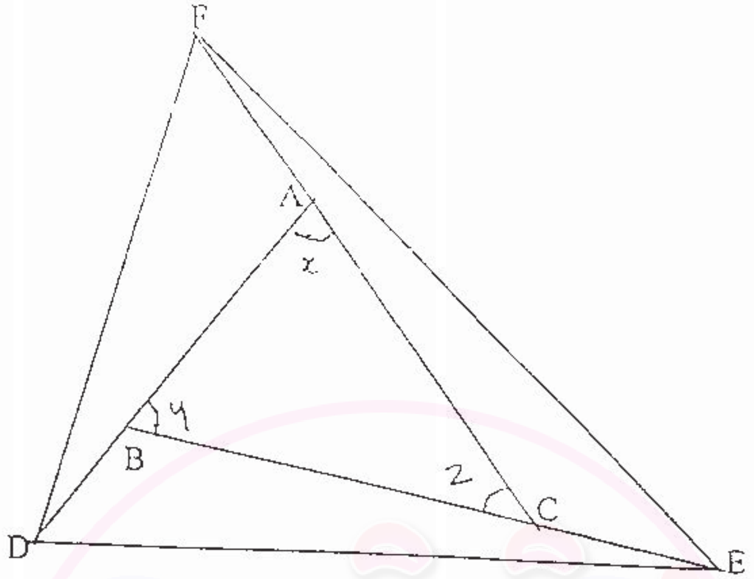
ដូចនេះ

$$\boxed{a_n>2 \text{ ចំពោះគ្រប់ } n}$$ ២ពិន្ទុ

$a_1=\frac{1}{2}\left(a_0+\frac{4}{a_0}\right)\geq\frac{1}{2}\times2\sqrt{a_0\times\frac{4}{a_0}}=$; ឬ $a_1=\frac{1}{2}\left(a_0+\frac{4}{a_0}\right)>\frac{1}{2}\times2\sqrt{a_0\times\frac{4}{a_0}}=2$; ដោយ $a_0>2$ ឬ $0<\frac{1}{a_0}<\frac{1}{2}$, $\frac{4}{a_0}<2$, $a_0>2$ $\Rightarrow\frac{4}{a_0}\neq a_0$ ២ពិន្ទុ ; ឧបមាថា $a_k\geq2$ (1ពិន្ទុ)

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

៣-(១០ពិន្ទុ) គណនាផលធៀបផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ DEF និង ផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC :



២ពិន្ទុ

តាង $B\hat{A}C = x \; ; \; A\hat{B}C = y \; ; \; B\hat{C}A = z$

គេមាន $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin x$ ២ពិន្ទុ

$S_{AFD} = \frac{1}{2} AF \cdot AD \sin(\pi - x)$

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{p} AC \times \frac{p+1}{p} AB \sin x$ ២ពិន្ទុ

$= \frac{p+1}{p^2} S_{ABC}$

$S_{CEF} = \frac{1}{2} CE \cdot CF \sin(\pi - z)$

$= \frac{p+1}{p^2} S_{ABC}$ ១ពិន្ទុ

$S_{BDE} = \frac{1}{2} BD \cdot BE \sin(\pi - y)$

$= \frac{p+1}{p^2} S_{ABC}$ ១ពិន្ទុ

គេបាន $S_{DEF} = \frac{3p+3}{p^2} S_{ABC} + S_{ABC} = \frac{p^2+3p+3}{p^2} S_{ABC}$

ដូចនេះ

$$\boxed{\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \frac{p^2+3p+3}{p^2}}$$

២ពិន្ទុ

សុខ ពិសិដ្ឋ www.pisethsok.wordpress.com គ្រូបង្រៀនគណិតវិទ្យា

thinking if x = y then f(?) = x

4-(២០ពិន្ទុ) កំណត់អនុគមន៍ f :

ឧបមាថា $f(p) = p$ ចំពោះ $p > -1$ ២ពិន្ទុ

យក $x = y = p$ នោះគេបាន $f(2p + p^2) = 2p + p^2$ (1) ២ពិន្ទុ

តាង $q = 2p + p^2$ នោះ (1) អាចសរសេរ $f(q) = q$ ២ពិន្ទុ

- បើ $-1 < p < 0$ នោះគេបាន $-1 < q < p$

តែ $f(p) = p$ និង $f(q) = q$ នោះ $\frac{f(p)}{p} = \frac{f(q)}{q}$ ដែលផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម ៣ពិន្ទុ

- បើ $p > 0$ នោះគេបាន $q > p$

តែ $\frac{f(p)}{p} = \frac{f(q)}{q}$ ដែលផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម ៣ពិន្ទុ

ដូចនេះ គេត្រូវតែបាន $p = 0$ ហើយ $f(0) = 0$ ៣ពិន្ទុ

ម្យ៉ាងទៀត យក $x = y$ ជំនួសក្នុងទំនាក់ទំនងដើម :

$f(x + f(x) + xf(x)) = x + f(x) + xf(x)$ ដែលមានរាង $f(p) = p$ ២ពិន្ទុ

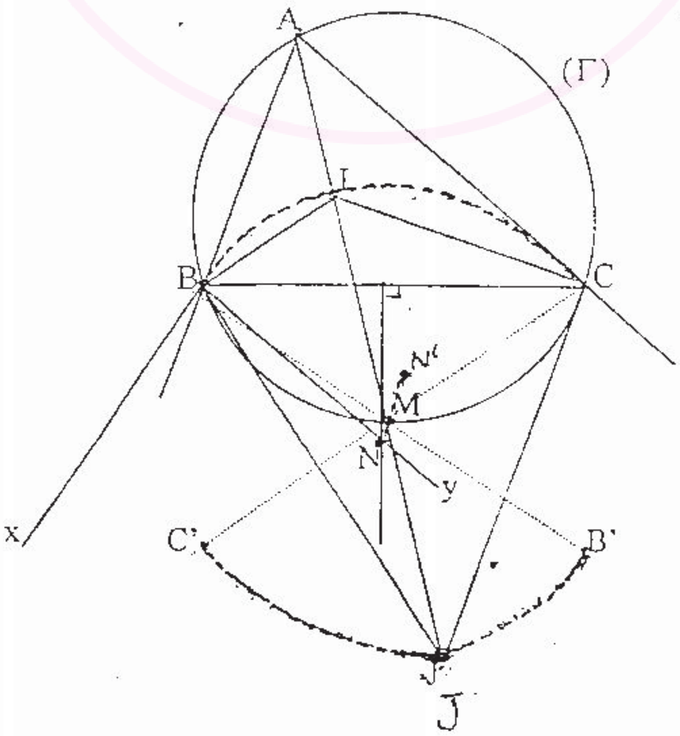
ដូចនេះចំពោះគ្រប់ $x \in E$ គេបាន $x + f(x) + xf(x) = 0$

$$(1 + x)f(x) = -x$$

$$\boxed{f(x) = -\frac{x}{1 + x}}$$ ៣ពិន្ទុ

www.pisethsok.wordpress.com

5-(២៥ពិន្ទុ)ក- កំណត់សំណុំនៃចំណុច I និង J កាលណា A ចល័តនៅលើធ្នូធំ BC :



៣ពិន្ទុ

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

សំណង់សំណុំចំណុច I :

- សង់ [Bx) ដែល $x\hat{B}C = 90^0 + \alpha$ ហើយសង់ [By) ⊥ [Bx) ១ពិន្ទុ

- សង់មេដ្យាទ័រ (d) នៃ [BC] ។ យក $\{N\} = (d) \cap [By)$ ១ពិន្ទុ

- យក N ជាផ្ចិត សង់ធ្នូ BIC ។ យកផ្នែកនៃ ធ្នូ BIC ដែលគ្មានចំណុច B & C ។ ១ពិន្ទុ

សំណង់សំណុំចំណុច J :

- សង់ B' ដែល $B' = S_M(B)$ - សង់ C' ដែល $C' = S_M(C)$ ១ពិន្ទុ

- សង់ N' ដែល $N' = S_M(N)$ -យក N' ជាផ្ចិត សង់ធ្នូ B'JC' ១ពិន្ទុ

- យកផ្នែកនៃ ធ្នូ B'JC' ដែលគ្មានចំណុច B' & C' ។ ១ពិន្ទុ

៦-(២៥ពិន្ទុ) ក- បង្ហាញថា មានចំនួនគត់សនិទាន u និង v ដែល $au + bv = d$:

តាម Euclidean Algorithm គេបាន :

$a = bq_1 + r_1$ $\quad r_1 < b$ $\quad (1)$

$b = r_1q_2 + r_2$ $\quad r_2 < r_1$ $\quad (2)$ ២ពិន្ទុ

$r_1 = r_2q_3 + r_3$ $\quad r_3 < r_2$ $\quad (3)$

....

$r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n$ $\quad r_n < r_{n-1}$ $\quad (n)$ ២ពិន្ទុ

$r_{n-1} = r_n q_{n+1}$ $\quad (n+1)$

គេបាន $r_n = d$ ២ពិន្ទុ

គេនឹងបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន p ដែល $1 \le p \le n$, $r_p = x_p a + y_p b$

ដោយ $x_p , y_p \in Z$

- តាម (1) : $r_1 = 1 \cdot a + (-q)b = x_1 a + y_1 b$: ពិតចំពោះ $p = 1$ ២ពិន្ទុ

- ឧបមាថាពិតដល់ $r_{p-1} = x_{p-1} a + y_{p-1} b$ ដែល $x_{p-1} , y_{p-1} \in Z$ ២ពិន្ទុ

- ពិនិត្យករណី r_p :

តាម (n) គេអាចសរសេរ $r_{p-2} = r_{p-1}q_p + r_p$ ២ពិន្ទុ

$r_p = r_{p-2} \quad + (-q_p) \quad r_{p-1}$

$= (x_{p-2}a + y_{p-2}b) + (-q_p)(x_{p-1}a + y_{p-1}b)$ ដែល $x_{p-2}, x_{p-1}, y_{p-2}, y_{p-1} \in Z$ ២ពិន្ទុ

$= (x_{p-2} - q_p x_{p-1})a + (y_{p-2} - q_p y_{p-1})b$

$r_p = x_p a + y_p b$ ដែល $x_p = x_{p-2} - q_p x_{p-1}$; $y_p = y_{p-2} - q_p y_{p-1} \in Z$ ៣ពិន្ទុ

បានន័យថា ទំនាក់ទំនងពិតចំពោះគ្រប់ p ដែល $1 \le p \le n$

យក $p = n$ គេបាន $r_n = x_n a + y_n b$ ដែល $x_n , y_n \in Z$

ដូចនេះ $\boxed{\text{មាន } u = x_n ,\ v = y_n \in Z \text{ ដែល } d = au + bv}$ ២ពិន្ទុ

www.pisethsok.wordpress.com
សុខ ពិសិដ្ឋ
គ្រូបង្រៀនគណិតវិទ្យា

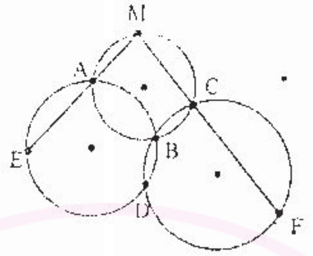
ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស

ផ្នែកអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា

សម័យប្រឡង: ០១.០៤.២០០៩

វិញ្ញាសា: គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២ លើកទី១ ថ្ងៃទី ០១.០៤.០៩ (រយៈពេល ១៨០ នាទី ពិន្ទុ ១០០)

១. (១០ពិន្ទុ) គេឲ្យរង្វង់បីដែលកាត់គ្នាតាមរូបខាងក្រោម ។ សង់រូបឡើងវិញហើយបង្ហាញថាចំណុច E ; D និង F នៅលើបន្ទាត់តែមួយ ។



២. (១០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $1^{2009}+2^{2009}+3^{2009}+\cdots+(n-1)^{2009}+n^{2009}$ ចែកមិនដាច់នឹង $n+2$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។

៣. (១៥ពិន្ទុ) គេមាន $f(x)=x^2-3x+3$ ។

ក. បង្ហាញថា បើ $f(x)=x$ នោះ $f(f(x))=x$ ។

ខ. រកឫសនៃសមីការ $f(x)=x$ ។ ទាញរកឫសនៃសមីការ $(x^2-3x+3)^2-3(x^2-3x+3)+3=x$ ។

៤. (១៥ពិន្ទុ) គេតាង $n!=n(n-1)(n-2)\times\cdots\times 2\times 1$ ។ បង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n គេបាន :

$$1+\frac{2009}{1!}+\frac{(2009)(2010)}{2!}+\cdots+\frac{(2009)(2010)\cdots(2009+n-1)}{n!}=\frac{(2010)(2011)\cdots(2009+n)}{n!}$$

៥. (១៥ពិន្ទុ) អនុគមន៍ g កំណត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ដោយ $g(x+1)+g(x-1)=\sqrt{2}\,g(x)$ ។

ក. គេតាង $g(x)=p$ និង $g(x-1)=q$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។

គណនា $g(x+1), g(x+2), g(x+3)$ និង $g(x+4)$ ជាអនុគមន៍នៃ p និង q ។

ខ. បង្ហាញថា g ជាអនុគមន៍ខួប ។

៦. (១៥ពិន្ទុ) គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) ដែលកំណត់ដោយ $u_1=\frac{1}{2}$ និង $u_n=\left(\frac{2n-3}{2n}\right)u_{n-1}$ ចំពោះ $n=2;3;\cdots$ ។

បង្ហាញថា $u_1+u_2+\cdots+u_n<1$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។

៧. (២០ពិន្ទុ) ត្រីកោណកែង ABC មួយមានអ៊ីប៉ូតេនុស $BC=a$ និងកម្ពស់ $AH=h$ ។ គេចែក $[BC]$ ជា n ចំណែកស្មើៗគ្នា ដែល n ជាចំនួនគត់សេស ។ គេយក $[PQ]$ ជាចំណែកដែលនៅកណ្តាលគេ ហើយដែលរង្វាស់មុំ $P\hat{A}Q=x$ ។

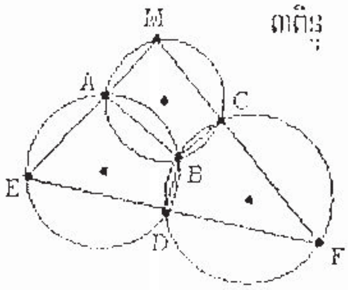
បង្ហាញថា $\tan x=\frac{4nh}{a(n^2-1)}$ ។

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

អត្រាកំណែគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២

សម្រាប់ថ្ងៃទី ០១_០៤_២០០៩

១. (១០ពិន្ទុ) បង្ហាញថាចំណុច E; D និង F នៅលើបន្ទាត់តែមួយ :



៣ពិន្ទុ

គេមាន

$E\hat{D}B = M\hat{A}B$ ២ពិន្ទុ

$M\hat{A}B = B\hat{C}F$

គេបាន $E\hat{D}B = B\hat{C}F$ ២ពិន្ទុ

តែ $B\hat{C}F + B\hat{D}F = 180^0$ នោះ $E\hat{D}B + B\hat{D}F = 180^0$ ៣ពិន្ទុ

ដូចនេះ ចំណុច E; D និង F នៅលើបន្ទាត់តែមួយ ។

២. (១០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $1^{2009} + 2^{2009} + 3^{2009} + \cdots + (n-1)^{2009} + n^{2009}$ ចែកមិនដាច់នឹង $n+2$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n :

គេមាន

$S_n = 1^{2009} + 2^{2009} + 3^{2009} + \cdots + (n-1)^{2009} + n^{2009}$

$2S_n = (n^{2009} + 2^{2009}) + ((n-1)^{2009} + 3^{2009}) + \cdots + (2^{2009} + n^{2009}) + 1^{2009} + 1^{2009}$ ២ពិន្ទុ

$= (n+2)k_1 + (n+2)k_2 + \cdots + (n+2)k_{n-1} + 2$ ៣ពិន្ទុ

$= (n+2)k + 2$ ដែល $k = k_1 + k_2 + \cdots + k_{n-1}$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន

គេទាញបាន $2S_n$ ចែកមិនដាច់នឹង $n+2$ ៣ពិន្ទុ

ដូចនេះ S_n ចែកមិនដាច់នឹង $n+2$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។ ២ពិន្ទុ

៣. (១៧ពិន្ទុ) គេមាន $f(x) = x^2 - 3x + 3$ ។

ក. បង្ហាញថា បើ $f(x) = x$ នោះ $f(f(x)) = x$:

បើ $f(x) = x$ នោះ $f(f(x)) = f(x)$

ដូចនេះ $f(f(x)) = x$ ព្រោះ $f(x) = x$ ៣ពិន្ទុ

ខ. រកឫសនៃសមីការ $f(x) = x$:

សមីការ $f(x) = x$ អាចសរសេរជា $x^2 - 4x + 3 = 0$ ដែលមានឫស $x_1 = 1$; $x_2 = 3$ ៣ពិន្ទុ

ទាញ រកឫសនៃសមីការ $(x^2 - 3x + 3)^2 - 3(x^2 - 3x + 3) + 3 = x$:

សមីការ $(x^2 - 3x + 3)^2 - 3(x^2 - 3x + 3) + 3 = x$ អាចសរសេរជា

$f(f(x)) = x$ ដែលជាសមីការផលវិបាកនៃ $f(x) = x$ ៣ពិន្ទុ

គេទាញបាន $x_1 = 1$; $x_2 = 3$ ជាឫសនៃ $(x^2 - 3x + 3)^2 - 3(x^2 - 3x + 3) + 3 = x$

ពី $x_1 = 1$; $x_2 = 3$ ជាឫសនៃ $x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10x + 3 = 0$ ៣ពិន្ទុ

$(x^2 - 4x + 3)(x-1)^2 = 0$

សមីការមានឫស $x_1 = 1$; $x_2 = 3$ ៣ពិន្ទុ

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

(១៥ពិន្ទុ) បង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n គេបាន :

$$1+\frac{2009}{1!}+\frac{(2009)(2010)}{2!}+\cdots+\frac{(2009)(2010)\cdots(2009+n-1)}{n!}=\frac{(2010)(2011)\cdots(2009+n)}{n!}$$

- ចំពោះ $n=1$: $1+\frac{2009}{1}=\frac{2010}{1}$ ជាសមភាពដែលពិត ៣ពិន្ទុ

- ឧបមាថា សមភាពពិតដល់ $n=k$ មានន័យថា :

$$1+\frac{2009}{1!}+\frac{(2009)(2010)}{2!}+\cdots+\frac{(2009)(2010)\cdots(2009+k-1)}{k!}=\frac{(2010)(2011)\cdots(2009+k)}{k!}$$ ៣ពិន្ទុ

- ពិនិត្យចំពោះ $n=k+1$

$$1+\frac{2009}{1!}+\frac{(2009)(2010)}{2!}+\cdots+\frac{(2009)(2010)\cdots(2009+k-1)}{k!}+\frac{(2009)(2010)\cdots(2009+k)}{(k+1)!}=$$

$$=\frac{(2010)(2011)\cdots(2009+k)}{k!}+\frac{(2009)(2010)\cdots(2009+k)}{(k+1)!}$$ ៣ពិន្ទុ

$$=\frac{(2010)(2011)\cdots(2009+k)(k+1)}{(k+1)!}+\frac{(2009)(2010)\cdots(2009+k)}{(k+1)!}$$ ៣ពិន្ទុ

$$=\frac{(2010)(2011)\cdots(2009+k)(2009+(k+1))}{(k+1)!}$$ ពិតចំពោះ $n=k+1$ ៣ពិន្ទុ

៥. (១៥ពិន្ទុ) ក. គណនា $g(x+1); g(x+2); g(x+3); g(x+4)$:

គេមាន $g(x+1)=\sqrt{2}\,g(x)-g(x-1)$

ដោយ $g(x-1)=q$; $g(x)=p$ ចំពោះគ្រប់ $x\in R$ នោះគេបាន ១ពិន្ទុ

$g(x+1)=\sqrt{2}\,p-q$

$g(x+2)=\sqrt{2}\,g(x+1)-g(x)=\sqrt{2}(\sqrt{2}\,p-q)-p=p-\sqrt{2}\,q$ ចំពោះគ្រប់ $x\in R$ ២ពិន្ទុ

$g(x+3)=\sqrt{2}\,g(x+2)-g(x+1)=\sqrt{2}(p-\sqrt{2}\,q)-\sqrt{2}p+q=-q$ ចំពោះគ្រប់ $x\in R$ ២ពិន្ទុ

