ស៊ីត និង ស៊េរី

រួមមានអនុមានរួមគណិតវិទ្យា

ចំលើយកិច្ចការផ្ទះ

សំគាល់ថាចំលើយខាងក្រោមជាគំរូខាងក្រោមនេះ អាចដោះស្រាយតាមវិធីផ្សេងទៀតចំពោះលំហាត់ទាំងនេះ ។

---

1. បើស៊ីតនព្វន្ត $\{a_n\}$ បំពេញលក្ខខណ្ឌ $a_1 + a_2 + a_3 = 3$ និង $a_3 + a_4 + a_5 = 33$, កំនត់តំលៃ $a_{399} + a_{400} + a_{401}$ ។

ចំលើយ

ដោយ $\{a_n\}$ ជាស៊ីតនព្វន្ត យើងបាន

$a_1 + a_2 + a_3 = 3a_2 = 3$
$a_3 + a_4 + a_5 = 3a_4 = 33.$

ដូច្នេះ

$a_2 = 1$ និង $a_4 = 11.$

ដូច្នេះ ផលសងរួមគឺ

$2d = a_4 - a_2 = 10$
$d = 5$

ដូច្នេះ យើងបាន

$a_1 = -4$

ដូច្នេះ

$a_{400} = -4 + (400-1)\cdot 5 = 1991$

ដូច្នេះ

$a_{399} + a_{400} + a_{401} = 3a_{400} = 5973.$

---

2. តាង S_n ជាផលបូកនៃស៊ីតនព្វន្ត $51, 47, 43, \cdots$, ដល់ទី n-th តួ

1) កំនត់តំលៃ n ដែលធ្វើអោយ S_n មានអតិបរមា និងកំនត់តំលៃនៃ S_n ។

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

2) កំនត់តំលៃ n ដែលធ្វើអោយ $|S_n|$ មានអប្បបរមា។

ចំលើយ

1) តាង a_n ជាតួទូទៅនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

ដោយផលសងរួម $d = -4$ និង $a_1 = 51$, យើងបាន $a_n = 51 - 4(n-1) = 55 - 4n$ ។

នាំអោយ $a_n > 0$ ចំពោះ $n = 1, 2, \dots, 13$, និង $a_n < 0$ ចំពោះ $n = 14, 15, \cdots$ ។

ដូច្នេះ S_n អតិបរមានៅពេលដែល $n = 13$, និង

$$S_{13} = \frac{51+(55-4\cdot 13)}{2}\times 13 = 351$$

2) ដោយ $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\times n = \frac{51+(55-4n)}{2}\times n = n(53-2n)$

បើ n ជាចំនួនពិត ក្រាបនៃ $|S_n|$ បង្ហាញនៅខាងស្តាំ។ ដូច្នេះ អប្បបរមានៃ $|S_n|$ គឺជាចំនួនតូចជាងគេក្នុងចំណោម

$|S_1|$, $|S_{26}|$, $|S_{27}|$.

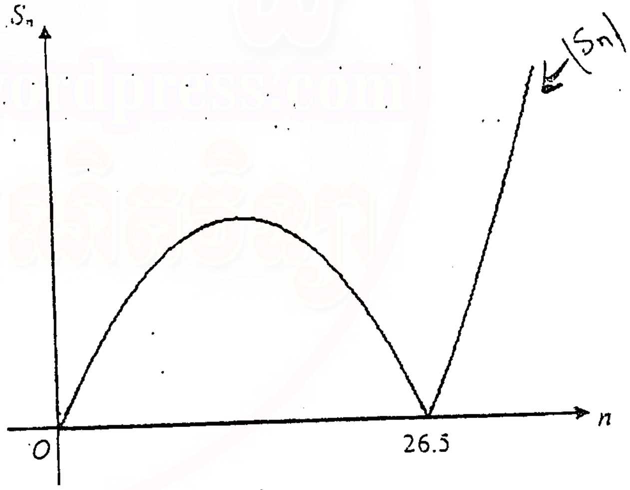
ប៉ុន្តែ

$|S_1| = 51$

$|S_{26}| = |26\cdot(53 - 2\cdot 26)| = 26$

$|S_{27}| = |27\cdot(53 - 2\cdot 27)| = 27$

ដូច្នេះ $|S_n|$ មានអប្បបរមាពេលដែល $n = 26$.



---

3. តាង $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមួយដែល $a_1 = 1$ និង $a_{3k-1} = -2$, ដែល k ជាចំនួនគត់ថេរវិជ្ជមាន។

ហើយតាង S_n ជាផលបូកនៃ $\{a_n\}$ ដល់ទី n-ជា តួ។

3) រកតួទូទៅនៃ a_n ។

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

4) រកតំលៃអតិបរមានៃ S_n និងតំលៃនៃ n ដែលធ្វើអោយ S_n មានអតិបរមា ។

5) កំនត់ S_{2k+1} ។

ចំលើយ

1) តាង d ជាផលសងរួម នោះ

$$a_{3k+1} = a_1 + \{(3k+1)-1\}d = 1 + 3kd = -2$$

$$d = -\frac{1}{k}$$

ដូច្នេះ យើងបាន

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 1 - \frac{n-1}{k} = \frac{k+1-n}{k}$$

2) តាមសំនួរទី 1, a_n គឺជាចំនួនវិជ្ជមាន ពេលដែល $n = 1, 2, \cdots, k$ ។

ដូច្នេះ S_n មានអតិបរមា $n = k$ ។

ដូច្នេះ

$$S_k = \frac{(a_1 + a_k)k}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{k+1-k}{k}\right)k = \frac{k+1}{2}$$

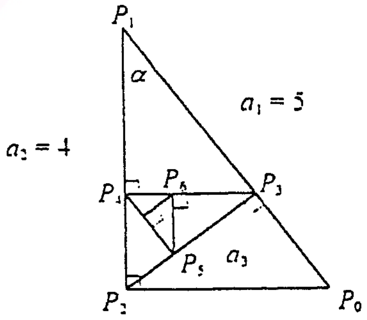
3) $$S_{2k+1} = \frac{(a_1 + a_{2k+1})(2k+1)}{2} = \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{k+1-(2k+1)}{k}\right\}(2k+1)$$

$$= 0$$

---

4. សំរាប់ត្រីកោណ $P_0P_1P_2$, ដែល $\angle P_2 = 90°$, $P_0P_2 = 3$, និង $P_1P_2 = 4$, យើងកំនត់ចំនុច P_3, P_4, $\cdots$, តាមករណីខាងក្រោម : តាង P_3 ជាចំនុចនៅលើជ្រុង P_0P_1 ដែល $P_2P_3 \perp P_0P_1$; តាង P_4 ជាចំនុចមួយនៅលើជ្រុង P_1P_2 ដែល $P_3P_4 \perp P_1P_2$; $\cdots\cdots$; តាង P_{n+1} ជាចំនុចមួយនៅលើជ្រុង $P_{n-2}P_{n-1}$ ដែល $P_nP_{n+1} \perp P_{n-2}P_{n-1}$.

ហើយតាង a_n ជាប្រវែងនៃអង្កត់ $P_{n-1}P_n$ ។



1) កំនត់តំលៃ $\frac{a_2}{a_1}$, $\frac{a_3}{a_2}$, $\frac{a_4}{a_3}$, និង $\frac{a_5}{a_4}$

2) យក $b_1 = a_1 + a_2$, $b_2 = a_3 + a_4$, $\cdots\cdots$, $b_n = a_{2n-1}$

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

$+a_{2n}$ រកតួទូទៅនៃ $\{b_n\}$ ។

3) គណនាតម្លៃ $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2n}$ ។

ចំលើយ

1) យើងមាន $a_1 = 5$ និង $a_2 = 4$, ហើយត្រីកោណនៅក្នុងសំនួរនេះដូចៗគ្នា ។

ដូច្នេះ បើសិនជាយើងយក $\angle P_1 = \alpha$. នោះ

$$\frac{a_2}{a_1} = \cos\alpha = \frac{4}{5},\quad \frac{a_3}{a_2} = \sin\alpha = \frac{3}{5},$$

$$\frac{a_4}{a_3} = \cos\alpha = \frac{4}{5},\quad \frac{a_5}{a_4} = \sin\alpha = \frac{3}{5}.$$

2) តាមសំនួរទី 1 យើងបាន

$$\frac{a_3}{a_1} = \frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2} = \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{12}{25}$$

$$\frac{a_4}{a_2} = \frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_4}{a_3} = \frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5} = \frac{12}{25}$$