$g(x+4)=\sqrt{2}\,g(x+3)-g(x+2)=\sqrt{2}(-q)-p+\sqrt{2}\,q=-p=-g(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x\in R$ ២ពិន្ទុ

ខ. បង្ហាញថា g ជាអនុគមន៍ខួប :

$g(x+5)=\sqrt{2}\,g(x+4)-g(x+3)=-\sqrt{2}\,p+q$ ចំពោះគ្រប់ $x\in R$ ២ពិន្ទុ

$g(x+6)=\sqrt{2}\,g(x+5)-g(x+4)=\sqrt{2}(-\sqrt{2}\,p+q)-(-p)=\sqrt{2}\,q-p$ ចំពោះគ្រប់ $x\in R$ ២ពិន្ទុ

$g(x+7)=\sqrt{2}\,g(x+6)-g(x+5)=\sqrt{2}(\sqrt{2}\,q-p)-(-\sqrt{2}p+q)=q$ ចំពោះគ្រប់ $x\in R$ ២ពិន្ទុ

$g(x+8)=\sqrt{2}\,g(x+7)-g(x+6)=\sqrt{2}\,q-(\sqrt{2}\,q-p)=p=g(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x\in R$ ១ពិន្ទុ

ដូចនេះ g ជាអនុគមន៍ខួប ។

របៀបទី២ : តាមសំណួរខាងលើ $g(x+4)=-g(x)$ នោះគេអាចសរសេរ : ៤ពិន្ទុ

$g(x+8)=g((x+4)+4)=$

$g(x+8)=-g(x+4)=-(-g(x))=g(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x\in R$ ៤ពិន្ទុ

ដូចនេះ g ជាអនុគមន៍ខួប ។

៦. (១៥ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $u_1+u_2+\cdots+u_n<1$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។ ៣ពិន្ទុ

- ចំពោះ $k\geq 2$ គេបាន $2ku_k=2ku_{k-1}-3u_{k-1}$ ហើយ $u_{k-1}=2(k-1)u_{k-1}-2ku_k$

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

ដោយប្តូរតម្លៃ $k=2;\cdots;n-1$

$u_1 = 2u_1 - 4u_2$

$u_2 = 4u_2 - 6u_3$ ៣ពិន្ទុ

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

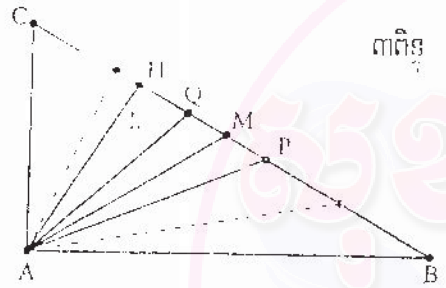
$u_{n-1} = 2(n-1)u_{n-1} - 2nu_n$ ៣ពិន្ទុ

$u_n = 2nu_n - 2(n+1)u_{n+1}$

$$\sum_{i=1}^{n} u_i = 2u_1 - (2n+2)u_{n+1} = 1-(2n+2)u_{n+1}$$ ៣ពិន្ទុ

ដោយ $u_n > 0$ ចំពោះគ្រប់ n នោះ $u_1+u_2+\cdots+u_n<1$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។ ៣ពិន្ទុ

ឃ. (២០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $\tan x = \dfrac{4nh}{a(n^2-1)}$:



៣ពិន្ទុ

តាង M ជាចំណុចកណ្ដាលនៃ$[BC]$ ។

យើងមាន $x = \hat{PAQ} = \hat{PAH} - \hat{QAH}$ ២ពិន្ទុ

$\tan x = \tan\left(\hat{PAH} - \hat{QAH}\right)$

$$= \frac{\tan\hat{PAH} - \tan\hat{QAH}}{1+\tan\hat{PAH}\times\tan\hat{QAH}}$$ ៣ពិន្ទុ

ដែល $\tan\hat{PAH} = \dfrac{HP}{HA}$; $\tan\hat{QAH} = \dfrac{HQ}{HA}$

$$\tan x = \frac{(HP-HQ)\times HA}{HA^2+HP\times HQ} = \frac{PQ\times HA}{HA^2+HP\times HQ} \quad (1)$$ ៣ពិន្ទុ

ដោយ $HP = HM + MP = HM + \dfrac{a}{2n}$ និង $HQ = HM - MQ = HM - \dfrac{a}{2n}$ ៣ពិន្ទុ

$$HM^2 = AM^2 - AH^2 = \frac{a^2-4h^2}{4}$$

$$HP\times HQ = HM^2 - \frac{a^2}{4n^2} = \frac{a^2-4h^2}{4} - \frac{a^2}{4n^2} = \frac{a^2n^2-4n^2h^2-a^2}{4n^2}$$ ៣ពិន្ទុ

$$\tan x = \frac{ah}{n}\times\frac{4n^2}{4n^2h^2+a^2n^2-4n^2h^2-a^2} = \frac{4nh}{a(n^2-1)}$$ ៣ពិន្ទុ

ថ្ងៃទី ០១ ខែ មេសា ឆ្នាំ ២០០៩

ប្រធានក្រុមកំណែ គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២

អ៊ី សៀងលី

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស

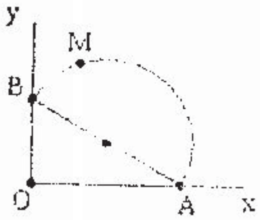
ផ្នែកអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា

សម័យប្រឡង: ០១.០៤.២០០៩

វិញ្ញាសា គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២ លើកទី២ ថ្ងៃទី ០៣.០៤.០៩ (រយៈពេល ១៨០ នាទី ពិន្ទុ ១០០)

១. (១០ពិន្ទុ) គេឲ្យចំណុច M មួយនៃកន្លះរង្វង់ដែលមានអង្កត់ផ្ចិត [AB] ។

រកសំណុំចំណុចនៃចំណុច M កាលណា A ចល័តលើផ្នែក [Ox) និង B ចល័តលើ ផ្នែក [Oy) នៃមុំកែង xOy មួយដោយរក្សាប្រវែង AB ថេរ ។



២. (១០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $3^{2n} + 2^{6n-5}$ ចែកដាច់នឹង 11 ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។

៣. (១៥ពិន្ទុ) គេឲ្យចំនួនគត់វិជ្ជមាន a និង b ដែល $2a^2 + a = 3b^2 + b$ ។

បង្ហាញថា $a - b$; $2a + 2b + 1$ និង $3a + 3b + 1$ សុទ្ធតែជាការេប្រាកដ ។

៤. (១៥ពិន្ទុ) សំណុំ E_n មួយមាន n ធាតុដែល n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ តាង $P(E_n)$ ជាសំណុំនៃសំណុំរងរបស់ E_n ហើយ

$\text{Card}\left(P(E_n)\right)$ ជាចំនួនធាតុនៃ $P(E_n)$ ។ តាមវិចារដោយកំណើន បង្ហាញថា $\text{Card}\left(P(E_n)\right) = 2^n$ ។

៥. (១៥ពិន្ទុ) ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC = a$; $AC = b$ ដែល $a + b = (a\tan A + b\tan B)\tan\frac{C}{2}$ ។

បង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណសមបាត ។

៦. (១៥ពិន្ទុ) ស្វ៊ីត (x_n) មួយកំណត់ដោយ $x_1 = 1$ និង $x_{n+1} = 1 + x_1 x_2 \cdots x_n$ ចំពោះ $n = 1, 2, \cdots$ ។

គេតាងផលបូក $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}$ ។

គណនា $\lim_{n \to +\infty} S_n$ ។

៧. (២០ពិន្ទុ) អនុគមន៍ $f(x;y)$ មួយផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌទាំងបីខាងក្រោមចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន x និង y :

(i) $f(0;y) = 1 + y$

(ii) $f(x+1;0) = f(x;1)$

(iii) $f(x+1;y+1) = f\left(x; f(x+1;y)\right)$ ។

ក. គណនា $f(1;n)$, $f(2;n)$ និង $f(3;n)$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ. គណនា $f(4;2009)$ ។

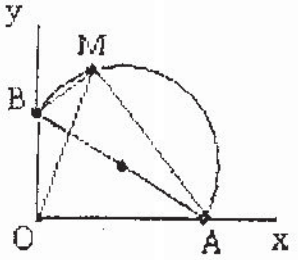
www.pisethsok.wordpress.com

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

អត្រាកំណែ គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២

សម្រាប់ថ្ងៃទី ០៣_០៤_០៩

១. (១០ពិន្ទុ) រកសំណុំចំណុចនៃចំណុច M :



២ពិន្ទុ ចតុកោណ AMBO ចារឹកក្នុងរង្វង់មួយ ។

គេតាង $\hat{MAB} = \alpha$ ថេរ $AB = 2R$ ថេរ

គេបាន $\hat{MOB} = \hat{MAB} = \alpha$ ថេរ ២ពិន្ទុ

បានន័យថា M នៅលើ $[OM)$ ដែល $\hat{MOy} = \alpha$ ២ពិន្ទុ

លីមីត: - បើ $A = O$ នោះ $B = B_1$ ដែល $OB_1 = 2R$ ហើយ $M = M_1$ ដែល $OM_1 = 2R\cos\alpha$

- បើ $B = O$ នោះ $A = A_1$ ដែល $OA_1 = 2R$ ហើយ $M = M_2$ ដែល $OM_2 = 2R\sin\alpha$ ២ពិន្ទុ

សន្និដ្ឋាន :

សំណុំចំណុចនៃចំណុច M គឺជា $[M_1M_2]$ នៃ $[OM)$ ដែល $\hat{MOy} = \alpha$, $OM_1 = 2R\cos\alpha$ និង $OM_2 = 2R\sin\alpha$ ។ ២ពិន្ទុ

២. (១០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $3^{2n} + 2^{6n-5}$ ចែកដាច់នឹង 11 ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n :

ចំពោះ $n = 1$ គេបាន $3^2 + 2^{6\times1-5} = 11$ ចែកដាច់នឹង 11 : ពិត ២ពិន្ទុ

ឧបមាថាពិតដល់ $n = k$ គឺថា $3^{2k} + 2^{6k-5} = 11p$, $p \in Z^+$ ៣ពិន្ទុ

នាំឱ្យ $3^{2k} = 11p - 2^{6k-5}$, $p \in Z^+$

ពិនិត្យចំពោះ $n = k+1$ គេបាន $3^{2(k+1)} + 2^{6(k+1)-5} = 9\times3^{2k} + 2^6\times2^{6k-5}$ ២ពិន្ទុ

$= 9\times11p - 9\times2^{6k-5} + 2^6\times2^{6k-5} = 11(9p + 5\times2^{6k-5})$ ចែកដាច់នឹង 11 : ពិត

ដូចនេះ $3^{2n} + 2^{6n-5}$ ចែកដាច់នឹង 11 ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។ ៣ពិន្ទុ

៣. (១៥ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $a - b$; $2a + 2b + 1$ និង $3a + 3b + 1$ សុទ្ធតែជាការេប្រាកដ :

ដោយ $2a^2 + a = 3b^2 + b$ នោះគេបាន :

$a^2 = a - b + 3a^2 - 3b^2 = (a-b)(3a+3b+1)$ ៣ពិន្ទុ

$b^2 = a - b + 2a^2 - 2b^2 = (a-b)(2a+2b+1)$

បើ δ ជាតួចែករួមធំបំផុតនៃ $3(a+b)+1$ & $2(a+b)+1$ នោះ $\delta \mid (6a+6b+3-6a-6b-2)$ គឺ $\delta \mid 1$ ៣ពិន្ទុ

ដូចនេះ $PGCD(3(a+b)+1; 2(a+b)+1) = 1$ ហើយ $PGCD(a^2; b^2) = a - b$

ម្យ៉ាងទៀត គេតាង $d = PGCD(a;b)$ នោះ $a = dp ; b = dq$ ដែល $PGCD(p;q) = 1$ ៣ពិន្ទុ

គេបាន $a^2 = d^2p^2 ; b^2 = d^2q^2$ ៣ពិន្ទុ

ដោយ $PGCD(p^2;q^2) = 1$ នោះ $d^2 = PGCD(a^2;b^2)$

គេទាញបាន $a - b = d^2 ; 3a + 3b + 1 = p^2 ; 2a + 2b + 1 = q^2$ ៣ពិន្ទុ

៤. (១៥ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $Card(P(E_n)) = 2^n$:

- ចំពោះ $n = 1$: $E_1 = \{a_1\}$ ហើយ $P(E_1) = \{\emptyset, \{a_1\}\}$ នោះគេបាន $Card(P(E_1)) = 2 = 2^1$ ៣ពិន្ទុ

- ឧបមាថាវាសំណើពិតដល់ $n = k$: គេបាន $E_k = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_k\}$ ហើយ $Card(P(E_k)) = 2^k$ ៣ពិន្ទុ

- ពិនិត្យចំពោះ $n = k+1$: គេបាន $E_{k+1} = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, a_{k+1}\} = E_k \cup \{a_{k+1}\}$ ៣ពិន្ទុ

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

$\lim_{n\to+\infty} 2^{n+1} = +\infty$ នោះ $\lim_{n\to+\infty} (x_{n+1} - 1) = +\infty$ ១ពិន្ទុ

នាំឱ្យ $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{x_{n+1} - 1} = 0$

ដូចនេះ $\lim_{n\to+\infty} S_n = 2$ ២ពិន្ទុ

៧-(២០ពិន្ទុ)

ក. គណនា $f(1;n)$, $f(2;n)$ និង $f(3;n)$ ជាអនុគមន៍នៃ n :

គេបាន $f(1;n) = f(0; f(1;n-1)) = 1 + f(1;n-1)$; $n \geq 1$ ១ពិន្ទុ

តាង $p_n = f(1;n)$ គេបាន $p_0 = f(1;0) = f(0;1) = 1+1 = 2$; $p_n = p_{n-1} + 1$ ចំពោះ $n \geq 1$

គេបាន (p_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមាន $p_0 = 2; d = 1$ ៣ពិន្ទុ

ដូចនេះ $f(1;n) = p_n = p_0 + nd = n + 2$

គេមាន $f(2;n) = f(1; f(2;n-1)) = f(2;n-1) + 2$; $n \geq 1$ ១ពិន្ទុ

តាង $q_n = f(2;n)$ គេបាន $q_0 = f(2;0) = f(1;1) = p_1 = 1 + 2 = 3; q_n = q_{n-1} + 2$ ចំពោះ $n \geq 1$

គេបាន (q_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមាន $q_0 = 3; d' = 2$

ដូចនេះ $f(2;n) = q_n = q_0 + nd' = 2n + 3$ ២ពិន្ទុ

គេមាន $f(3;n) = f(2; f(3;n-1)) = 2f(3;n-1) + 3$ ចំពោះ $n \geq 1$ ១ពិន្ទុ

$f(3;n) + 3 = 2(f(3;n-1) + 3)$

តាង $u_n = f(3;n) + 3$ នោះគេបាន $u_0 = f(3;0) + 3 = f(2;1) + 3 = (2 \times 1 + 3) + 3 = 8$

ហើយ $u_n = 2(f(3;n-1) + 3) = 2u_{n-1}$ ចំពោះ $n \geq 1$ ២ពិន្ទុ

គេបាន (u_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមាន $u_0 = 8$; $q = 2$ ១ពិន្ទុ

ហើយ $u_n = u_0 q^n = 2^{n+3}$

ដូចនេះ $f(3;n) = 2^{n+3} - 3$ ២ពិន្ទុ

ខ. គណនា $f(4;2009)$

គេមាន $f(4;n) = f(3; f(4;n-1)) = 2^{f(4;n-1)+3} - 3$, $n \geq 1$ ២ពិន្ទុ

$f(4;0) = f(3;1) = 2^4 - 3 = 2^{2^2} - 3$ មាននិទស្សន្ត 2 ចំនួន $0 + 2$ ដង ១ពិន្ទុ

$f(4;1) = 2^{f(4;0)+3} - 3 = 2^{16} - 3 = 2^{2^{2^2}} - 3$ មាននិទស្សន្ត 2 ចំនួន $1 + 2$ ដង ១ពិន្ទុ

....

$f(4;n) = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}} - 3$ មាននិទស្សន្ត 2 ចំនួន $n + 2$ ដង ២ពិន្ទុ

ដោយយក $n = 2009$ នោះ $f(4;2009) = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}} - 3$ មាននិទស្សន្ត 2 ចំនួន $2009 + 2 = 2011$ ដង ២ពិន្ទុ

ថ្ងៃទី ០៣ ខែ មេសា ឆ្នាំ ២០០៩

ប្រធានក្រុមកំរែ គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២

អ៊ី សាវឿន

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស

ផ្នែកអក្សរសាស្ត្រខ្មែរ គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា ថ្នាក់ទី ៩ និងថ្នាក់ទី ១២

[illegible]

វិញ្ញាសា: គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២ លើកទី២ ថ្ងៃទី ០៩.០៤.២០១០

រយៈពេល ១៨០នាទី ពិន្ទុ ១០០

I. (១០ពិន្ទុ) ១. ដោះស្រាយ [illegible] ជាចំនួនគត់ [illegible]

២. បង្ហាញថា [illegible] ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ [illegible]

II. (១០ពិន្ទុ) [illegible]

III. (១០ពិន្ទុ) ត្រីកោណ XYZ មួយមាន $X = $ [illegible] $, YZ = x, ZX = y$ និង $XY = z$ ។

បង្ហាញថា $x^2 \geq$ [illegible] [illegible]

IV. (១៥ពិន្ទុ) គេបានបេះផ្លែស្វាយមកប្រមូលជា 11 គំនរស្មើៗគ្នា ហើយនៅសល់ផ្លែស្វាយចំនួន 6 ផ្លែទៀត ។ តែបើគេយកផ្លែស្វាយទាំងនោះមកប្រមូលជា 17 គំនរស្មើៗគ្នាវិញ គេនៅតែមានផ្លែស្វាយនៅសល់ ។

រកចំនួនផ្លែស្វាយតិចបំផុតដែលគេបានបេះ ។

V. (២០ពិន្ទុ) ចតុកោណប៉ោង ABCD មួយមានជ្រុង $AB = a ; BC = b ; CD = c ; DA = d$ ។ យកមុំ $\hat{ABC} = x$ និង $\hat{ADC} = y$ ។

រកលក្ខខណ្ឌដើម្បីឲ្យចតុកោណ ABCD ចារឹកក្នុងរង្វង់បាន ។

VI. (២០ពិន្ទុ) ស្វ៊ីតនៃចំនួន (u_n) កំណត់ដោយ $u_1 = 1 ; u_2 = 1$ និង $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ ចំពោះ $n = 3, 4, \ldots$ ។

តាង $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ និង $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ។

១. បង្ហាញថា $u_n \geq a^{n-2}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n \geq 3$ ។

២. បង្ហាញថា $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(a^n - b^n)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

អត្រាកំណែគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២

សម្រាប់ថ្ងៃទី ០១-០៤-២០១០

k_2

$x^4+4y^4=(x^4+4x^2y^2+4y^4)-4x^2y^2=(x^2+2y^2+2xy)(x^2+2y^2-2xy)$ ៥ពិន្ទុ

២. បង្ហាញថា n^4+4^n មិនមែនជាចំនួនបឋមទេ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប $n>1$ ៖

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប $n>1$ គេមានពីរករណី ៖

- បើ $n=2k$ ដែល $k=1,2,\ldots$ គេបាន $n^4+4^n=16(k^4+16^{k-1})$ ដែលមិនមែនជាចំនួនបឋមទេ ។ ៥ពិន្ទុ
- បើ $n=2k+1$ ដែល $k=1,2,\ldots$ គេបាន $n^4+4^n=n^4+4^{2k+1}=n^4+4(2^k)^4$

$=(n^2+2^{2k+1}-n2^{k+1})(n^2+2^{2k+1}+n2^{k+1})$ ដែលមិនមែនជាចំនួនបឋមទេ ។ ៥ពិន្ទុ

II. ១៥ពិន្ទុ) រកអនុគមន៍ g ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $g(x)+g\left(\frac{1}{1-x}\right)=x$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ដែល $x\neq 0, x\neq 1$ ៖

- ជំនួស x ដោយ $\frac{1}{1-x}$ គេបាន $g\left(\frac{1}{1-x}\right)+g\left(1-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{1-x}$ ៥ពិន្ទុ
- ជំនួស x ដោយ $1-\frac{1}{x}$ គេបាន $g\left(1-\frac{1}{x}\right)+g(x)=1-\frac{1}{x}$ ៥ពិន្ទុ