ដូច្នេះ យើងបាន

$$\frac{a_3}{a_1} = \frac{a_5}{a_3} = \frac{a_7}{a_5} = \cdots\cdots = \frac{a_{2k+1}}{a_{2k-1}} = \frac{12}{25}$$

$$\frac{a_4}{a_2} = \frac{a_6}{a_4} = \frac{a_8}{a_6} = \cdots\cdots = \frac{a_{2(k+1)}}{a_{2k}} = \frac{12}{25}$$

ដូច្នេះ $\{a_{2n-1}\}$ គឺជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានតួទី 1 $a_1 = 5$ និងផលធៀបរួម $= \frac{12}{25}$ ។

ដូច្នេះ

$$a_{2n-1} = 5\left(\frac{12}{25}\right)^{n-1}$$

នាំអោយ $\{a_{2n}\}$ គឺជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានតួទី 1 $a_2 = 4$ និងផលធៀបរួម $= \frac{12}{25}$ ។

ដូច្នេះ

$$a_{2n} = 4\left(\frac{12}{25}\right)^{n-1}$$

ដូច្នេះ យើងបាន

$$b_n = a_{2n-1} + a_{2n} = 5\left(\frac{12}{25}\right)^{n-1} + 4\left(\frac{12}{25}\right)^{n-1} = 9\left(\frac{12}{25}\right)^{n-1}$$

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

ស្វ៊ីតធរណីមាត្រនេះមានតួទីមួយស្មើនឹង ៩ និង ផលធៀបរួមស្មើនឹង $\frac{12}{25}$ ។

3) $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_{2n} = b_1 + b_2 + \cdots\cdots + b_n = \dfrac{9\left\{1-\left(\frac{12}{25}\right)^n\right\}}{1-\frac{12}{25}}$

$= \dfrac{225}{13}\left\{1-\left(\dfrac{12}{25}\right)^n\right\}$

....

5. នៅលើតំរុយនៃប្លង់ដែលមានអក្ស xy យក $O(0, 0)$, $A_1(a, 0)$ និង $B_1(0, a)$, ដែល $a > 0$ ។ តាង C_1 ជាទីប្រជុំទំងន់នៃ ΔOA_1B_1, និង r_1 ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង ΔOA_1B_1 ។ ហើយយើងគូសបន្ទាត់ កាត់ចំនុច C_1 និងស្របទៅនឹង A_1B_1, ហើយឧបមាថាបន្ទាត់នេះប្រសព្វនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស x និងអ័ក្សអរដោនេ y ត្រង់ A_2 និង B_2, រៀងគ្នា ។ ហើយតាង C_2 ជាទីប្រជុំទំងន់នៃ ΔOA_2B_2, និង r_2 ជា កាំរង្វង់ចារឹកក្នុង ΔOA_2B_2 ។ ដោយបន្តធ្វើវិធីបែបនេះរហូតដល់ យើងបាន ΔOA_nB_n ដែលមានទីប្រជុំទំងន់ត្រង់ C_n និងកាំស្មើនឹង r_n ។

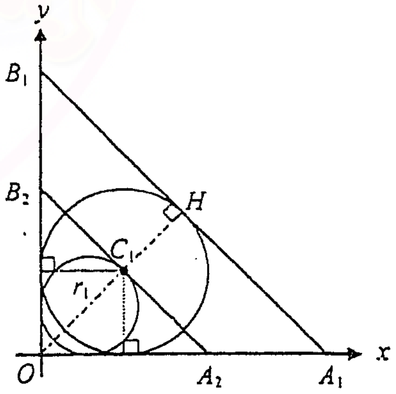
1) កំនត់ r_1 ជាអនុគមន៍ a ។

2) រកសមីការបន្ទាត់ A_2B_2 ។

3) កំនត់ r_2 ជាអនុគមន៍ a ។

4) តាង S_n ជាផ្ទៃរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ΔOA_nB_n ។ កំនត់ S_n ជាអនុគមន៍ a ។

ចំលើយ



1) តាង H ជាចំនុចប្រសព្វនៃ A_1B_1 និង បន្ទាត់ $y = x$ ។ នោះ

$OH \perp A_1B_1$ ដោយ $y = x$ កាត់ចំនុច C_1, យើងបាន

$OH = OC_1 + C_1H$.