គេបាន $g(x)+g\left(\frac{1}{1-x}\right)=x$ $\quad -g\left(\frac{1}{1-x}\right)-g\left(1-\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{1-x}$ $\quad g\left(1-\frac{1}{x}\right)+g(x)=1-\frac{1}{x}$

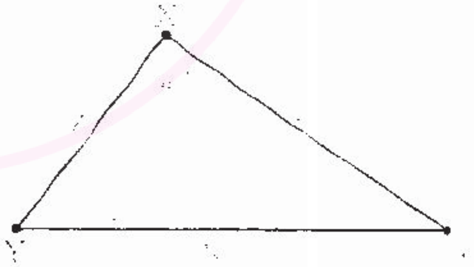
ដោយបូកអង្គ និងអង្គ គេបាន $g(x)=\frac{1}{2}\left(x+1-\frac{1}{x}-\frac{1}{1-x}\right)$ ចំពោះ $x\neq 0, x\neq 1$ ។ ៥ពិន្ទុ

III. ១៥ពិន្ទុ) ត្រីកោណកែង XYZ មួយមាន $\hat{X}=90^0$, $YZ=x$, $ZX=y$ និង $XY=z$ ។

បង្ហាញថា $x^n>y^n+z^n$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប n ដែល $n\geq 3$

- ចំពោះ $n=3$

គេមាន $x^2=y^2+z^2 \Rightarrow x^3=xy^2+xz^2$ ៥ពិន្ទុ



តែ $x>y \Rightarrow xy^2>y^3$ ហើយ $x>z \Rightarrow xz^2>z^3$

គេទាញបាន $x^3=xy^2+xz^2>y^3+z^3$

- ឧបមាថា $x^k>y^k+z^k$ ចំពោះ $k\geq 3$ ៥ពិន្ទុ
- ពិនិត្យចំពោះ $k+1$

$x^k>y^k+z^k \Rightarrow x^{k+1}>xy^k+xz^k$

តែ $x>y \Rightarrow xy^k>y^{k+1}$ ហើយ $x>z \Rightarrow xz^k>z^{k+1}$ ៥ពិន្ទុ

គេទាញបាន $x^{k+1}>xy^k+xz^k>y^{k+1}+z^{k+1}$

IV. ១៥ពិន្ទុ) រកចំនួនផ្លែស្វាយតិចបំផុតដែលគេបានបេះ ៖

តាងដោយ M ចំនួនផ្លែស្វាយតិចបំផុតដែលសោភាបានបេះ ។

- ដោយដឹងថា គេបានរៀបគរផ្លែស្វាយជា 11 គំនរស្មើៗគ្នា និងនៅសល់ផ្លែស្វាយចំនួន 6 ផ្លែ នោះគេបាន ៖ ៥ពិន្ទុ

$M\equiv 6 \pmod{11} \Rightarrow M=11k+6, k>1$

www.pisethsok.wordpress.com

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

- ដោយដឹងថា គេបានរៀបគ្រាប់ផ្លែស្វាយជា 17 គំនរស្មើៗគ្នា និងគ្មានសល់ផ្លែស្វាយ នោះគេបាន :

$M \equiv 0 \pmod{17} \Rightarrow M = 11k + 6 \equiv 0 \pmod{17}$ ៥ពិន្ទុ

$\Rightarrow 11k \equiv -6 \equiv 11 \pmod{17}$

ដើម្បីបានចំនួនផ្លែស្វាយតិចបំផុតដែលគេបានបេះ គេត្រូវតែយក $m = 1$ ជាការស្រេច : ៥ពិន្ទុ

$m = 1 \Rightarrow k = 18$ ហើយ $M = 11 \cdot 18 - 6 = 204$ ផ្លែ

V. (២០ពិន្ទុ) គេសន្មត់ថាដីមុំឡិចតុកោណ ABCD មានផ្ទៃក្រឡាអតិបរមា

៥ពិន្ទុ

- គេផ្ទៃក្រឡានៃ ABCD ជាអនុគមន៍នៃ $a; b; c; d; x$ និង y

ចតុកោណ ABCD មានផ្ទៃក្រឡា $S = \frac{1}{2}ab\sin x + \frac{1}{2}cd\sin y$

អង្កត់ទ្រូង $[AC]$ មានប្រវែង $L = a^2 + b^2 - 2ab\cos x = c^2 + d^2 - 2cd\cos y$ ៥ពិន្ទុ

ដោយគេដេរីវេធៀបនឹង x គេបាន :

$S'(x) = \frac{1}{2}ab\cos x + \frac{1}{2}cd\cos y \cdot y'$ (1)

$L'(x) = 2ab\sin x = 2cd\sin y \cdot y'$

$ab\sin x = cd\sin y \cdot y' \Rightarrow y' = \frac{ab\sin x}{cd\sin y}$ ៥ពិន្ទុ

$(1) \Rightarrow S'(x) = \frac{1}{2}ab \times \frac{\sin x\cos y + \cos x\sin y}{\sin y} = \frac{1}{2}ab \times \frac{\sin(x - y)}{\sin y}$ មានសញ្ញាដូចសញ្ញា $\sin(x - y)$

$S'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x + y) = 0 \Leftrightarrow x + y = \pi$

បើ $0 < x + y < \pi \Leftrightarrow S'(x) > 0$

បើ $2\pi > x + y > \pi \Leftrightarrow S'(x) < 0$ ៥ពិន្ទុ

បានន័យថា $S(x)$ មានអតិបរមាលុះត្រាតែ $x + y = \pi$

ដូចនេះ ចតុកោណ ABCD មានផ្ទៃក្រឡាអតិបរមាលុះត្រាតែ ABCD ចារឹកក្នុងរង្វង់មួយ ។

VI. (២០ពិន្ទុ) តាង $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ និង $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ។

១. បង្ហាញថា $u_n > a^{n-2}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n \geq 3$

- ចំពោះ $n = 3$ គេបាន $u_3 = 2$ ហើយ $a^{3-2} = a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} < 2$ បានន័យថា $u_3 > a^{3-2}$

- ឧបមាថា $u_p > a^{p-2}$ ចំពោះ $p \geq 3$ ៥ពិន្ទុ

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

- សិក្សាចំពោះ $p+1$

តាមសម្មតិកម្មអនុមានរួម គេបាន $u_p > a^{p-2}, u_{p-1} > a^{p-3}$

[illegible]

តែគេដឹងថា $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ជាឫសនៃសមីការ $x^2 = x+1$ នោះគេបាន $a^2 = a+1$

ដោយគុណនឹង a^{p-3} គេបាន $a^{p-1} = a^{p-2} + a^{p-3}$ (2)

តាម $(1) \& (2) \Rightarrow u_{p+1} > a^{p+1-2}$ ពិន្ទុ

ដូចនេះ $u_n > a^{n-2}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n \geq 3$ ។

ខ. បង្ហាញថា $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(a^n - b^n)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n :

- ចំពោះ $n = 1$ គេបាន $1 = u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(a-b) = \frac{1}{2\sqrt{5}}(1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}) = 1$

- ឧបមាថា $u_k = \frac{1}{\sqrt{5}}(a^k - b^k)$ ពិន្ទុ

- សិក្សាចំពោះ $k+1$

គេមាន $u_{k+1} = u_k + u_{k-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left((a^k + a^{k-1}) - (b^k + b^{k-1})\right)$ (3)

តែ $a \& b$ ជាឫសនៃសមីការ $x^2 = x+1$ នោះ $a^2 = a+1$ និង $b^2 = b+1$

គេបាន $a^{k+1} = a^k + a^{k-1}$ និង $b^{k+1} = b^k + b^{k-1}$

តាម $(3) \Rightarrow u_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(a^{k+1} - b^{k+1})$ ពិន្ទុ

ដូចនេះ $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(a^n - b^n)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។

www.pisethsok.wordpress.com

ថ្ងៃទី ០១ ខែ មេសា ឆ្នាំ ២០១០

ប្រធានក្រុមកំណែវិញ្ញាសា គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២

អ៊ី សៀងលី

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស

ផ្នែកអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា ថ្នាក់ទី ៩ និងថ្នាក់ទី ១២

សម័យប្រឡង: ០១.០៤ ២០១០

វិញ្ញាសា គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២ លើកទី២ ថ្ងៃទី ០៣.០៤.២០១០

រយៈពេល ១៨០ នាទី ពិន្ទុ ១០០

I.(១០ពិន្ទុ) សមីការ $ax^2+2010x+c=x$ គ្មានឫសទេនៅក្នុងសំណុំចំនួនពិត ។

បង្ហាញថា សមីការ $a\left(ax^2-2010x+c\right)^2+2010\left(ax^2+2010x+c\right)+c=x$ គ្មានឫសនៅក្នុងសំណុំចំនួនពិតដែរ ។

II.(១៥ពិន្ទុ) ពហុធា $P(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+1$ មានមេគុណ $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ ជាចំនួនមិនអវិជ្ជមាន ។

គេដឹងថាពហុធា $P(x)$ មាន n ឫសដែលសុទ្ធតែជាចំនួនពិត ។

បង្ហាញថា $P(2010)\geq\left(2\sqrt{2010}\right)^n$ ។

III.(១៥ពិន្ទុ) គេឱ្យចំណុចនឹង A មួយដែលស្ថិតនៅផ្ទៃក្នុងនៃមុំស្រួច $\angle xOy$ មួយ ។

រកចំណុច B និង C នៅលើជ្រុង $[Ox)$ និង $[Oy)$ រៀងគ្នា ដើម្បីឱ្យត្រីកោណ ABC មានបរិមាត្រអប្បបរមា ។

IV.(២០ពិន្ទុ) គេមានចំនួនគត់វិជ្ជមាន r ដែលជាសំណល់ក្នុងវិធីចែកអឺគ្លីតនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន a និង b ។

១. បង្ហាញថា 2^r-1 ជាសំណល់ក្នុងវិធីចែកអឺគ្លីតនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន 2^a-1 និង 2^b-1 ។

២. គេតាង μ ជាតួចែករួមធំបំផុតនៃ a និង b ។ បង្ហាញថា $2^\mu-1$ ជាតួចែករួមធំបំផុតនៃ 2^a-1 និង 2^b-1 ។

V.(២០ពិន្ទុ) ស្វ៊ែ (S) មួយមានកាំ R ហើយចារឹកក្នុងតេត្រាអែត $ABCD$ មួយ ។ ប្លង់បួនផ្សេងគ្នាប៉ះនឹងស្វ៊ែ (S) ហើយស្របរៀងគ្នានឹងមុខទាំងបួននៃតេត្រាអែត កាត់តេត្រាអែតនោះបានជាតេត្រាអែតតូចៗចំនួនបួន។ តេត្រាអែតតូចៗទាំងនោះចារឹកក្រៅស្វ៊ែតូចៗ ដែលមានកាំរៀងគ្នា r_1 , r_2 , r_3 និង r_4 ។

បង្ហាញថា $r_1+r_2+r_3+r_4=2R$ ។

VI.(២០ពិន្ទុ) អនុគមន៍ f មួយកំណត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន x ហើយ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌទាំងបីខាងក្រោម:

(i) f ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើចន្លោះ $]0;+\infty[$

(ii) $f(x)>-\dfrac{1}{x}$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$

(iii) $f(x)\cdot f\left(f(x)+\dfrac{1}{x}\right)=1$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$ ។

១. គណនា $f(1)$ ។

២. គណនា $f(x)$ ។

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

I. (១០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា សមីការ $a\left(ax^2+2010x+c\right)^2+2010\left(ax^2+2010x+c\right)+c=x$ គ្មានឫសជាចំនួនពិតដែរ :

តាង $t(x)=ax^2+2010x+c$

ដោយសមីការ $t(x)=x$ គ្មានឫសជាចំនួនពិត នោះ ឬមួយ $t(x)<x$ ឬមួយ $t(x)>x$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។ ៥ពិន្ទុ

គេទាញបាន ឬមួយ $t(t(x))<t(x)<x$ ឬមួយ $t(t(x))>t(x)>x$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។ បានន័យថា :

- ឬមួយ $a\left(ax^2+2010x+c\right)^2+2010\left(ax^2+2010x+c\right)+c<x$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x
- ឬមួយ $a\left(ax^2+2010x+c\right)^2+2010\left(ax^2+2010x+c\right)+c>x$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។ ៥ពិន្ទុ

ដូចនេះ សមីការ $a\left(ax^2+2010x+c\right)^2+2010\left(ax^2+2010x+c\right)+c=x$ គ្មានឫសជាចំនួនពិតដែរ ។

II. (១៥ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $P(2010)\ge\left(2\sqrt{2010}\right)^n$:

ដោយមេគុណ $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ ជាចំនួនមិនអវិជ្ជមាន នោះ ឫស $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ជាចំនួនពិតមិនវិជ្ជមាន ។

តាង $\alpha_i=-x_i, i=1,2,\ldots,n$ នោះគេបាន $\alpha_i\ge 0$ ហើយ $P(x)=(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)\cdots(x+\alpha_n)$ ៥ពិន្ទុ

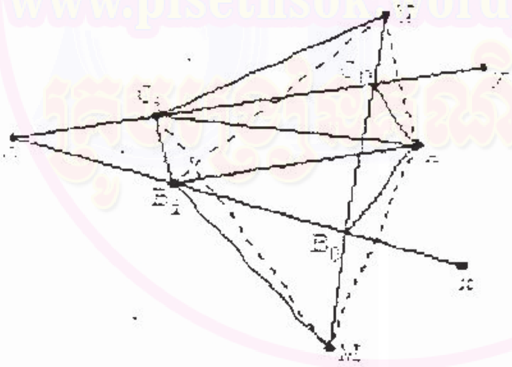
$P(2010)=(2010+\alpha_1)(2010+\alpha_2)\ldots(2010+\alpha_n)$

ម្យ៉ាងទៀត $2010+\alpha_i\ge 2\sqrt{2010\cdot\alpha_i}, i=1,2,\ldots,n$ ៥ពិន្ទុ

គេបាន $P(2010)=(2010+\alpha_1)(2010+\alpha_2)\ldots(2010+\alpha_n)\ge 2^n\sqrt{2010^n\cdot\alpha_1\cdot\alpha_2\cdots\alpha_n}$

ដូចនេះ $P(2010)\ge\left(2\sqrt{2010}\right)^n$ ព្រោះ $\alpha_1\cdot\alpha_2\cdots\alpha_n=1$ ៥ពិន្ទុ

III. (១៥ពិន្ទុ) រកចំណុច B និង C នៅលើជ្រុង $[Ox)$ និង $[Oy)$ រៀងគ្នា ដើម្បីឱ្យត្រីកោណ ABC មានបរិមាត្រអប្បបរមា :



៥ពិន្ទុ

តាង M & N ជាចំណុចឆ្លុះនៃ A ចំពោះ $[Ox)$ និង $[Oy)$ រៀងគ្នា ។

តាង B_0 & C_0 ជាចំណុចប្រសព្វ រវាង $[MN]$ ជាមួយ $[Ox)$ និង $[Oy)$ រៀងគ្នា ។

យក $B_i\in[Ox), C_i\in[Oy), i=1,2,\ldots$

- គេបានបរិមាត្រនៃ $\Delta AB_0C_0 : p_0=AB_0+B_0C_0+C_0A=MB_0+B_0C_0+C_0N=MN$: ថេរ ៥ពិន្ទុ
- គេបានបរិមាត្រនៃ $\Delta AB_iC_i : p_i=AB_i+B_iC_i+C_iA=MB_i+B_iC_i+C_iN$

តែ $MB_i+B_iC_i>MC_i\Rightarrow MB_i+B_iC_i+C_iN>MC_i+C_iN>MN$ ចំពោះគ្រប់ $i=1,2,\ldots$

គេបាន $p_i>p_0, \forall i=1,2,\ldots$

ដូចនេះ ត្រីកោណ ABC មានបរិមាត្រអប្បបរមាកាលណា $B=B_0, C=C_0$ ។ ៥ពិន្ទុ

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

(២០ពិន្ទុ) ១. បង្ហាញថា $2^r - 1$ ជាសំណល់ក្នុងវិធីចែកអឺគ្លីតនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន $2^a - 1$ និង $2^b - 1$:

តាមវិធីចែកអឺគ្លីត $a = bq + r, 0 < r < b$ គេបាន :

$2^a - 1 = 2^{bq+r} - 2^r + 2^r - 1 = 2^r(2^b - 1)((2^b)^{q-1} + \dots + 2^b + 1) + (2^r - 1)$ ៥ពិន្ទុ

$= (2^b - 1)(2^{b(q-1)+r} + \dots + 2^{b+r} + 2^r) + 2^r - 1, 0 < 2^r - 1 < 2^b - 1$

ដូចនេះ $2^r - 1$ ជាសំណល់ក្នុងវិធីចែកអឺគ្លីតនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន $2^a - 1$ និង $2^b - 1$ ៥ពិន្ទុ

២. បង្ហាញថា $2^d - 1$ ជាតួចែករួមធំបំផុតនៃ $(2^a - 1)$ និង $(2^b - 1)$:

តាង $r_0 = a, r_1 = b$ ។ តាមវិធីចែកអឺគ្លីតបន្តបន្ទាប់ :

$r_0 = r_1q_1 + r_2\ (0 < r_2 < r_1), r_1 = r_2q_2 + r_3\ (0 \le r_3 < r_2), \dots, r_{n-3} = r_{n-2}q_{n-2} + r_{n-1}\ (0 \le r_{n-1} < r_{n-2})$

$r_{n-2} = r_{n-1}q_{n-1}$

គេបាន $\gcd(a,b) = r_{n-1} = d$ ៥ពិន្ទុ

តាង $R_0 = 2^a - 1, R_1 = 2^b - 1$ ។ តាមវិធីចែកអឺគ្លីតបន្តបន្ទាប់ និងលទ្ធផលខាងលើ :

$R_0 = R_1Q_1 + R_2, R_2 = 2^{r_2} - 1$

$R_1 = R_2Q_2 + R_3, R_3 = 2^{r_3} - 1$

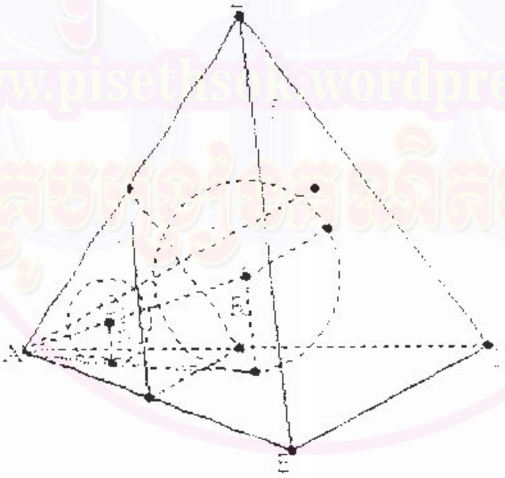
....

$R_{n-3} = R_{n-2}Q_{n-2} + R_{n-1}, R_{n-1} = 2^{r_{n-1}} - 1$

$R_{n-2} = R_{n-1}Q_{n-1}$ ៥ពិន្ទុ

គេបាន $\gcd(R_0, R_1) = R_{n-1} = 2^d - 1$

V. (២០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 2R$:



៥ពិន្ទុ

តាង f_i & h_i, $i = 1,2,3,4$ ជាផ្ទៃក្រឡានៃមុខ និងកម្ពស់ដែលត្រូវគ្នានៃតេត្រាអែត។

តាង $r_i, i = 1,2,3,4$ ជាកាំស្វ៊ែចារឹកក្នុងតេត្រាអែតតូចៗទាំងបួន។

ដោយប្លង់មុខកាត់ស្របមុខនៃតេត្រាអែត នោះតេត្រាអែតតូចៗដែលបានទាំងបួន ដូចនឹងតេត្រាអែតដើម។

គេបាន $R/r_i = (h_i - 2R)/h_i = 1 - (2R/h_i) \Rightarrow (2R/h_i) = 1 - (r_i/R) = (R - r_i)/R$ ៥ពិន្ទុ

ហើយ $2R/h_i = (R - r_i)/R \Rightarrow 1/h_i = (R - r_i)/2R^2, i = 1,2,3,4$

ចំពោះ $i = 1,2,3,4$ គេបាន $1/h_1 + 1/h_2 + 1/h_3 + 1/h_4 = (4R - r_1 - r_2 - r_3 - r_4)/2R^2$ (1)

ម្យ៉ាងទៀតមាឌនៃតេត្រាអែត $V = (1/3)R(f_1 + f_2 + f_3 + f_4) \Rightarrow f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 3V/R$

$V = (1/3)f_1h_1 = (1/3)f_2h_2 = (1/3)f_3h_3 = (1/3)f_4h_4$ ៥ពិន្ទុ

$1/h_1 = f_1/3V, 1/h_2 = f_2/3V, 1/h_3 = f_3/3V, 1/h_4 = f_4/3V$

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeachingSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS www.pisethsok.wordpress.com គ្រូបង្រៀនគណិតវិទ្យា

គេបាន $1/h_1 + 1/h_2 + 1/h_3 + 1/h_4 = (f_1 + f_2 + f_3 + f_4)/3V = (3V/R):3V = 1/R$ (2)

តាម (1) & (2) $\Rightarrow (4R - r_1 - r_2 - r_3 - r_4)/2R^2 = 1/R$ ហើយ $4R - r_1 - r_2 - r_3 - r_4 = 2R$ ៥ពិន្ទុ

ដូចនេះ $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 2R$ ។

II. ២ពិន្ទុ ក. គណនា f(1)

តាង $t = f(1)$

- យក $x = 1 \Rightarrow f(1)\cdot f(f(1)+1) = 1$ ហើយ $t\cdot f(t+1) = 1 \Rightarrow f(t+1) = 1/t$

- យក $x = t+1 \Rightarrow f(t+1)f(f(t+1)+1/(t+1)) = 1$ ហើយ $(1/t)f(1/t+1/(t+1)) = 1$

គេបាន $f(1/t + 1/(t+1)) = t = f(1)$ ៥ពិន្ទុ

ដោយ f ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើចន្លោះ $]0;+\infty[$ នោះគេបាន $1/t + 1/(1+t) = 1$ សមមូល $t^2 - t - 1 = 0$

មានឬស $t = (1 \pm \sqrt{5})/2$

- ចំពោះ $t = (1+\sqrt{5})/2$ គេបាន $1 < t = f(1) < f(1+t) = 1/t < 1$ ជាករណីមិនអាចទៅរួច

- ចំពោះ $t = (1-\sqrt{5})/2$ គេបាន $t = f(1) > -1/1$ គឺពិតចំពោះ (ii) ៥ពិន្ទុ

ដូចនេះ $f(1) = (1-\sqrt{5})/2$

ខ. គណនា f(x)

តាង $\alpha = f(x) \Rightarrow \alpha\cdot f(\alpha + 1/x) = 1 \Rightarrow f(\alpha + 1/x) = 1/\alpha$

- យក $x = \alpha + 1/x \Rightarrow f(\alpha + 1/x)\cdot f(f(\alpha + 1/x) + 1/(\alpha + 1/x)) = 1$

គេទាញបាន $f(f(\alpha + 1/x) + x/(\alpha x + 1)) = \alpha = f(x)$

ដោយ f ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើចន្លោះ $]0;+\infty[$ នោះគេបាន $f(\alpha + 1/x) + x/(\alpha x + 1) = x$

$1/\alpha + x/(\alpha x + 1) = x \Leftrightarrow x^2\alpha^2 - x\alpha - 1 = 0$ ៥ពិន្ទុ

$\alpha = (1 \pm \sqrt{5})/2x$

- ចំពោះ $\alpha = (1+\sqrt{5})/2x \Rightarrow f'(x) = -(1+\sqrt{5})/2x^2 < 0$

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍ចុះ ដែលផ្ទុយពីលក្ខណៈ (i)

- ចំពោះ $\alpha = (1-\sqrt{5})/2x \Rightarrow f'(x) = -(1-\sqrt{5})/2x^2 > 0$

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍កើន ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខណៈ (i)

ម្យ៉ាងទៀត $(1-\sqrt{5})/2 > -1 \Rightarrow f(x) = (1-\sqrt{5})/2x > -1/x$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខណៈ (ii) ។

ដោយ $f(x) = t/x$ នោះគេបាន :

$$f(x)\cdot f\left(f(x) + \frac{1}{x}\right) = (t/x)f((t/x) + (1/x)) = (t/x)(tx/t+1) = t^2/(t+1) = 1$$ ៥ពិន្ទុ

ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខណៈ (iii) ។

ដូចនេះ $f(x) = t/x$ ដែល $t = (1-\sqrt{5})/2$ ។

ថ្ងៃទី ០៣ ខែ មេសា ឆ្នាំ ២០១០

ប្រធានក្រុមកែវិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២

អ៊ុំ សំអឿន

ផ្ទះពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស

ផ្នែកអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា ថ្នាក់ទី៩ និងថ្នាក់ទី១២

សម័យប្រឡង : ០១ មេសា ២០១១

វិញ្ញាសា: គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២ លើកទី១ : ០១.៤.២០១១

រយៈពេល: ១៨០ នាទី ពិន្ទុ: ១០០

I. (១០ពិន្ទុ) នៅដើមឆ្នាំ ២០១១ នេះ ចំនួនទេសចរដែលបានមកទស្សនាប្រាសាទអង្គរវត្តស្មើនឹង $pq(p^2-q^2)$ ដែល p និង q ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ហើយ $p>q$ ។ គេស្រង់ឈ្មោះទេសចរទាំងនោះដាក់ក្នុងបញ្ជីមួយដោយមានចុះលេខរៀងត្រឹមត្រូវ។ បង្ហាញថា លេខរៀងរបស់ទេសចរចុងក្រោយគេបង្អស់ជាពហុគុណនៃ 3 ។

II. (១០ពិន្ទុ) ចំណុច $M_i(x,y,z)$ មានកូអរដោនេជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $x^2+y^2+z^2=x^3+y^3+z^3$ ។ បង្ហាញថា មានចំណុច $M_i(x,y,z)$ ច្រើនរាប់មិនអស់នៅក្នុងលំហ។

III. (២០ពិន្ទុ) ស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ $u_1=1, u_2=1$ និង $u_{n+1}=u_n+u_{n-1}$ ចំពោះ $n\geq 2$ ។
បង្ហាញថា $u_{2011}u_{2012}-u_{2010}u_{2013}=1$ ហើយ $u_{1042012}u_{1042013}-u_{1042011}u_{1042014}=-1$ ។

IV. (២០ពិន្ទុ) ស្វ៊ីត (I_k) កំណត់ដោយ $I_k=\int_0^{\pi/2}\sin^k x\,dx$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ k ។ អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(k)=(k+1)I_kI_{k+1}$ ។

១_ កំណត់ទំនាក់ទំនងរវាង I_k និង I_{k+2} ។

២_ ប្រៀបធៀប $f(k)$ និង $f(k+1)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ k ។ គណនាតម្លៃ $f(2011)$ ។

V. (២០ពិន្ទុ) ចតុកោណប៉ោង $ABCD$ មួយមានជ្រុង $AB=a, BC=b, CD=c, DA=d$ និងបរិមាត្រ $2p$ ហើយចារឹកក្នុងរង្វង់មួយ។
បង្ហាញថា ចតុកោណ $ABCD$ មានផ្ទៃក្រឡា $S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ ។

VI. (២០ពិន្ទុ) $P_n(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេ n ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $P_n(x)=-2xP_{n-1}(x)+P'_{n-1}(x)$ ។

១_ បង្ហាញថាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $y=e^{-x^2}$ កំណត់ដោយ $y^{(n)}=e^{-x^2}P_n(x)$ ។

២_ ទាញបញ្ជាក់ថា $P_{n+1}(x)+2xP_n(x)+2nP_{n-1}(x)=0$ ហើយ $P''_n(x)-2xP'_n(x)+2nP_n(x)=0$ ។

www.pisethsok.wordpress.com

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស

ផ្នែកអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា ថ្នាក់ទី ៩ និងទី ១២

សម័យប្រឡង: ០១.០៤.២០១១

អត្រាកំណែគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២ លើកទី ១ ថ្ងៃទី ០១.០៤.២០១១

រយៈពេល ១៨០នាទី ពិន្ទុ ១០០

I-(១០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា លេខរៀងនៃទេសចរចុងក្រោយគេបង្អស់ជាពហុគុណនៃ3 ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $p, q, p > q$:

គេត្រូវបង្ហាញថា $A = pq(p^2 - q^2)$ ជាពហុគុណនៃ3 ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $p, q, p > q$ ។

គេមាន $A = pq(p^2 - q^2) = pq(p-q)(p+q)$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ p, q គេអាចមានករណី :

$p = 3a$ ឬ $p = 3a+1$ ឬ $p = 3a+2$ ដែល a ចំនួនគត់ធម្មជាតិ

$q = 3b$ ឬ $q = 3b+1$ ឬ $q = 3b+2$ ដែល b ចំនួនគត់ធម្មជាតិ

គេសិក្សាករណីនីមួយៗដូចខាងក្រោម :

-បើ $p = 3a \Rightarrow A$ ជាពហុគុណនៃ3 1P

-បើ $p = 3a+1$ 1P

.បើ $q = 3b \Rightarrow A$ ជាពហុគុណនៃ3 1P

.បើ $q = 3b+1 \Rightarrow p - q = 3(a-b) \Rightarrow A$ ជាពហុគុណនៃ3 1P

.បើ $q = 3b+2 \Rightarrow p + q = 3(a+b+1) \Rightarrow A$ ជាពហុគុណនៃ3 1P

-បើ $p = 3a+2$ 1P

.បើ $q = 3b \Rightarrow A$ ជាពហុគុណនៃ3 1P

.បើ $q = 3b+1 \Rightarrow p + q = 3(a+b+1) \Rightarrow A$ ជាពហុគុណនៃ3 1P

.បើ $q = 3b+2 \Rightarrow p - q = 3(a-b) \Rightarrow A$ ជាពហុគុណនៃ3 1P

ដូចនេះ លេខរៀងនៃទេសចរចុងក្រោយគេបង្អស់ជាពហុគុណនៃ3 ។ 1P

II-(១០ពិន្ទុ) បង្ហាញថាមានចំណុច $M_i(x, y, z)$ ច្រើនរាប់មិនអស់នៅក្នុងលំហ :

ដើម្បីបំបាត់ x^3 និង z^3 ពីអង្គទី២ គេអាចយក $z = -x$ ។ 2P

នោះគេបាន $2x^2 + y^2 = y^3 \Leftrightarrow 2x^2 = (y-1)y^2$ 1P

$\Leftrightarrow x^2 = \dfrac{y-1}{2} \cdot y^2$ 1P

សមីការផ្ទៀងផ្ទាត់លុះត្រាតែ $\dfrac{y-1}{2}$ ជាការេប្រាកដ គឺថា $\dfrac{y-1}{2} = k^2, k \in Z \Rightarrow y = 2k^2 + 1$ 2P

គេបាន $2x^2 = (2k^2 + 1 - 1)(2k^2 + 1)^2$ ឬ $x^2 = k^2(2k^2 + 1)^2$ 1P

ហើយ $x = \pm k(2k^2 + 1), y = 2k^2 + 1, z = \mp k(2k^2 + 1)$ ដែល $k \in Z$ ។ 2P

ដូចនេះ មានចំណុច $M_i(x, y, z)$ ច្រើនរាប់មិនអស់នៅក្នុងលំហ ។ 1P

III-(២០ពិន្ទុ) ស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ $u_1 = 1, u_2 = 1$ និង $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}, n \geq 2$ ។

បង្ហាញថា $u_{2011} u_{2012} - u_{2010} u_{2013} = 1$

សុខ ពិសិដ្ឋ www.pisethsok.wordpress.com គ្រូបង្រៀនគណិតវិទ្យា

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

បង្ហាញថា $u_{1042012}u_{1042013}-u_{1042011}u_{1042014}=-1$

ដំបូងគេត្រូវបង្ហាញថា $u_{n+1}u_{n+2}-u_nu_{n+3}=(-1)^n$ ចំពោះគ្រប់ $n\in N$

-ចំពោះ $n=1$ គេបាន $u_2u_3-u_1u_4=1\cdot 2-1\cdot 3=(-1)^1$: សមភាពពិត 3p

-ឧបមាថាសមភាពពិតដល់ $n=p$ គឺថា $u_{p+1}u_{p+2}-u_pu_{p+3}=(-1)^p$ 3p

-សិក្សា ចំពោះ $n=p+1$

$u_{p+1+1}u_{p+1+2}-u_{p+1}u_{p+1+3}=u_{p+2}u_{p+3}-u_{p+1}u_{p+4}$

$u_{p+2}u_{p+3}-u_{p+1}u_{p+4}=u_{p+2}(u_{p+2}+u_{p+1})-u_{p+1}(u_{p+3}+u_{p+2})$ 2p

$=(u_{p+2})^2+u_{p+2}u_{p+1}-u_{p+1}(u_{p+2}+u_{p+1}+u_{p-2})=(u_{p+2})^2-(u_{p+1})^2-(u_{p+1}u_{p+2})$ 2p

$=(u_{p+2}-u_{p+1})(u_{p+2}+u_{p+1})-(u_{p+1}u_{p+2})$

$=(u_p+u_{p+1}-u_{p-1})(u_{p+3})-(u_{p-1}u_{p+2})=u_pu_{p+3}-u_{p+1}u_{p+2}$ 2p

$=(-1)(u_{p+1}u_{p+2}-u_pu_{p+3})=(-1)(-1)^p=(-1)^{p+1}$ 2p

បញ្ជាក់ថាសមភាពពិតចំពោះ $n=p+1$ ។

ដូចនេះ $u_{n+1}u_{n+2}-u_nu_{n+3}=(-1)^n$ ចំពោះគ្រប់ $n\in N$ ។ 2p

- បង្ហាញថា $u_{2011}u_{2012}-u_{2010}u_{2013}=1$

ដោយយក $n=2010$ នោះគេបាន $u_{2011}u_{2012}-u_{2010}u_{2013}=(-1)^{2010}=1$ 2p

- បង្ហាញថា $u_{1042012}u_{1042013}-u_{1042011}u_{1042014}=-1$

ដោយយក $n=1042011$ នោះគេបាន $u_{1042012}u_{1042013}-u_{1042011}u_{1042014}=(-1)^{1042011}=-1$ 2p

IV-(២០ពិន្ទុ) ១-កំណត់ទំនាក់ទំនងរវាង I_k និង I_{k+2} ៨ពិន្ទុ

គេមាន $I_k=\int_0^{\pi/2}\sin^{k-1}x\sin x\,dx=\left[-\cos x\sin^{k-1}x\right]_0^{\pi/2}+(k-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{k-2}x\cos^2 x\,dx$ 2p

$I_k=(k-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{k-2}x(1-\sin^2 x)dx=(k-1)I_{k-2}-(k-1)I_k$ 2p

$\Rightarrow kI_k=(k-1)I_{k-2}$ 2p

$\Rightarrow (k+2)I_{k+2}=(k+1)I_{k+2-2}\quad\Rightarrow (k+2)I_{k+2}=(k+1)I_k$ 2p

២- ប្រៀបធៀប $f(k)$ និង $f(k+1)$ ១២ពិន្ទុ

គេមាន

$f(k+1)=(k+1+1)I_{k+1}I_{k+1+1}$

$f(k+1)=(k+2)I_{k+1}I_{k+2}\qquad(1)$ 2p

តែ $(k+2)I_{k+2}=(k+1)I_k\Rightarrow I_{k+2}=\dfrac{k+1}{k+2}I_k$ 2p

តាម (1) គេបាន $f(k+1)=(k+2)I_{k+1}\dfrac{k+1}{k+2}I_k$

$f(k+1)=(k+1)I_{k+1}I_k$ 1p

ដោយ $f(k)=(k+1)I_kI_{k+1}$ ហើយ $f(k+1)=(k+1)I_kI_{k+1}$

នោះគេទាញបាន $f(k+1)=f(k)\,,\forall k\in N$ 1p

គណនាតម្លៃ $f(2011)$:

ដោយ $f(k+1)=f(k)\,,\forall k\in N$ នោះគេអាចសរសេរ :

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

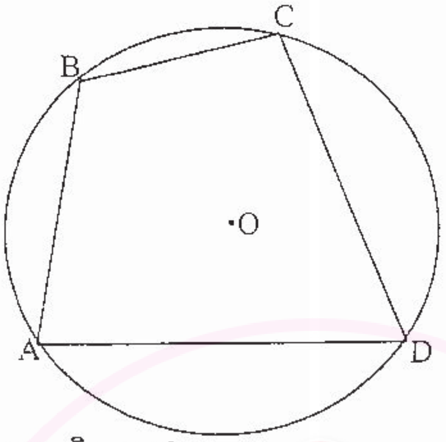
$f(k)=f(k-1)=f(k-2)=\cdots=f(2)=f(1)=(1+1)I_1I_2=2I_1I_2\ \ (2)$ 2p

តែ $I_1=\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx=\left[-\cos x\right]_0^{\pi/2}=1$ 1p

$I_2=\int_0^{\pi/2}\sin^2 x\,dx=(1/2)\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2x)dx=(1/2)\left[x-(1/2)\sin 2x\right]_0^{\pi/2}=\pi/4$ 1p

តាម(2) គេបាន $f(k)=\pi/2\Rightarrow f(2011)=\pi/2$ ។ 2p

V-(២០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា ចតុកោណ $ABCD$ មានផ្ទៃក្រឡា $S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$



2p

តាមទ្រឹស្តីបទ កូស៊ីនុសក្នុង ΔABC និង ΔACD :

2p

$AC^2=a^2+b^2-2ab\cos B=c^2+d^2-2cd\cos D$ ព្រោះ $B+D=\pi\Rightarrow\cos D=-\cos B$

$a^2+b^2-2ab\cos B=c^2+d^2+2cd\cos B$ 1p

$\cos B=\dfrac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$ 1p

ម្យ៉ាងទៀត

$S(ABCD)=S(ABC)+S(ACD)$

$=(1/2)ab\sin B+(1/2)cd\ \sin D$ 2p

$S(ABCD)=(1/2)ab\sin B+(1/2)cd\ \sin B$ ព្រោះ $B+D=\pi\Rightarrow\sin D=\sin B$ 1p

$S(ABCD)=(1/2)(ab+cd)\sin B$ 1p

$S(ABCD)=(1/2)(ab+cd)\sqrt{1-\cos^2 B}\qquad(1)$ 1p

តែគេមាន :

$1-\cos^2 B=\left(1+\dfrac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}\right)\left(1-\dfrac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}\right)$ 2p

$=\left(\dfrac{2(ab+cd)+a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}\right)\left(\dfrac{2(ab+cd)-a^2-b^2+c^2+d^2}{2(ab+cd)}\right)$ 1p

$=\left(\dfrac{(a+b)^2-(c-d)^2}{2(ab+cd)}\right)\left(\dfrac{(c+d)^2-(a-b)^2}{2(ab+cd)}\right)$ 1p

$=\left(\dfrac{1}{4(ab+cd)^2}\right)(a+b+c-d)(a+b-c+d)(c+d+a-b)(c+d-a+b)$ 1p

$=\left(\dfrac{1}{4(ab+cd)^2}\right)(a+b+c+d-2d)(a+b+c+d-2c)(c+d+a+b-2b)(c+d-2a+a+b)$ 1p

ដោយតាង $2p=a+b+c+d$ នោះគេបាន :

ដោយតាង $2p=a+b+c+d$ នោះគេបាន :

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

$$1-\cos^2 B=\left(\frac{1}{4(ab+cd)^2}\right)(2p-2d)(2p-2c)(2p-2b)(2p-2a)$$

$$1-\cos^2 B=\left(\frac{4}{(ab+cd)^2}\right)(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)$$ 1p

តាម (1) គេបាន :

$$S(ABCD)=\frac{1}{2}(ab+cd)\sqrt{\left(\frac{4}{(ab+cd)^2}\right)(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$ 2p

ដូចនេះ $S(ABCD)=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ ដែល $p=(a+b+c+d)/2$ ។

VI- (២០ពិន្ទុ) $P_n(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេ n ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $P_n(x)=-2xP_{n-1}+P'_{n-1}$

១-បង្ហាញថា $y^{(n)}=e^{-x^2}P_n(x)$ ៨ពិន្ទុ

-ចំពោះ $n=1$ គេបាន $y'=(-2x)e^{-x^2}=e^{-x^2}P_1(x)$ 2p

-ឧបមាថាសមភាពពិតដល់ $n=k$ គឺថា $y^{(k)}=e^{-x^2}P_k(x)$ (1) 2p

-សិក្សាចំពោះ $n=k+1$: ដោយរកដេរីវេអង្គទាំងពីររបស់ (1) :