ដូច្នេះ,

$\sqrt{2}r_1 + r_1 = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$

$r_1 = \dfrac{a}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)} = \dfrac{(2-\sqrt{2})a}{2}$

2) ដោយ $C_1(r_1, r_1)$ ហើយមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ A_2B_2 គឺ -1, យើងបាន

$y = -x + 2r_1$

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

$y = -x + (2-\sqrt{2})a$

3) តាមសំនួរទី 2, យើងបាន

$$\frac{OA_2}{OA_1} = \frac{(2-\sqrt{2})a}{a} = 2-\sqrt{2}$$

ដូច្នេះ. ក្នុងសំនួរនេះយើងបន្តធ្វើតាមរបៀបនេះរហូត ជ្រុងនិមួយៗនៃត្រីកោណ ΔOA_nB_n ថយចុះសមមាត្រនឹង $2-\sqrt{2}$ ។ ដូច្នេះកាំ r_n នឹងថយចុះសមាមាត្រទៅនឹងចំនួនដូចគ្នានេះដែរ ។

ដូច្នេះ.

$$r_2 = (2-\sqrt{2})r_1 = \frac{(2-\sqrt{2})^2a}{2} = (3-2\sqrt{2})a$$

ដោយ $A_2((2-\sqrt{2})a\,,0)$ និង $B_2(0,\ (2-\sqrt{2})a)$, យើងបាន

$$OC_1 = OC_2 + C_1C_2$$

$$\frac{(2-\sqrt{2})a}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}r_2 + r_2$$

$$r_2 = \frac{(2-\sqrt{2})a}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)} = (3-2\sqrt{2})a$$

4) ដោយ r_n ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានតួទី $1 = \dfrac{(2-\sqrt{2})a}{2}$ និងផលធៀបរួម $= 2-\sqrt{2}$,

យើងបាន

$$r_n = \frac{(2-\sqrt{2})a}{2}\cdot(2-\sqrt{2})^{n-1}$$

$$= \frac{(2-\sqrt{2})^n a}{2}$$

ដូច្នេះ,

$$S_n = \pi r_n^2 = \frac{(2-\sqrt{2})^{2n}a^2\pi}{4}$$

---

6. ពិនិត្យស្វ៊ីតខាងក្រោម

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{1}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{1}{5},\ \frac{5}{6},\ \frac{4}{6},\ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

1) តើតួដែលមានចំនួន $\frac{18}{25}$ ជាតួទីប៉ុន្មាន ?

2) រកតួទី 666 ?

3) រកផលបូកនៃស្វ៊ីតនេះដល់តួទី 666 ។

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

ចំលើយ

ក្រុមនៃស៊ីតរៀបខាងក្រោមនេះត្រូវរៀបទៅតាមភាគបែង

$$\{\frac{1}{2}\},\{\frac{2}{3},\frac{1}{3}\},\{\frac{3}{4},\frac{2}{4},\frac{1}{4}\},\{\frac{4}{5},\frac{3}{5},\frac{2}{5},\frac{1}{5}\},\ldots\ldots\ldots.$$

នោះក្រុមទី n-th មានផ្ទុក n តួដែលបង្ហាញខាងក្រោម

$$\frac{n}{n+1},\ \frac{n-1}{n+1},\ldots\ldots\ldots,\ \frac{1}{n+1}.$$

ដូច្នេះ តួចុងក្រោយនៃក្រុមទី n-th គឺជា $\frac{n(n+1)}{2}$ ក្នុងស៊ីតដើម

ដោយ $1+2+\cdots\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ ។

5) តួដែលមានតំលៃ $\frac{18}{25}$ គឺជាតួទី 7-th ក្នុងក្រុមទី 24-th

ដូច្នេះ $\frac{18}{25}$ កើតឡើងនៅតួទី 283-th ក្នុងស៊ីតដើម

$$1+2+\cdots\cdots+23+7=\frac{23(23+1)}{2}+7=283 \text{ ។}$$

6) ពេលដែល $666\le\frac{n(n+1)}{2}$, យើងបាន

$$666\le\frac{n(n+1)}{2}\Leftrightarrow 1332\le n(n