$y^{(k+1)}=e^{-x^2}\left(-2xP_k(x)+P'_k(x)\right)=e^{-x^2}P_{k+1}(x)$ 4p

២-ទាញបញ្ជាក់ថា $P_{n+1}(x)+2xP_n(x)+2nP_{n-1}(x)=0$ ហើយ $P''_n(x)-2xP'_n(x)+2nP_n(x)=0$ ១២ពិន្ទុ

គេមាន $y'=(-2x)e^{-x^2}=-2xy\Rightarrow y'+2xy=0$ (2) 2p

ដោយរកដេរីវេអង្គទាំងពីររបស់ (2) ចំនួន n ដង និង ប្រើរូបមន្ត Leibniz :

$$(fg)^{(n)}=f^{(n)}g+C(n,1)f^{(n-1)}g'+\cdots+C(n,p)f^{(n-p)}g^{(p)}+\cdots+fg^{(n)}=\sum_{i=0}^{n}C(n,i)f^{(n-i)}g^{(i)}$$

គេបាន $y^{(n+1)}+2(xy)^{(n)}=y^{(n+1)}+2xy^{(n)}+2ny^{(n-1)}=0$ 2p

ឬ $e^{-x^2}(P_{n+1}(x)+2xP_n(x)+2nP_{n-1}(x))=0\Rightarrow P_{n+1}(x)+2xP_n(x)+2nP_{n-1}(x)=0$ (3) 2p

តែគេមាន : $P_{n+1}(x)=-2xP_n(x)+P'_n(x)$

តាម(3) គេបាន $-2xP_n(x)+P'_n(x)+2xP_n(x)+2nP_{n-1}(x)=0$

$P'_n(x)+2nP_{n-1}(x)=0\Rightarrow P'_n(x)=-2nP_{n-1}(x)$ 2p

$\Rightarrow P'_{n+1}(x)=-2(n+1)P_n(x)=-2nP_n(x)-2P_n(x)$ (4)

ដោយ $P_{n+1}(x)=-2xP_n(x)+P'_n(x)\Rightarrow P'_{n+1}(x)=-2xP'_n(x)-2P_n(x)+P''_n(x)$ (5) 2p

តាម (4) និង(5) គេបាន $P''_n(x)-2xP'_n(x)+2nP_n(x)=0$ 2p

ថ្ងៃទី ០១ ខែ មេសា ឆ្នាំ ២០១១

ប្រធានក្រុមកំណែគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី ១២

អ៊ុំ សារឈី

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស

ផ្នែកអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា ថ្នាក់ទី៩ និងថ្នាក់ទី១២

សម័យប្រឡង : ០១ មេសា ២០១១

វិញ្ញាសា: គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២ លើកទី២ : ០៣-៤-២០១១

រយៈពេល: ១៨០ នាទី ពិន្ទុ: ១០០

I. (១០ពិន្ទុ) គេបានប្រើប្រាស់ឡានចំនួន 99 គ្រឿងសម្រាប់ដឹកជញ្ជូនកូនមាន់ចំនួន $7y38x5$ ក្បាល ទៅកាន់កសិដ្ឋានមួយ។
រកលេខ x និង y ក្នុងប្រព័ន្ធរាប់គោលដប់ដោយដឹងថាក្នុងឡាននីមួយៗមានចំនួនកូនមាន់ស្មើៗគ្នា។

II. (១០ពិន្ទុ) គេឱ្យចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប α,β,λ និង μ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព $\alpha\mu=1+\beta\lambda$។ គេយក x_0 ជាតួចែករួមធំបំផុតនៃចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប a និង b ហើយយក y_0 ជាតួចែករួមធំបំផុតនៃ $\alpha a+\beta b$ និង $\lambda a+\mu b$។
ចូរប្រៀបធៀបចម្ងាយពីចំណុច $M_0(x_0,y_0)$ ទៅអ័ក្សទាំងពីរនៃតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មួយ។

III. (២០ពិន្ទុ) គេឱ្យអនុគមន៍ពហុធា $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ ដែលមានលេខមេគុណជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប។
គេដឹងថាមានចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប x_0 ដែល $f(x_0)=p$ ជាចំនួនបឋម។
បង្ហាញថា មានចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប β ច្រើនរាប់មិនអស់ ដែល $f(\beta)$ មិនមែនជាចំនួនបឋម។

IV. (២០ពិន្ទុ) ស្វ៊ីត (x_n) កំណត់ដោយ $x_1=1, x_2=1$ និង $x_{n+1}=x_n+x_{n-1}$ ចំពោះ $n\ge 2$។
ស្វ៊ីត (y_n) កំណត់ដោយ $y_n=|x_{n+4}x_{n-2}-x_{n+2}x_n|$ ចំពោះ $n\ge 3$។
ស្វ៊ីត (z_n) កំណត់ដោយ $z_n-9=4x_{n-2}x_nx_{n-2}x_{n-4}$ ចំពោះ $n\ge 3$។
១-បង្ហាញថា (y_n) ជាស្វ៊ីតថេរចំពោះ $n\ge 3$។ ទាញរកតម្លៃនៃតួ $y_{3042011}$។
២-បង្ហាញថា តួនីមួយៗនៃស្វ៊ីត (z_n) ជាការេប្រាកដ។

V. (២០ពិន្ទុ) គេឱ្យ a និង X ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបដែល $a>1, X>0$។ k ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបមិនអវិជ្ជមាន និង
c_j ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបដែល $0\le c_j<a$ ចំពោះ $j=0,1,\ldots,k$។
បង្ហាញថា X អាចសរសេរបានមួយបែបគត់ជារាង $X=\sum_{j=0}^{k}c_ja^j$។

VI. (២០ពិន្ទុ) រង្វង់មួយមានផ្ចិត O និងកាំ R ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC មួយដែលមានបរិមាត្រ $2p$។ ត្រីកោណ ABC នេះចារឹកក្រៅរង្វង់មួយទៀតដែលមានផ្ចិត I និងកាំ r។
បង្ហាញថា $4R+r=p\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)$។

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស

ផ្នែកអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា ថ្នាក់ទី ៩ និងទី ១២

សម័យប្រឡង: ០១.០៤.២០១០

អត្រាកំណែគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២ លើកទី ២ ថ្ងៃទី ០៣.០៤.២០១១

រយៈពេល ១៨០នាទី ពិន្ទុ ១០០

I. (១០ពិន្ទុ) រកលេខ x និង y ដោយដឹងថាក្នុងទ្រង់ទីមួយៗមានចំនួនគូនមាន់ស្មើៗគ្នា :

គេត្រូវរកលេខ x និង y ក្នុងប្រព័ន្ធរាប់គោលដប់ដើម្បីឱ្យចំនួន $\overline{7y38x5}$ ចែកដាច់នឹង 99 ។

គេមាន $\gcd(9,11) = 1$

ដើម្បីឱ្យ $\overline{7y38x5}$ ចែកដាច់នឹង $99 = 9\times 11$ លុះត្រាតែ

$7 + y + 3 + 8 + x + 5 \equiv 0 \pmod 9$ និង $5 + 8 + y - x - 3 - 7 \equiv 0 \pmod{11}$ ២ ពិន្ទុ

$\Leftrightarrow (x + y \equiv 4 \pmod 9) \wedge (-x + y \equiv -3 \pmod{11})$

$\Leftrightarrow (x + y = 9m + 4) \wedge (-x + y = 11n - 3)$ ២ ពិន្ទុ

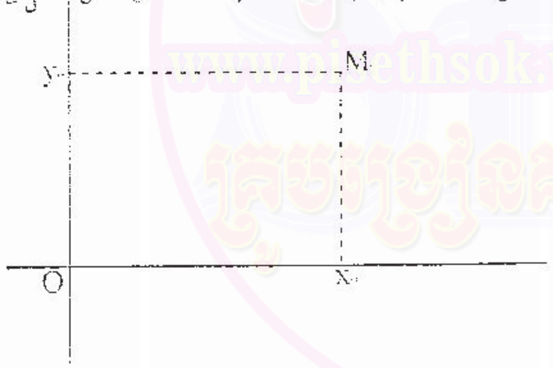
ដោយ $(0 \le x, y \le 9) \Rightarrow 0 \le x + y \le 18, -9 \le -x + y \le 9$ នោះគេទាញបាន : ២ ពិន្ទុ

$(x + y = 4) \wedge (-x + y = -3), (x + y = 4) \wedge (-x + y = 8),$ ២ ពិន្ទុ

$(x + y = 13) \wedge (-x + y = -3), (x + y = 13) \wedge (-x + y = 8)$

ដូចនេះ $x = 8, y = 5$ ២ ពិន្ទុ

II. (១០ពិន្ទុ) ស្រាយបញ្ជាក់ចម្ងាយពីចំណុច $M_0(x_0, y_0)$ ទៅអ័ក្សទាំងពីរនៃតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ :



ដោយ x_0 ជាតួចែករួមធំបំផុតនៃ a & b ហើយ y_0 ជាតួចែករួមធំបំផុតនៃ $A = \alpha a + \beta b$ & $B = \lambda a + \mu b$

នោះគេបាន : $(x_0|a \wedge x_0|b) \Rightarrow x_0|(\alpha a + \beta b) = A$ និង $(x_0|a \wedge x_0|b) \Rightarrow x_0|(\lambda a + \mu b) = B$

ដូចនេះ $x_0|y_0$ (1) ២ ពិន្ទុ

ម្យ៉ាងទៀត $y_0|A = \alpha a + \beta b \Rightarrow y_0|(\alpha\mu a + \beta\mu b)$

$y_0|B = \lambda a + \mu b \Rightarrow y_0|(\beta\lambda a + \beta\mu b)$

គេបាន $y_0|(\alpha\mu - \beta\lambda)a = a$ ព្រោះ $\alpha\mu - \beta\lambda = 1$ ២ ពិន្ទុ

តាមរបៀបដូចគ្នា : $y_0|A = \alpha a + \beta b \Rightarrow y_0|(\alpha\lambda a + \beta\lambda b)$

$y_0|B = \lambda a + \mu b \Rightarrow y_0|(\alpha\lambda a + \alpha\mu b)$

គេបាន $y_0|(\alpha\mu - \beta\lambda)b = b$ ព្រោះ $\alpha\mu - \beta\lambda = 1$

ដោយ $(y_0|a \wedge y_0|b) \Rightarrow y_0|x_0$ (2) ២ ពិន្ទុ

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

តាម $(1)\&(2) \Rightarrow x_0 = y_0$ ២ ពិន្ទុ

ដូចនេះ ចំណុច $M_0(x_0, y_0)$ មានចម្ងាយស្មើពីអ័ក្សទាំងពីរនៃតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ ។ ២ ពិន្ទុ

III-(២០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា មានចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប β ច្រើនរាប់មិនអស់ ដែល $f(\beta)$ មិនមែន ជាចំនួនបឋម៖

គេមាន $f(x_0) = a_n x_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0 = p$ ៣ ពិន្ទុ

គេពិនិត្យ $f(x_0 + kp), k \in Z$

$f(x_0+kp) = a_n(x_0+kp)^n + a_{n-1}(x_0+kp)^{n-1} + \cdots + a_1(x_0+kp) + a_0$ ៣ ពិន្ទុ

$= (a_n x_0^n + a_n \sum_{i=1}^{n} C(n,i) x_0^{n-i}(kp)^i) + (a_{n-1}x_0^{n-1} + a_{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} C(n-1,i)x_0^{n-1-i}(kp)^i) + \cdots +$ ៣ ពិន្ទុ

$+ (a_1 x_0 + a_1 kp) + a_0$ ៣ ពិន្ទុ

$= (a_n x_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0) + (a_n \sum_{i=1}^{n} C(n,i)x_0^{n-i}(kp)^i + \cdots + a_1 kp)$

$= p + p(a_n \sum_{i=1}^{n} C(n,i)x_0^{n-i}k^i p^{i-1} + a_{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} C(n-1,i)x_0^{n-1-i}k^i p^{i-1} + \cdots + a_1 k)$ ៣ ពិន្ទុ

$f(x_0+kp) = p(1 + a_n \sum_{i=1}^{n} C(n,1)x_0^{n-i}k^i p^{i-1} + a_{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} C(n-1,i)x_0^{n-1-i}k^i p^{i-1} + \cdots + a_1 k)$

៣ ពិន្ទុ

គេទាញបាន $p \mid f(x_0+kp), k \in Z$

ដូចនេះ មានចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប $\beta = x_0 + kp, k \in Z$ ច្រើនរាប់មិនអស់ ដែល $f(\beta)$ មិនមែន ជាចំនួនបឋម ។ ២ ពិន្ទុ

IV-(២០ពិន្ទុ)

១-បង្ហាញថា (y_n) ជាស្វ៊ីតថេរចំពោះគ្រប់ $n \geq 3$

$y_n = |x_{n+4}x_{n-2} - x_{n+2}x_n|$

$= |(x_{n+3} + x_{n+2})x_{n-2} - x_{n+2}x_n| = |x_{n+3}x_{n-2} + x_{n+2}(x_{n-2} - x_n)|$ ២ ពិន្ទុ

$= |x_{n+3}x_{n-2} + x_{n+2}(x_{n-2} - x_{n-1} - x_{n-2})| = |x_{n+3}x_{n-2} - x_{n+2}x_{n-1}|$ ២ ពិន្ទុ

$= |x_{n+3}(x_{n-1} - x_{n-3}) - x_{n+2}x_{n-1}| = |-x_{n+3}x_{n-3} - x_{n-1}(x_{n+2} - x_{n+3})|$ ២ ពិន្ទុ

(ព្រោះ $x_{n-1} = x_{n-2} + x_{n-3} \Rightarrow x_{n-2} = x_{n-1} - x_{n-3}$)

$= |-x_{n+3}x_{n-3} - x_{n-1}(x_{n+2} - x_{n+2} - x_{n+1})|$ ២ ពិន្ទុ

$= |x_{n+3}x_{n-3} - x_{n+1}x_{n-1}|$

$y_n = |x_{(n-1)+4}x_{(n-1)-2} - x_{(n-1)+2}x_{(n-1)}| = y_{n-1}, \forall n \geq 3$ ៣ ពិន្ទុ

ដូចនេះ (y_n) ជាស្វ៊ីតថេរចំពោះគ្រប់ $n \geq 3$ ។

- ទាញរកតម្លៃ $y_{3042011}$

$y_n = y_{n-1}, \forall n \geq 3 \Rightarrow y_{3042011} = y_{3042010} = \cdots = y_4 = y_3 = |x_7 x_1 - x_5 x_3| = ||13 \cdot 1 - 5 \cdot 2|| = 3$ ៣ ពិន្ទុ

២-បង្ហាញថា តួនីមួយៗនៃស្វ៊ីត (z_n) ជាការេប្រាកដ៖

គេមាន $y_n = y_{n-1} = \cdots = y_{3042011} = 3$ ហើយគេបាន៖

$y_n = |x_{n+4}x_{n-2} - x_{n+2}x_n| = 3 \Rightarrow x_{n+4}x_{n-2} - x_{n+2}x_n = \pm 3 \Rightarrow x_{n+4}x_{n-2} = x_{n+2}x_n \pm 3$ ៣ ពិន្ទុ

ម្យ៉ាងទៀត $z_n - 9 = 4x_n x_{n+2}(x_n x_{n+2} \pm 3) \Rightarrow z_n = (\pm 3)^2 + 2(\pm 3)(2x_n x_{n+2}) + (2x_n x_{n+2})^2$

$z_n = (\pm 3 + 2x_n x_{n+2})^2$ ជាការេប្រាកដ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 3$ ។ ៣ ពិន្ទុ

V-(២០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា X អាចសរសេរបានមួយបែបគត់ជារាង $X = \sum_{i=0}^{k} c_i a^i$

www.pisethsok.wordpress.com

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

-តាមវិធីចែកអឺគ្លីតបន្តបន្ទាប់គេបាន : $X = aq_0 + c_0, 0 \le c_0 < a$

$q_0 = aq_1 + c_1, 0 \le c_1 < a$ ២ ពិន្ទុ

$q_1 = aq_2 + c_2, 0 \le c_2 < a$

....

$q_{k-1} = a \times 0 + c_k, 0 \le c_k < a$ ២ពិន្ទុ

គេបានស្វ៊ីតនៃផលចែក : $X > q_0 > q_1 > q_2 > \cdots > q_{k-1} > q_k = 0$ ហើយគេបាន :

$X = aq_0 + c_0$

$= a(aq_1 + c_1) + c_0 = a^2 q_1 + ac_1 + c_0$ ២ ពិន្ទុ

$= a^3 q_2 + c_2 a^2 + c_1 a + c_0$

....

$= a^k q_{k-1} + c_{k-1} a^{k-1} + \cdots + c_1 a + c_0$ ២ ពិន្ទុ

$= c_k a^k + c_{k-1} a^{k-1} + \cdots + c_1 a + c_0, (q_{k-1} = c_k)$ ដែល $0 \le c_j < a, j = 0, 1, \dots, k$

ដូចនេះ $X = c_k a^k + c_{k-1} a^{k-1} + \cdots + c_1 a + c_0 = \sum_{j=0}^{k} c_j a^j$ ២ ពិន្ទុ

-បង្ហាញថា X អាចសរសេរបានមួយបែបគត់

ឧបមាថា X អាចសរសេរបានពីរបែប :

$X = c_k a^k + c_{k-1} a^{k-1} + \cdots + c_1 a + c_0, 0 \le c_j < a$ ២ ពិន្ទុ

$X = c'_k a^k + c'_{k-1} a^{k-1} + \cdots + c'_1 a + c'_0, 0 \le c'_j < a$ ២ ពិន្ទុ

គេបាន $(c_k - c'_k)a^k + (c_{k-1} - c'_{k-1})a^{k-1} + \cdots + (c_1 - c'_1)a + (c_0 - c'_0) = 0$

បើ X អាចសរសេរបានពីរបែបនោះគេអាចរកបានចំនួនគត់ j ដែលតូចជាងគេ ហើយ $c_j \ne c'_j$ ហើយគេបាន :

$(c_k - c'_k)a^k + (c_{k-1} - c'_{k-1})a^{k-1} + \cdots + (c_{j+1} - c'_{j+1})a^{j+1} + (c_j - c'_j)a^j = 0$ ២ ពិន្ទុ

$\Rightarrow a^j((c_k - c'_k)a^{k-j} + (c_{k-1} - c'_{k-1})a^{k-1-j} + \cdots + (c_{j+1} - c'_{j+1})a^1 + (c_j - c'_j)) = 0$

$\Rightarrow (c_k - c'_k)a^{k-j} + (c_{k-1} - c'_{k-1})a^{k-1-j} + \cdots + (c_{j+1} - c'_{j+1})a = c'_j - c_j$

$\Rightarrow ((c_k - c'_k)a^{k-j-1} + (c_{k-1} - c'_{k-1})a^{k-1-j-1} + \cdots + (c_{j+1} - c'_{j+1}))a = c'_j - c_j$

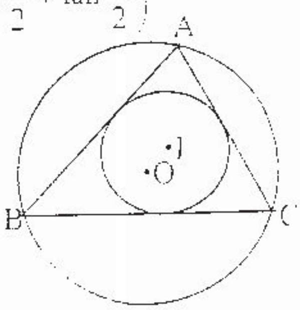
$\Rightarrow a | (c'_j - c_j)$ ២ ពិន្ទុ

តែ $(0 \le c_j < a) \wedge (0 \le c'_j < a) \Rightarrow (-a < c'_j - c_j < a)$

នេះបញ្ជាក់ថា $a | (c'_j - c_j)$ ជាការមិនអាចមាន។

ដូចនេះ គេអាចសរសេរ $X = \sum_{j=0}^{k} c_j a^j$ បានមួយបែបគត់។ ២ ពិន្ទុ

VI- ២០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $4R + r = p\left(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}\right)$



២ ពិន្ទុ

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

តាមរូបមន្តកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABC គេបាន :

$r=(p-a)\tan(A/2)=(p-b)\tan(B/2)=(p-c)\tan(C/2)$ ២ ពិន្ទុ

$\Rightarrow r/(p-a)=\tan(A/2), r/(p-b)=\tan(B/2), r/(p-c)=\tan(C/2)$

$\tan(A/2)+\tan(B/2)+\tan(C/2)=r/(p-a)+r/(p-b)+r/(p-c)$

$$=\frac{r\left(3p^2-2(a+b+c)p+ab+bc+ca\right)}{(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{r\left(-p^2+ab+bc+ca\right)}{(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (i)$$ ២ ពិន្ទុ

តាមរូបមន្តផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC :

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=pr$

$\Rightarrow p(p-a)(p-b)(p-c)=p^2r^2$ ២ ពិន្ទុ

គេបាន $(p-a)(p-b)(p-c)=pr^2 \quad (ii)$

តាម (i):

$$\tan(A/2)+\tan(B/2)+\tan(C/2)=\frac{r\left(-p^2+ab+bc+ca\right)}{pr^2}$$

$$=\frac{-p^2+ab+bc+ca}{pr} \quad (iii)$$ ២ ពិន្ទុ

តាមរូបមន្តផ្សេងទៀតនៃផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC :

$S=(abc)/4R=pr$

$\Rightarrow 4Rpr=4RS=abc$ ២ ពិន្ទុ

តាម (ii) :

$abc+(p-a)(p-b)(p-c)=4Rpr+pr^2$ ២ពិន្ទុ

$abc+(p^3-(a+b+c)p^2+(ab+bc+ca)p-abc=pr(4R+r)$

$p(p^2-(a+b+c)p+ab+bc+ca)=pr(4R+r)$

$p^2-2p^2+ab+bc+ca=r(4R+r)$

$-p^2+ab+bc+ca=r(4R+r)$ ២ ពិន្ទុ

តាម (iii) :

$$\tan(A/2)+\tan(B/2)+\tan(C/2)=\frac{r(4R+r)}{pr}=\frac{4R+r}{p}$$ ២ ពិន្ទុ

$$\Rightarrow p\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)=4R+r$$

ដូចនេះ $4R+r=p\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)$ ២ ពិន្ទុ

ថ្ងៃទី ០៣ ខែ មេសា ឆ្នាំ ២០១១

ប្រធានក្រុមកំណែគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី ១២

អ៊ុំ ស៊ាវលី

www.pisethsok.wordpress.com

លេខបន្ទប់: 01
លេខតុ: M

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស

ផ្នែកអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា ថ្នាក់ទី៩ និងថ្នាក់ទី១២

សម័យប្រឡង: ០២ មេសា ២០១២

វិញ្ញាសាទី១: គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២ សម្រាប់ថ្ងៃទី: ០២-៤-២០១២

រយៈពេល ១៨០ នាទី ពិន្ទុ ១០០

I. (១០ពិន្ទុ) គណនាផលបូក $S_{2012} = \cos a + \cos 2a + \cos 3a + \cdots + \cos 2012a$ ។

II. (១០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $A = 6^{2012} + 13^{2012} - 2^{2012} - 17^{2012}$ ចែកដាច់នឹង 44 ។

III. (១០ពិន្ទុ) ដោះស្រាយសមីការ $\sin^2 x^2 + \sin^2 2x^2 = \sin^2 3x^2 + \sin^2 4x^2$ ។

IV. (១៥ពិន្ទុ) ប្រអប់មួយមានបាតជាចតុកោណកែងដែលមានអង្កត់ទ្រូងប្រវែង $D(a) = \dfrac{a^2 - \sqrt{a^4 + 4} + 2}{a}$ ដែល $a > 0$ ។

រកប្រវែងអតិបរមានៃអង្កត់ទ្រូងរបស់បាតប្រអប់ ។

V. (១៥ពិន្ទុ) ពហុធា $r(x) = x^5 - 5x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ មានឫសប្រាំផ្សេងគ្នា a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 ហើយ

$s(x) = -x^2 + 5$ ជាពហុធាមួយទៀត ។

គណនាផលគុណ $p = s(a_1)s(a_2)s(a_3)s(a_4)s(a_5)$ ។

VI. (២០ពិន្ទុ) អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \dfrac{a^x}{a^x + \sqrt{a}}$ ដែល a ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានហើយខុសពី 1 ។

គណនាផលបូក $S = f(\frac{1}{2012}) + f(\frac{2}{2012}) + \cdots + f(\frac{2011}{2012})$ ។

VII. (២០ពិន្ទុ) រង្វង់ផ្ចិត O កាំ R មួយចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC មួយដែលមានមុំក្នុងទាំងបីជាមុំស្រួច ហើយ $\angle ACB, \angle ABC$

ផ្ទៀងផ្ទាត់វិសមភាព $\angle ACB - \angle ABC \geq \frac{\pi}{6}$ ។ H ជាចំណោលកែងនៃកំពូល A ទៅលើជ្រុង BC របស់ត្រីកោណ ។

បង្ហាញថា $\angle BAC + \angle COH < \frac{\pi}{2}$ ។

សុខ ពិសិដ្ឋ
www.pisethsok.wordpress.com
គ្រូបង្រៀនគណិតវិទ្យា

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស

ផ្នែកអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា ថ្នាក់ទី ៩ និងទី ១២

សម័យប្រឡង: ០២.០៤.២០១២

អត្រាកំណែគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២ លើកទី ១ ថ្ងៃទី ០២.០៤.២០១២

រយៈពេល ១៨០នាទី ពិន្ទុ ១០០

I-(១០ពិន្ទុ)គណនា $S_{2012}=\cos a+\cos 2a+\cos 3a+\cdots+\cos 2012a$

- បើ $a=k2\pi,k\in Z$ នោះ $\cos a=\cos 2a=\cdots=\cos 2012a=1$ ២ពិន្ទុ

ដូចនេះ $S_{2012}=2012$

- បើ $a\neq k2\pi,k\in Z\Rightarrow\sin\frac{a}{2}\neq 0$ គេអាចសរសេរ ២ពិន្ទុ

$$2\sin\frac{a}{2}S_{2012}=2\sin\frac{a}{2}\cos a+2\sin\frac{a}{2}\cos 2a+2\sin\frac{a}{2}\cos 3a+\cdots+2\sin\frac{a}{2}\cos 2012a$$ ២ពិន្ទុ

$$=(-\sin\frac{a}{2}+\sin\frac{3a}{2})+(-\sin\frac{3a}{2}+\sin\frac{5a}{2})+\cdots+(-\sin\frac{4023a}{2}+\sin\frac{4025a}{2})$$

$$=\sin\frac{4025a}{2}-\sin\frac{a}{2}=2\sin\frac{2012a}{2}\cos\frac{2013a}{2}$$ ២ពិន្ទុ

$$\Rightarrow S_{2012}=\frac{\sin\frac{2012a}{2}\cos\frac{2013a}{2}}{\sin\frac{a}{2}}=\frac{\sin 1006a\cos\frac{2013a}{2}}{\sin\frac{a}{2}},a\neq k2\pi$$ ២ពិន្ទុ

II- (១០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $A=6^{2012}+13^{2012}-2^{2012}-17^{2012}$ ចែកដាច់នឹង 44

គេមាន $x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+...+y^{n-1})=(x-y)z$ ចែកដាច់នឹង $x-y$ ២ពិន្ទុ

គេបាន $(6^{2012}-2^{2012})+(13^{2012}-17^{2012})=4k-4l$ ចែកដាច់នឹង 4 ២ពិន្ទុ

តាមរបៀបដូចគ្នាដែរ $(6^{2012}-17^{2012})+(13^{2012}-2^{2012})=-11m+11n$ ចែកដាច់នឹង 11 ២ពិន្ទុ

ដោយ $A\equiv 0\pmod 4),A\equiv 0\pmod{11},GCD(4,11)=1$ ២ពិន្ទុ

ដូចនេះ $6^{2012}+13^{2012}-2^{2012}-17^{2012}$ ចែកដាច់នឹង 44 ។ ២ពិន្ទុ

III-(១០ពិន្ទុ) ដោះស្រាយសមីការ $\sin^2 x^2+\sin^2 2x^2=\sin^2 3x^2+\sin^2 4x^2$

សមីការអាចសរសេរ

$$\frac{1-\cos 2x^2}{2}+\frac{1-\cos 4x^2}{2}=\frac{1-\cos 6x^2}{2}+\frac{1-\cos 8x^2}{2}$$ ២ពិន្ទុ

$\Leftrightarrow\cos 2x^2+\cos 4x^2=\cos 6x^2+\cos 8x^2$

$\Leftrightarrow\cos 3x^2\cos x^2=\cos 7x^2\cos x^2$

$\Leftrightarrow\cos x^2(\cos 7x^2-\cos 3x^2)=0$

$\Leftrightarrow\cos x^2\sin 2x^2\sin 5x^2=0\quad(E)$ ២ពិន្ទុ

គេទាញបាន

$\cos x^2=0\Leftrightarrow x_1^2=(2k+1)\frac{\pi}{2},k=0,1,2,\ldots$ ២ពិន្ទុ

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

$\sin 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x_2^2 = l\frac{\pi}{2}, l = 0,1,2,\ldots \quad \sin 5x^2 = 0 \Leftrightarrow x_3^2 = m\frac{\pi}{5}, m = 0,1,2,\ldots$ ២ពិន្ទុ

- បើ $l = 2n+1 \Rightarrow x_2^2 = (2n+1)\frac{\pi}{2} = x_1^2$
- បើ $l = 2n \Rightarrow x_2^2 = n\pi = x_3^2$ នៅពេលដែល $m = 5p$

$(E) \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{(2k+1)\frac{\pi}{2}}, x = \pm\sqrt{m\frac{\pi}{5}}$ ដែល $k = 0,1,2,\ldots$ និង $m = 0,1,2,\ldots$ ។ ២ពិន្ទុ

IV-(១៥ពិន្ទុ) រកប្រវែងអតិបរមានៃអង្កត់ទ្រូងរបស់បាតប្រអប់ដែលអាចផលិតបាន

គេមាន

$$D(a) = \frac{a^2 - \sqrt{a^4+4}+2}{a} = \frac{(a^2+2)^2-(a^4+4)}{a(a^2+2+\sqrt{a^4+4})}$$ ៣ពិន្ទុ

$$= \frac{4a^2}{a(a^2+2+\sqrt{a^4+4})} = \frac{4}{(a^2+2+\sqrt{a^4+4})/a}$$

$$= \frac{4}{a+\frac{2}{a}+\sqrt{a^2+\frac{4}{a^2}}}$$ ៣ពិន្ទុ

តាមវិសមភាពកូស៊ី គេបាន

$$a+\frac{2}{a} \geq 2\sqrt{2},\ a^2+\frac{4}{a^2} \geq 4 \Rightarrow \sqrt{a^2+\frac{4}{a^2}} \geq 2$$ ៣ពិន្ទុ

$$a+\frac{2}{a}+\sqrt{a^2+\frac{4}{a^2}} \geq 2\sqrt{2}+2 \Rightarrow D(a) = \frac{4}{a+\frac{2}{a}+\sqrt{a^2+\frac{4}{a^2}}} \leq \frac{4}{2\sqrt{2}+2} = 2\sqrt{2}-2$$ ៣ពិន្ទុ

ដូចនេះប្រវែងអតិបរមានៃអង្កត់ទ្រូងរបស់បាតប្រអប់ $Max(D(a)) = 2\sqrt{2}-2$ ឯកតាប្រវែង ។ ៣ពិន្ទុ

V-(១៥ពិន្ទុ) គណនាផលគុណ $p = s(a_1)s(a_2)s(a_3)s(a_4)s(a_5)$

ដោយ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 ជាឫសពហុធា $r(x)$ នោះគេបាន

$$r(x) = x^5 - 5x^3 - 3x^2 + 2x + 1 = (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)(x-a_5) = \prod_{i=1}^{5}(x-a_i)$$ ៣ពិន្ទុ

ផលគុណ $p = s(a_1)s(a_2)s(a_3)s(a_4)s(a_5) = (5-a_1^2)(5-a_2^2)(5-a_3^2)(5-a_4^2)(5-a_5^2)$ ៣ពិន្ទុ

$$p = \prod_{i=1}^{5}(\sqrt{5}-a_i) \times \prod_{i=1}^{5}(\sqrt{5}+a_i)$$ ៣ពិន្ទុ

$$= \prod_{i=1}^{5}(\sqrt{5}-a_i) \times (-1)\left(\prod_{i=1}^{5}(-\sqrt{5}-a_i)\right) = -r(\sqrt{5})r(-\sqrt{5})$$ ២ពិន្ទុ

$$= -((\sqrt{5})^5 - 5(\sqrt{5})^3 - 3(\sqrt{5})^2 + 2\sqrt{5}+1)((-\sqrt{5})^5 - 5(-\sqrt{5})^3 - 3(-\sqrt{5})^2 - 2\sqrt{5}+1)$$ ២ពិន្ទុ

$$= -(-14+2\sqrt{5})(-14-2\sqrt{5}) = -176$$ ២ពិន្ទុ

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

VI-(២០ពិន្ទុ) គណនាផលបូក $S=f(\frac{1}{2012})+f(\frac{2}{2012})+\cdots+f(\frac{2011}{2012})$

គេមាន

$f(x)+f(1-x)=\frac{a^x}{a^x+\sqrt{a}}+\frac{a^{1-x}}{a^{1-x}+\sqrt{a}}$ ៣ពិន្ទុ

$f(x)+f(1-x)=\frac{a^x}{a^x+\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+a^x}=1$ ៣ពិន្ទុ

គេអាចសរសេរ

$f(\frac{1}{2012})+f(\frac{2011}{2012})=1$ ២ពិន្ទុ

$f(\frac{2}{2012})+f(\frac{2010}{2012})=1$ ២ពិន្ទុ

$f(\frac{3}{2012})+f(\frac{2009}{2012})=1$ ២ពិន្ទុ

....

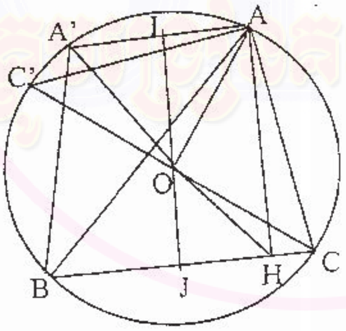
$f(\frac{1005}{2012})+f(\frac{1007}{2012})=1$ ២ពិន្ទុ

$f(\frac{1006}{2012})=f(1/2)=\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{a}}=1/2$ ៣ពិន្ទុ

ដោយបូកអង្គ និង អង្គ គេបាន

$S=f(\frac{1}{2012})+f(\frac{2}{2012})+\cdots+f(\frac{2011}{2012})=1005+(1/2)=1005.5$ ៣ពិន្ទុ

VII- (២០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $\angle BAC+\angle COH<\frac{\pi}{2}$



៤ពិន្ទុ

គេគូសអង្កត់ធ្នូ $AA'\parallel BC$ ហើយគេបាន $\angle ACB=\angle A'BC$ ២ពិន្ទុ

$\angle A'BC-\angle ABC\geq\frac{\pi}{6}\Rightarrow\angle A'BC\geq\angle ABC+\frac{\pi}{6}$

$\angle CBA+\angle ABA'\geq\angle ABC+\frac{\pi}{6}\Rightarrow\angle ABA'\geq\frac{\pi}{6}$ ២ពិន្ទុ

$\Rightarrow\angle AOA'\geq\frac{\pi}{3}$

តាង I,J ជាចំណុចកណ្ដាលអង្កត់ធ្នូ AA',BC រៀងគ្នា។

ត្រីកោណសមបាត OAA' មាន $\angle AOA'\geq\frac{\pi}{3}\Rightarrow AA'\geq OA=R$ ២ពិន្ទុ

គេបាន $AI\geq R/2$

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

$AIJH$ ជាចតុកោណកែង នោះគេបាន $AI = HJ \geq R/2$ ២ពិន្ទុ

ត្រីកោណកែង$JOH : OH > JH \geq R/2 \Rightarrow OH > R/2 \quad (1)$

តែ $HC = JC - JH < R - JH \leq R/2 \Rightarrow HC < R/2 \quad (2)$ ២ពិន្ទុ

$(1) \& (2) \Rightarrow HC < OH$ ២ពិន្ទុ

$\Rightarrow \angle COH < \angle OCH$

គូសអង្កត់ផ្ចិត CC' ហើយគេបាន $\angle C'CB = \angle C'AB$ (ស្កាត់ធ្នូរួម $C'B$) ២ពិន្ទុ

$\angle COH < \angle OCH \Rightarrow \angle COH + \angle BAC < \angle OCH + \angle BAC$

$\angle COH + \angle BAC < \angle C'AB + \angle BAC = \angle C'AC = \pi/2$ ២ពិន្ទុ

ថ្ងៃទី ០៧ ខែ មេសា ឆ្នាំ ២០១២

អ្នកកត់ត្រា

ថ្ងៃទី ០៧ ខែ មេសា ឆ្នាំ ២០១២

១០ បានឃើញ និង ឯកភាព

ប្រធានក្រុមកំណែគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី ១២

អ៊ី សាងលី

សុខ ពិសិដ្ឋ
www.pisethsok.wordpress.com
គ្រូបង្រៀនគណិតវិទ្យា

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស

ផ្នែកអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា ថ្នាក់ទី៩ និងថ្នាក់ទី១២

សម័យប្រឡង: ០២ មេសា ២០១២

វិញ្ញាសាទី២: គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២ សម្រាប់ថ្ងៃទី: ០៤-៤-២០១២

រយៈពេល ១៨០ នាទី ពិន្ទុ ១០០

I. (១០ពិន្ទុ) គេតាង $[x]$ ជាផ្នែកគត់នៃចំនួនពិត x ហើយដែលកំណត់ដោយ $[x] \le x < [x]+1$ ។

បង្ហាញថា បើ b ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមាន នោះគេបាន $\left[\dfrac{x}{b}\right] = \left[\dfrac{[x]}{b}\right]$ ។

II. (១០ពិន្ទុ) អនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ដោយ $f(x) = \cos x + \cos(\sqrt{p}\,x)$ ដែល p ជាចំនួនបឋម ។

បង្ហាញថា f មិនមែនជាអនុគមន៍ខួបលើសំណុំចំនួនពិតទេ ។

III. (២០ពិន្ទុ) គេឲ្យផលបូក $S(a,b) = (a+1)^b + (a+2)^b + (a+3)^b + (a+4)^b + (a+5)^b$ ដែល a និង b ជាពីរចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបមិនអវិជ្ជមាន ។

បង្ហាញថា $S(a,b)$ ចែកដាច់នឹង 5 បើ b មិនមែនជាពហុគុណនៃ 4 ។

IV. (២០ពិន្ទុ) សមីការ $t^3 = 3t^2 + 4t - 5$ មានឫសបីផ្សេងគ្នា a, b និង c ។

គណនាតម្លៃលេខនៃ $F_7(a,b,c) = \dfrac{a^7 - b^7}{a-b} + \dfrac{b^7 - c^7}{b-c} + \dfrac{c^7 - a^7}{c-a}$ ។

V. (២០ពិន្ទុ) ត្រីកោណ ABC មួយមាន $\angle ABC = 2a$ និងផ្ទៃក្រឡា s ។ D ជាចំណុចមួយស្ថិតនៅលើជ្រុង AC ហើយដែល រង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABD ប៉ុនគ្នានឹងរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ BCD ។

បង្ហាញថា $BD = \sqrt{\dfrac{s}{\tan a}}$ ។

VI. (២០ពិន្ទុ) ស្វ៊ីត (x_n) កំណត់ដោយ $x_1 = 1,\ x_2 = 1$ និង $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ ចំពោះ $n \ge 2$ ។

១- បង្ហាញថា $x_{k+1} \cdot x_{k+2} - x_k \cdot x_{k+3} = (-1)^k$ ចំពោះ $\forall k \in N$ ។

២- គេតាង $arc\cot$ ជាអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍ $\cot$ ។

បង្ហាញថា $arc\cot x_1 - arc\cot x_3 - arc\cot x_5 - \cdots - arc\cot x_{2011} = arc\cot x_{2012}$ ។

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស

ផ្នែកអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា ថ្នាក់ទី ៩ និងទី ១២

សម័យប្រឡងៈ ០២.០៤.២០១២

អត្រាកំណែគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២ លើកទី ២ ថ្ងៃទី ០៤.០៤.២០១២

រយៈពេល ១៨០នាទី ពិន្ទុ ១០០

I-(១០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា បើ b ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមាន នោះ $[x/b]=[[x]/b]$ ៖

តាង $a=[x]$ ហើយតាមវិធីចែកអឺគ្លីតនៃ $a \& b$ គេបាន $a=bq+r, 0\le r<b$ ២ពិន្ទុ

ដោយ $0\le r<b \Rightarrow bq\le bq+r<b(q+1)$ ហើយ $bq\le a<b(q+1)\Rightarrow q\le \dfrac{a}{b}<q+1$

គេទាញបាន $[a/b]=q$ ហើយ $[a/b]=[[x]/b]=q$ (1) ២ពិន្ទុ

ម្យ៉ាងទៀត $[x]\le x<[x]+1\Rightarrow x=a+\varepsilon=bq+r+\varepsilon, 0\le\varepsilon<1$

គេបាន $[x/b]=[(bq+r+\varepsilon)/b]=[q+(r+\varepsilon)/b]$ ២ពិន្ទុ

តែ $0\le\varepsilon<1 \& 0\le r\le b-1\Rightarrow 0\le r+\varepsilon<b$ ហើយ $0\le (r+\varepsilon)/b<1$ ២ពិន្ទុ

គេបាន $q\le q+(r+\varepsilon)/b<q+1$ ហើយ $q\le[x/b]<q+1\Rightarrow [x/b]=q$ (2)

តាម (1) & (2) $\Rightarrow [x/b]=[[x]/b]$ ។ ២ពិន្ទុ

II-(១០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា f មិនមែនជាអនុគមន៍ខួបលើសំណុំចំនួនពិតទេ ៖

ឧបមាថា f មានខួប T នោះគេបាន $f(x+T)=f(x)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។ ២ពិន្ទុ

បានន័យថា $\cos(x+T)+\cos(x\sqrt{p}+T\sqrt{p})=\cos x+\cos(x\sqrt{p})$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។ ២ពិន្ទុ

ពិនិត្យចំពោះ $x=0$ គេបាន ៖ $\cos T+\cos T\sqrt{p}=2 \Leftrightarrow \cos T=1 \wedge \cos T\sqrt{p}=1$ ២ពិន្ទុ

$T=k2\pi \wedge T\sqrt{p}=m2\pi, k\in \mathbb{N}, m\in\mathbb{N}$ ហើយ $\sqrt{p}=\dfrac{m2\pi}{k2\pi}=\dfrac{m}{k}$ ២ពិន្ទុ

ដោយ $\sqrt{p}\in\overline{Q}_+ \wedge \dfrac{m}{k}\in Q_+$ នោះគេបាន $\sqrt{p}=\dfrac{m}{k}$ ជាករណីមិនអាចមាន ។

ដូចនេះ f មិនមែនជាអនុគមន៍ខួបលើសំណុំចំនួនពិតទេ ។ ២ពិន្ទុ

III-(២០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $S(a,b)$ ចែកដាច់នឹង 5 បើ b មិនមែនជាពហុគុណនៃ 4

ចំពោះ $a\ge 0$ គេបាន $a+1, a+2, a+3, a+4, a+5$ ចែកនឹង 5 បានសំណល់ $0,1,2,3,4$ ។ ២ពិន្ទុ

គេបាន $S(a,b)\equiv 0^b+1^b+2^b+3^b+4^b=1^b+2^b+3^b+4^b \pmod 5$ ២ពិន្ទុ

តាមការសង្កេតគេបាន ៖ $2^{4m}\equiv 1, 2^{4m+1}\equiv 2, 2^{4m+2}\equiv 4, 2^{4m+3}\equiv 3 \pmod 5$ ២ពិន្ទុ

$3^{4m}\equiv 1, 3^{4m+1}\equiv 3, 3^{4m+2}\equiv 4, 3^{4m+3}\equiv 2 \pmod 5$ ២ពិន្ទុ

$4^{4m}\equiv 1, 4^{4m+1}\equiv 4, 4^{4m+2}\equiv 1, 4^{4m+3}\equiv 4 \pmod 5$ ២ពិន្ទុ

-បើ $b=4m+1$ (មិនមែនជាពហុគុណនៃ 4) នោះគេបាន

$1^b+2^b+3^b+4^b=1^{4m+1}+2^{4m+1}+3^{4m+1}+4^{4m+1}\equiv 1+2+3+4=10\equiv 0 \pmod 5$ ២ពិន្ទុ

$\Rightarrow S(a,b)\equiv 0 \pmod 5$

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

-បើ $b=4m+2$ (មិនមែនជាពហុគុណនៃ 4) នោះគេបាន

$1^b+2^b+3^b+4^b=1^{4m+2}+2^{4m+2}+3^{4m+2}+4^{4m+2}\equiv 1+4+4+1=10\equiv 0 \pmod 5$ ២ពិន្ទុ

$\Rightarrow S(a,b)\equiv 0 \pmod 5$

-បើ $b=4m+3$ (មិនមែនជាពហុគុណនៃ 4) នោះគេបាន

$1^b+2^b+3^b+4^b=1^{4m+3}+2^{4m+3}+3^{4m+3}+4^{4m+3}\equiv 1+3+2+4=10\equiv 0 \pmod 5$ ២ពិន្ទុ

$\Rightarrow S(a,b)\equiv 0 \pmod 5$.

ដូចនេះ $S(a,b)$ ចែកដាច់នឹង 5 បើ b មិនមែនជាពហុគុណនៃ 4 ។ ២ពិន្ទុ ២ពិន្ទុ

IV-(២០ពិន្ទុ) គណនាតម្លៃលេខនៃ $F_7(a,b,c)=\dfrac{a^7-b^7}{a-b}+\dfrac{b^7-c^7}{b-c}+\dfrac{c^7-a^7}{c-a}$ ៖

សមីការ $t^3=3t^2+4t-5$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះ $t=0$ គឺថា $t\neq 0$

នោះគេបាន $t^3=3t^2+4t-5 \Leftrightarrow t^{k+3}=3t^{k+2}+4t^{k+1}-5t^k$ ២ពិន្ទុ

ដោយ a, b និង c ជាឬសបីផ្សេងគ្នានោះគេបាន $a^{k+3}=3a^{k+2}+4a^{k+1}-5a^k$ (1),

$b^{k+3}=3b^{k+2}+4b^{k+1}-5b^k$ (2) , $c^{k+3}=3c^{k+2}+4c^{k+1}-5c^k$ (3) ២ពិន្ទុ

(1)−(2) រួចចែកនឹង $(a-b)$: $\dfrac{a^{k+3}-b^{k+3}}{a-b}=3\dfrac{a^{k+2}-b^{k+2}}{a-b}+4\dfrac{a^{k+1}-b^{k+1}}{a-b}-5\dfrac{a^k-b^k}{a-b}$ (4) ២ពិន្ទុ

(2)−(3) រួចចែកនឹង $(b-c)$: $\dfrac{b^{k+3}-c^{k+3}}{b-c}=3\dfrac{b^{k+2}-c^{k+2}}{b-c}+4\dfrac{b^{k+1}-c^{k+1}}{b-c}-5\dfrac{b^k-c^k}{b-c}$ (5) ២ពិន្ទុ

(3)−(1) រួចចែកនឹង $(c-a)$: $\dfrac{c^{k+3}-a^{k+3}}{c-a}=3\dfrac{c^{k+2}-a^{k+2}}{c-a}+4\dfrac{c^{k+1}-a^{k+1}}{c-a}-5\dfrac{c^k-a^k}{c-a}$ (6) ២ពិន្ទុ

ដោយបូក (4)+(5)+(6) អង្គ និងអង្គ

$$\frac{a^{k+3}-b^{k+3}}{a-b}+\frac{b^{k+3}-c^{k+3}}{b-c}+\frac{c^{k+3}-a^{k+3}}{c-a}=3\left(\frac{a^{k+2}-b^{k+2}}{a-b}+\frac{b^{k+2}-c^{k+2}}{b-c}+\frac{c^{k+2}-a^{k+2}}{c-a}\right)+$$

$$+4\left(\frac{a^{k+1}-b^{k+1}}{a-b}+\frac{b^{k+1}-c^{k+1}}{b-c}+\frac{c^{k+1}-a^{k+1}}{c-a}\right)-5\left(\frac{a^k-b^k}{a-b}+\frac{b^k-c^k}{b-c}+\frac{c^k-a^k}{c-a}\right) \quad (7)$$ ២ពិន្ទុ

តាង $F_k=\dfrac{a^k-b^k}{a-b}+\dfrac{b^k-c^k}{b-c}+\dfrac{c^k-a^k}{c-a}$ $F_{k+1}=\dfrac{a^{k+1}-b^{k+1}}{a-b}+\dfrac{b^{k+1}-c^{k+1}}{b-c}+\dfrac{c^{k+1}-a^{k+1}}{c-a}$

$F_{k+2}=\dfrac{a^{k+2}-b^{k+2}}{a-b}+\dfrac{b^{k+2}-c^{k+2}}{b-c}+\dfrac{c^{k+2}-a^{k+2}}{c-a}$, $F_{k+3}=\dfrac{a^{k+3}-b^{k+3}}{a-b}+\dfrac{b^{k+3}-c^{k+3}}{b-c}+\dfrac{c^{k+3}-a^{k+3}}{c-a}$

គេបាន $F_{k+3}=3F_{k+2}+4F_{k+1}-5F_k$ (8) ២ពិន្ទុ

- បើ $k=0$ នោះគេបាន $F_0=0, F_1=1+1+1=3, F_2=2(a+b+c)=2\times 3=6$

ហើយតាម (8) គេបាន $F_3=3F_2+4F_1-5F_0=3\times 6+4\times 3-5\times 0=30$ ២ពិន្ទុ

- បើ $k=1$ នោះតាម (8) គេបាន $F_4=3F_3+4F_2-5F_1=90+24-15=99$

- បើ $k=2$ នោះតាម (8) គេបាន $F_5=3F_4+4F_3-5F_2=297+120-30=387$ ២ពិន្ទុ

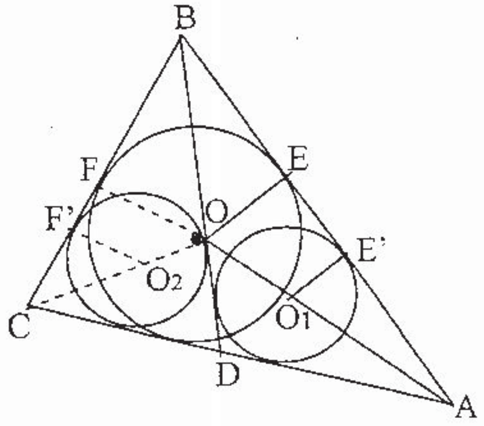
- បើ $k=3$ នោះតាម (8) គេបាន $F_6=3F_5+4F_4-5F_3=1161+396-150=1407$

- បើ $k=4$ នោះតាម (8) គេបាន $F_7=3F_6+4F_5-5F_4=4221+1548-495=5274$

ដូចនេះ $F_7(a,b,c)=\dfrac{a^7-b^7}{a-b}+\dfrac{b^7-c^7}{b-c}+\dfrac{c^7-a^7}{c-a}=5274$ ២ពិន្ទុ

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

V-(២០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $BD=\sqrt{\dfrac{s}{\tan a}}$:



៤ពិន្ទុ

តាង : s_1 និង p_1 ជាផ្ទៃក្រឡា និង កន្លះបរិមាត្រនៃΔABD s_2 និង p_2 ជាផ្ទៃក្រឡា និង កន្លះបរិមាត្រនៃΔBCD

p ជា កន្លះបរិមាត្រនៃΔABC r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងΔABC r' ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងΔABD និងΔBCD

E និង E' ជាចំនុចប៉ះរវាងAB ជាមួយរង្វង់ចារឹកក្នុងΔABC និងΔABD

F និង F' ជាចំនុចប៉ះរវាងBC ជាមួយរង្វង់ចារឹកក្នុងΔABC និងΔBCD

គេបាន : $s=s_1+s_2$, $pr=p_1r'+p_2r'=(p_1+p_2)r'$ (1) ២ពិន្ទុ

ម្យ៉ាងទៀត ; $2p_1+2p_2=2p+2BD \Rightarrow p_1+p_2=p+BD$ ២ពិន្ទុ

(1) អាចសរសេរ : $pr=(p+BD)r'$ ហើយ $\dfrac{r'}{r}=\dfrac{p}{p+BD}$ (2) ២ពិន្ទុ

$\Delta E'AO_1\sim\Delta EAO$: $\dfrac{AE'}{AE}=\dfrac{r'}{r}$ ហើយ $\Delta F'CO_2\sim\Delta FCO$: $\dfrac{CF'}{CF}=\dfrac{r'}{r}$ (3)

www.pisethsok.wordpress.com

ក្នុងΔABC គេមាន $p=AE+BF+FC=AE+BC\Rightarrow AE=p-BC$

ក្នុងΔABC គេមាន $p=CF+AE+EB=CF+AB\Rightarrow CF=p-AB$ ២ពិន្ទុ

ក្នុងΔABD គេមាន $AE'=p_1-BD$ ក្នុងΔBCD គេមាន $CF'=p_2-BD$

(3) : $\dfrac{r'}{r}=\dfrac{p_1-BD}{p-BC}=\dfrac{p_2-BD}{p-AB}=\dfrac{p_1+p_2-2BD}{2p-(BC+AB)}$

$\dfrac{r'}{r}=\dfrac{p+BD-2BD}{AC}=\dfrac{p-BD}{AC}$ (4) ២ពិន្ទុ

តាម (2) និង (4) : $\dfrac{p}{p+BD}=\dfrac{p-BD}{AC}\Rightarrow p\cdot AC=p^2-BD^2$ ២ពិន្ទុ

$\Rightarrow BD^2=p(p-AC)=p\cdot BE$ (5) ព្រោះ $BI=p-AC$

២ពិន្ទុ

ក្នុងΔEBO : $BE=\dfrac{r}{\tan a}$

២ពិន្ទុ

(5) : $BD^2=\dfrac{pr}{\tan a}=\dfrac{s}{\tan a}\Rightarrow BD=\sqrt{\dfrac{s}{\tan a}}$

VI-(២០ពិន្ទុ)១- បង្ហាញថា $x_{k+1}\cdot x_{k+2}-x_k\cdot x_{k+3}=(-1)^k$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ k

- ចំពោះ$k=1$ គេបាន $x_2\cdot x_3-x_1\cdot x_4=1\times2-1\times3=-1=(-1)^1$

-ឧបមាពិត ដល់ $k=p$ គឺថា $x_{p+1}\cdot x_{p+2}-x_p\cdot x_{p+3}=(-1)^p$ ២ពិន្ទុ

-សិក្សាករណី $k=p+1$

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

$$x_{p+2}\cdot x_{p+3}-x_{p+1}\cdot x_{p+4}=x_{p+2}(x_{p+1}+x_{p+2})-x_{p+1}(x_{p+2}+x_{p+3})$$

$$=(x_{p+2})^2-x_{p+1}(x_{p+1}+x_{p+2})=(x_{p+2})^2-(x_{p+1})^2-x_{p+1}x_{p+2}$$ ២ពិន្ទុ

$$=(x_{p+2}-x_{p+1})(x_{p+2}+x_{p+1})-x_{p+1}x_{p+2}$$

$$=(x_{p+1}+x_p-x_{p+1})(x_{p+3})-x_{p+1}x_{p+2}$$

$$=x_px_{p+3}-x_{p+1}x_{p+2}$$

$$=(-1)(x_{p+1}x_{p+2}-x_px_{p+3})=(-1)(-1)^p=(-1)^{p+1}$$ ២ពិន្ទុ

ដូច្នេះ $x_{k+1}\cdot x_{k+2}-x_k\cdot x_{k+3}=(-1)^k$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ k ។

២- បង្ហាញថា $arc\cot x_1-arc\cot x_3-arc\cot x_5-\cdots-arc\cot x_{2011}=arc\cot x_{2012}$

គេដឹងថា $a=\cot\alpha, b=\cot\beta \Leftrightarrow \alpha=arc\cot a, \beta=arc\cot b$ ២ពិន្ទុ

$$\cot(\alpha-\beta)=\frac{\cot\alpha\cot\beta+1}{\cot\beta-\cot\alpha}\Leftrightarrow\alpha-\beta=arc\cot\left(\frac{\cot\alpha\cot\beta+1}{\cot\beta-\cot\alpha}\right)$$

$$\Leftrightarrow arc\cot a-arc\cot b=arc\cot\left(\frac{ab+1}{b-a}\right)$$ ២ពិន្ទុ

គេអាចសរសេរ

$$arc\cot x_{2i}-arc\cot x_{2i+1}=arc\cot\left(\frac{x_{2i}x_{2i+1}+1}{x_{2i+1}-x_{2i}}\right)=arc\cot\left(\frac{x_{2i}x_{2i+1}+1}{x_{2i}+x_{2i-1}-x_{2i}}\right)$$

$$arc\cot x_{2i}-arc\cot x_{2i+1}=arc\cot\left(\frac{x_{2i}x_{2i+1}+1}{x_{2i-1}}\right)\quad(1)$$ ២ពិន្ទុ

តាមសំណួរទី១ ខាងលើ និងយក $k=2i-1$ នោះគេបាន ២ពិន្ទុ

$$x_{2i}\cdot x_{2i+1}-x_{2i-1}\cdot x_{2i+2}=-1\Rightarrow x_{2i}\cdot x_{2i+1}+1=x_{2i-1}\cdot x_{2i+2}$$

តាម (1) គេបាន $arc\cot x_{2i}-arc\cot x_{2i+1}=arc\cot x_{2i+2}$

ដោយជួសតម្លៃ $i=1,2,3,\cdots,1005$ នោះគេបាន

$arc\cot x_1-arc\cot x_3=arc\cot x_4$ (ព្រោះ $x_2=x_1$) ២ពិន្ទុ

$arc\cot x_4-arc\cot x_5=arc\cot x_6$

.... ២ពិន្ទុ

$arc\cot x_{2010}-arc\cot x_{2011}=arc\cot x_{2012}$

បូកអង្គ និងអង្គ គេបាន ២ពិន្ទុ

$arc\cot x_1-arc\cot x_3-arc\cot x_5-\cdots-arc\cot x_{2011}=arc\cot x_{2012}$ ។

ថ្ងៃទី ០៤ ខែ មេសា ឆ្នាំ ២០១២

បានឃើញ និង ឯកភាព

ប្រធានក្រុមកំណែគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី ១២

អ៊ុំ ស៊ាងលី

ថ្ងៃទី ០៤ ខែ មេសា ឆ្នាំ ២០១២

អ្នកកត់ត្រា

www.pisethsok.wordpress.com

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស

ផ្នែកអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា ថ្នាក់ទី ៩ និងទី ១២

សម័យប្រឡង ៖ ០១.០៤.២០១៣

វិញ្ញាសា៖ គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២ លើកទី ១ ថ្ងៃទី ០១_០៤_២០១៣

រយៈពេល ១៨០នាទី ពិន្ទុ ១០០

I. (១០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា គ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប k អាចសរសេរជារាង $a^2+b^2-5c^2$ ដែល a,b,c ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប ។

II. (១៥ពិន្ទុ) កំណត់ចំនួនឫសគត់វិជ្ជមានទាំងអស់នៃសមីការ $x+y+z=n$ ដែល n ជាចំនួនគត់ធំជាង 2 ។

III. (១៥ពិន្ទុ) ស្វ៊ីតចំនួនពិត $x_1, x_2, \ldots, x_n$ កំណត់ដោយ $x_1=0$ និង $|x_i|=|x_{i-1}+c|$ ដែល $2\le i\le n$ និង c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ កំណត់តម្លៃអប្បបរមារបស់ $A=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ ជាអនុគមន៍នៃចំនួនពិតវិជ្ជមាន c តែមួយគត់ ។

IV. (២០ពិន្ទុ) សិស្ស 9 នាក់ ធ្វើដំណើរកម្សាន្តតាមកាណូតមួយ ដែលខ័ណ្ឌជា 3 បន្ទប់ដាច់ពីគ្នា ។ សិស្សម្នាក់ៗត្រូវឡើងជិះនៅក្នុងបន្ទប់ណាមួយដោយចៃដន្យ ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ ៖

A: សិស្ស 3 នាក់ ជិះនៅក្នុងបន្ទប់នីមួយ

B: សិស្ស 3 នាក់ ជិះនៅក្នុងបន្ទប់នីមួយៗ

C: សិស្ស 2 នាក់ជិះនៅក្នុងបន្ទប់មួយ 3 នាក់ ជិះនៅក្នុងបន្ទប់មួយទៀត ហើយ 4 នាក់ ជិះនៅក្នុងបន្ទប់ ដែលនៅសល់ ។

www.pisethsok.wordpress.com

V. (២០ពិន្ទុ) P ជា ចំណុចមួយនៅក្នុងត្រីកោណ ABC មួយ ។ បន្ទាត់ AP ជួប BC ត្រង់ I បន្ទាត់ BP ជួប CA ត្រង់ J ហើយ បន្ទាត់ CP ជួប AB ត្រង់ K ។

បង្ហាញថា $\frac{PA}{PI}\times\frac{PB}{PJ}+\frac{PB}{PJ}\times\frac{PC}{PK}+\frac{PC}{PK}\times\frac{PA}{PI}\ge 12$ ។

VI. (២០ពិន្ទុ) រកគ្រប់អនុគមន៍ f ដែលកំណត់ និងមានដេរីវេចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x, y, xy\neq 1$ ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព

$$f(x)+f(y)=f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$ ។

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស

ផ្នែកអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា ថ្នាក់ទី ៩ និងទី ១២

សម័យប្រឡង: ០១.០៤.២០១៣

អត្រាកំណែគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២ លើកទី ១ ថ្ងៃទី ០១.០៤.២០១៣

រយៈពេល ១៨០នាទី ពិន្ទុ ១០០

I. (១០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា គ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប k អាចសរសេរជារាង $a^2+b^2-5c^2$ ដែល a,b,c ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប

- ករណី $k=2n+1, n\in Z$ គេអាចសរសេរ $k=2n+1=n^2+4n^2-5n^2+2n+1$ ២ពិន្ទុ

$k=n^2+2n+1+4n^2-5n^2$ ២ពិន្ទុ

$k=(n+1)^2+(2n)^2-5n^2$

- ករណី $k=2n, n\in Z$ គេអាចសរសេរ $k=2n=n^2+4n^2-5n^2-8n+10n$ ២ពិន្ទុ

$k=n^2-4n+4+4n^2-4n+1-5n^2+10n-5$ ២ពិន្ទុ

$k=(n-2)^2+(2n-1)^2-5(n-1)^2$ ២ពិន្ទុ

II. (១៥ពិន្ទុ) កំណត់ចំនួនចម្លើយគត់វិជ្ជមានទាំងអស់នៃសមីការ $x+y+z=n$ ដែល n ជាចំនួនគត់ធំជាង 2

- ដំបូងគេពិនិត្យសមីការ $y+z=k$ ដែល k ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ២ពិន្ទុ

y អាចយកតម្លៃ $1, 2, \dots, k-1$ ព្រោះបើ $y\ge k \Rightarrow z\le 0$ ដែលមិនអាច ២ពិន្ទុ

z អាចយកតម្លៃ $k-y$ គឺ $z=k-1, k-2, \dots, 1$

ដូចនេះ សមីការ $y+z=k$ មាន $(k-1)$ គូចម្លើយគត់វិជ្ជមាន ។ ២ពិន្ទុ

- ចំពោះ សមីការ $x+y+z=n$

x អាចយកតម្លៃ $1, 2, \dots, n-2$ ព្រោះបើ $x\ge n-1 \Rightarrow x+y+z\ge n-1+1+1=n+1$ ដែលមិនអាច ២ពិន្ទុ

ចំណែក y និង z ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $y+z=n-x$ ដែលអាចមាន $((n-x)-1)$ គូចម្លើយ (y,z) ២ពិន្ទុ

បានន័យថា ចំពោះ តម្លៃណាមួយរបស់ x គេអាចបាន $(n-x-1)$ គូចម្លើយ (y,z) ។

ដោយ $x=1, 2, \dots, n-2$ នោះគេបានចំនួន ចម្លើយគត់វិជ្ជមាន (x,y,z) ទាំងអស់នៃសមីការ $x+y+z=n$ ២ពិន្ទុ

$\sigma=(n-1-1)+(n-2-1)+\cdots+(n-(n-2)-1)$

$=(n-2)+(n-3)+\cdots+1=0.5(n-1)(n-2)$ ៣ពិន្ទុ

ដូចនេះ ចំនួន ចម្លើយគត់វិជ្ជមាន (x,y,z) ទាំងអស់នៃសមីការ: $\sigma=0.5(n-1)(n-2)$ ។

III. (១៥ពិន្ទុ) កំណត់តម្លៃអប្បបរមារបស់ $A=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ ជាអនុគមន៍ចំនួនពិតវិជ្ជមាន c តែមួយគត់

គេមាន $\sum_{i=1}^{n+1}x_i^2=\sum_{i=2}^{n+1}|x_i|^2=\sum_{i=2}^{n+1}|x_{i-1}+c|^2$ ២ពិន្ទុ

$=\sum_{i=2}^{n+1}(x_{i-1}+c)^2=\sum_{i=2}^{n+1}x_{i-1}^2+2c\sum_{i=2}^{n+1}x_{i-1}+nc^2$ ២ពិន្ទុ

$=\sum_{i=1}^{n}x_i^2+2c\sum_{i=1}^{n}x_i+nc^2$ ២ពិន្ទុ

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n+1}x_i^2-\sum_{i=1}^{n}x_i^2=2c\sum_{i=1}^{n}x_i+nc^2$ ២ពិន្ទុ

$\Rightarrow 0\le x_{n+1}^2=2c\sum_{i=1}^{n}x_i+nc^2$ ២ពិន្ទុ

គេទាញបាន $2c\sum_{i=1}^{n}x_i\ge -nc^2$ ២ពិន្ទុ

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

៣ពិន្ទុ

$$\frac{PA}{PI}=\frac{AI-PI}{PI}=\frac{AI}{PI}-1=\frac{S}{S_1}-1=\frac{S_2+S_3}{S_1}$$ ២ពិន្ទុ

តាមរបៀបដូចគ្នា

$$\frac{PB}{PJ}=\frac{S_3+S_1}{S_2}$$ ២ពិន្ទុ

$$\frac{PC}{PK}=\frac{S_1+S_2}{S_3}$$ ២ពិន្ទុ

គេអាចសរសេរ

$$\frac{PA}{PI}\times\frac{PB}{PJ}+\frac{PB}{PJ}\times\frac{PC}{PK}+\frac{PC}{PK}\times\frac{PA}{PI}=\frac{(S_2+S_3)(S_3+S_1)}{S_1S_2}+\frac{(S_3+S_1)(S_1+S_2)}{S_2S_3}+$$ ២ពិន្ទុ

$$+\frac{(S_1+S_2)(S_2+S_3)}{S_3S_1}$$

$$=\left(\frac{S_3}{S_1}+\frac{S_1}{S_3}\right)+\left(\frac{S_3}{S_2}+\frac{S_2}{S_3}\right)+\left(\frac{S_1}{S_2}+\frac{S_2}{S_1}\right)+3+\frac{S_1^2}{S_2S_3}+\frac{S_2^2}{S_3S_1}+\frac{S_3^2}{S_1S_2}$$ ២ពិន្ទុ

$$=\left(\frac{S_3}{S_1}+\frac{S_1}{S_3}\right)+\left(\frac{S_3}{S_2}+\frac{S_2}{S_3}\right)+\left(\frac{S_1}{S_2}+\frac{S_2}{S_1}\right)+3+\frac{S_1^2+S_2^2+S_3^2}{S_1S_2S_3}$$ ២ពិន្ទុ

$$\geq 2+2+2+3+3=12$$

ដូចនេះ $\frac{PA}{PI}\times\frac{PB}{PJ}+\frac{PB}{PJ}\times\frac{PC}{PK}+\frac{PC}{PK}\times\frac{PA}{PI}\geq 12$ ។ ២ពិន្ទុ

VI. (២០ពិន្ទុ) រកគ្រប់អនុគមន៍ f

គេមាន $f'(x)=\frac{1+y^2}{(1-xy)^2}f'\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$ (1) ៣ពិន្ទុ

$f'(y)=\frac{1+x^2}{(1-xy)^2}f'\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$ (2) ៣ពិន្ទុ

ដោយចែក (1) & (2) :

$$\frac{f'(x)}{f'(y)}=\frac{1+y^2}{1+x^2}$$ ២ពិន្ទុ

$\Rightarrow f'(x)(1+x^2)=f'(y)(1+y^2)$ ២ពិន្ទុ

គេទាញបាន អង្គទាំងពីរត្រូវតែស្មើនឹងចំនួនថេរ k ណាមួយ គឺថា $f'(x)(1+x^2)=k$

$\Rightarrow f'(x)=k/(1+x^2)$ ២ពិន្ទុ

$\Rightarrow f(x)=\int(k/(1+x^2))\,dx=k\arctan x+c$ ២ពិន្ទុ

បើ $y=0\Rightarrow f(x)+f(0)=f\left(\frac{x+0}{1-0}\right)=f(x)\Rightarrow f(0)=0$ ២ពិន្ទុ

តែ $f(0)=k\arctan 0+c=0\Rightarrow c=0$ ២ពិន្ទុ

ដូចនេះ $f(x)=k\arctan x$ ដែល k ជាចំនួនថេរណាមួយ ។ ២ពិន្ទុ

ថ្ងៃទី ០១ ខែ មេសា ឆ្នាំ ២០១៣

ប្រធានក្រុមកែវិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី ១២

អ៊ី សាងលី

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស

ផ្នែកអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា ថ្នាក់ទី ៩ និងទី ១២

សម័យប្រឡង : ០១.០៤.២០១៣

វិញ្ញាសា គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២ លើកទី ២ ថ្ងៃទី ០៣.០៤.២០១៣

រយៈពេល ១៨០នាទី ពិន្ទុ ១០០

I. (១០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $A=\frac{1}{n+1}C(2n,n)$ ជាចំនួនគត់ ចំពោះ $n=1,2,3,\dots$ ។

II. (១៥ពិន្ទុ) ត្រីកោណមួយមានជ្រុងប្រវែង a,b និង c ។ គេសង់កន្លះរង្វង់បី នៅខាងក្រៅត្រីកោណ និងមានអង្កត់ផ្ចិត ជាជ្រុងនីមួយៗរបស់ត្រីកោណនោះ ។ អង្កត់ប៉ះរួមនៃកន្លះរង្វង់ពីរៗ មានប្រវែង x,y និង z រៀងគ្នា ។ សរសេរផលបូក $\sum=\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}$ ជាអនុគមន៍នៃ a,b និង c ។

III. (១៥ពិន្ទុ) M ជា ចំណុចមួយនៅលើ ឬនៅក្នុងរង្វង់កាំ R មួយ ។ តាម M គេគូសអង្កត់ធ្នូពីរកែងគ្នា AC និង BD ។ រកតម្លៃធំបំផុត និងតម្លៃតូចបំផុតរបស់ផលបូក $S=AC+BD$ ។

IV. (២០ពិន្ទុ) គេឱ្យទំនាក់ទំនង D មួយ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌខាងក្រោម ៖

(i) $D(1,0,0,1)=1$,

(ii) $D(kw,x,ky,z)=k\,D(w,x,y,z)$,

(iii) $D(w,x,y,z)=-D(x,w,z,y)$,

(iv) $D(w+u,x,y+v,z)=D(w,x,y,z)-F(u,x,v,z)$ ដែល k,u,v,w,x,y និង z ជាចំនួនពិត ។

កំណត់ $D(a,b,c,d)$ ជាអនុគមន៍នៃចំនួនពិត a,b,c និង d ។

V. (២០ពិន្ទុ) គេតាង $s(n)$ ជាផលបូកលេខទាំងអស់របស់ចំនួន 2^n ដែល $n=1,2,3,\dots$ ។ បង្ហាញថា គ្មានចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $s(n+1)=s(n)$ ។

VI. (២០ពិន្ទុ) គេឱ្យ ចំនួនពិត $a_1,a_2,\dots,a_m$ និង $u_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ ដែល $n=1,2,\dots,m$ ។

បង្ហាញថា $\sum_{n=2}^{m}\left(\frac{u_n}{n}\right)^2\le 12\sum_{n=1}^{m}a_n^2$ ។

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស

ផ្នែកអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា ថ្នាក់ទី ៩ និងទី ១២

សម័យប្រឡង: ០១.០៤.២០១៣

អត្រាកំណែគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២ លើកទី ២ ថ្ងៃទី ០៣.០៤.២០១៣

រយៈពេល ១៨០នាទី ពិន្ទុ ១០០

I. (១០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $A=\frac{1}{n+1}C(2n,n)$ ជាចំនួនគត់ចំពោះ $n=1,2,3,\ldots$

គេមាន $A=\frac{1}{n+1}C(2n,n)=\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$ ២ពិន្ទុ

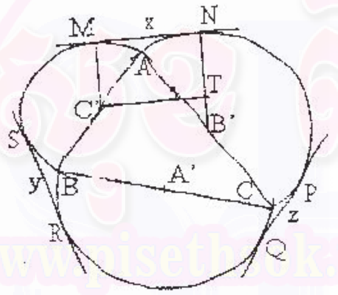
$A=\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}((n+1)-n)=\frac{(2n)!(n+1)}{n!(n+1)!}-\frac{(2n)!(n)}{n!(n+1)!}$ ២ពិន្ទុ

$=\frac{(2n)!}{(n!)^2}-\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$ ២ពិន្ទុ

$=C(2n,n)-C(2n,n-1)$ ២ពិន្ទុ

ដោយ $C(2n,n)\ \&\ C(2n,n-1)$ ជាចំនួនគត់ នោះ $A=C(2n,n)-C(2n,n-1)$ ជាចំនួនគត់ ។ ២ពិន្ទុ

II. (១៥ពិន្ទុ) សរសេរផលបូក $\sum=\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}$ ជាអនុគមន៍នៃ a, b និង c



៣ពិន្ទុ

គេយក ΔABC ជាត្រីកោណដែលមាន $BC=a, CA=b$ និង $AB=c$ ។

តាង A', B', C' ជាចំណុចកណ្ដាលរៀងរបស់ជ្រុង BC, CA, AB ។

តាង: MN ជាបន្ទាត់ប៉ះរួមនៃកន្លះរង្វង់ផ្ចិត C' និងផ្ចិត B' ហើយ $MN=x$

RS ជាបន្ទាត់ប៉ះរួមនៃកន្លះរង្វង់ផ្ចិត A' និងផ្ចិត C' ហើយ $RS=y$

PQ ជាបន្ទាត់ប៉ះរួមនៃកន្លះរង្វង់ផ្ចិត B' និងផ្ចិត A' ហើយ $PQ=z$ ។

គូស $C'T\perp B'N$ ត្រង់ T នោះគេបាន $MNTC'$ ជាចតុកោណកែង ។ ២ពិន្ទុ

រីឯ $MN=C'T=x$

គេបាន $B'C'=a/2, B'T=B'N-TN=|(b/2)-(c/2)|$ ២ពិន្ទុ

$C'T=\sqrt{(B'C')^2-(B'T)^2}=\sqrt{(a/2)^2-((b/2)-(c/2))^2}$ ២ពិន្ទុ

$x=(1/2)\sqrt{(a+b-c)(a-b+c)}$

តាមរបៀបដូចគ្នា គេបាន: ២ពិន្ទុ

$y=(1/2)\sqrt{(a-b-c)(-a+b+c)}$

$z=(1/2)\sqrt{(-a+b+c)(a-b+c)}$

គេបាន $\frac{yz}{x}=\frac{1}{2}(a+b-c)$, $\frac{zx}{y}=\frac{1}{2}(a-b+c)$, $\frac{xy}{z}=\frac{1}{2}(-a+b+c)$ ២ពិន្ទុ

ដូចនេះ $\sum=\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}=\frac{1}{2}(a+b+c)$ ។ ២ពិន្ទុ

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

ហើយ $1 \le a_m \le 9, 0 \le a_j \le 9$ ចំពោះ $j = 0,1,2,\dots,m-1$ ២ពិន្ទុ

គេបាន $2^n \equiv a_m + a_{m-1} + \cdots + a_1 + a_0 \pmod 3$ ២ពិន្ទុ

$2^n \equiv s(n) \pmod 3$ ២ពិន្ទុ

ម្យ៉ាងទៀត $2^{n+1} = b_p 10^p + b_{p-1}10^{p-1} + \cdots + b_1 10 + b_0$ ២ពិន្ទុ

គេទាញបាន $2^{n+1} \equiv s(n+1) \pmod 3$ ២ពិន្ទុ

$s(n+1) \equiv 2^{n+1} \equiv 2 \times 2^n \equiv 2s(n) \pmod 3$ ២ពិន្ទុ

ឧបមាថាមានចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ដែល $s(n+1) = s(n)$ នោះគេបាន : ២ពិន្ទុ

$s(n) \equiv 2s(n) \pmod 3 \Rightarrow s(n) \equiv 0 \pmod 3$

$\Rightarrow 2^n \equiv 0 \pmod 3$ ដែលជាករណីមិនអាចមាន ។ ២ពិន្ទុ

ដូចនេះ គ្មានចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $s(n+1) = s(n)$ ។ ២ពិន្ទុ

VI. (២០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $\sum_{n=2}^{m}\left(\frac{u_n}{n}\right)^2 \le 12\sum_{n=1}^{m} a_n^2$

គេមាន $\left(\frac{u_n}{n}\right)^2 = (a_n + (\frac{u_n}{n} - a_n))^2 \le 2a_n^2 + 2(\frac{u_n}{n} - a_n)^2 = 4a_n^2 + 2(\frac{u_n}{n})^2 - 4a_n\frac{u_n}{n}$ ២ពិន្ទុ

គេអាចសរសេរ $\sum_{n=1}^{m}(\frac{u_n}{n})^2 \le 4\sum_{n=1}^{m} a_n^2 + 2\sum_{n=1}^{m}(\frac{u_n}{n})^2 - 4\sum_{n=1}^{m} a_n(\frac{u_n}{n})$ (1) ២ពិន្ទុ

តែ $u_n^2 - u_{n-1}^2 = (u_n + u_{n-1})(u_n - u_{n-1}) = (2u_n - a_n)a_n = 2u_n a_n - a_n^2$ ២ពិន្ទុ

$\Rightarrow -2u_n a_n = -(u_n^2 - u_{n-1}^2) - a_n^2 \le -(u_n^2 - u_{n-1}^2)$

គេបាន : $-2\sum_{n=1}^{m}\frac{u_n a_n}{n} = -2u_1^2 - 2\sum_{n=2}^{m}\frac{u_n a_n}{n} \le -u_1^2 - \sum_{n=2}^{m}\frac{1}{n}(u_n^2 - u_{n-1}^2) = -\sum_{n=1}^{m-1}\frac{1}{n(n+1)}u_n^2 - \frac{u_m^2}{m}$ ២ពិន្ទុ

$\Rightarrow -2\sum_{n=1}^{m}\frac{u_n a_n}{n} \le -\sum_{n=1}^{m-1}\frac{1}{n(n+1)}u_n^2 - \frac{u_m^2}{m} \le -\sum_{n=1}^{m-1}\frac{1}{n(n+1)}u_n^2 - \frac{u_m^2}{m(m+1)}$

$\Rightarrow -2\sum_{n=1}^{m}\frac{u_n a_n}{n} \le -\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n(n+1)}u_n^2$ (2) ២ពិន្ទុ

តាម (1) និង (2) គេបាន

$\sum_{n=1}^{m}(\frac{u_n}{n})^2 \le 4\sum_{n=1}^{m} a_n^2 + 2\sum_{n=1}^{m}\frac{u_n^2}{n^2(n+1)} \Rightarrow \sum_{n=1}^{m}(1 - \frac{2}{n+1})(\frac{u_n}{n})^2 \le 4\sum_{n=1}^{m} a_n^2$ ២ពិន្ទុ

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{m}(\frac{n-1}{n+1})(\frac{u_n}{n})^2 \le 4\sum_{n=1}^{m} a_n^2 \Rightarrow 0 + \sum_{n=2}^{m}(\frac{n-1}{n+1})(\frac{u_n}{n})^2 \le 4\sum_{n=1}^{m} a_n^2$ (3) ២ពិន្ទុ

ដោយ $f(n) = \frac{n-1}{n+1}$ ជាអនុគមន៍កើន និង នោះគេបាន $f(n) \ge f(2) = 1/3$ ចំពោះ $n \ge 2$ ២ពិន្ទុ

គេបាន $\frac{n-1}{n+1} \ge \frac{1}{3} \Rightarrow \sum_{n=2}^{m}\frac{n-1}{n+1}(\frac{u_n}{n})^2 \ge \frac{1}{3}\sum_{n=2}^{m}(\frac{u_n}{n})^2$ (4) ២ពិន្ទុ

តាម (3) និង (4) គេបាន $\sum_{n=2}^{m}\left(\frac{u_n}{n}\right)^2 \le 12\sum_{n=1}^{m} a_n^2$ ២ពិន្ទុ

ថ្ងៃទី ០៣ ខែ មេសា ឆ្នាំ ២០១៣

ប្រធានក្រុមកែវិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី ១២

អ៊ី សៀងលី

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS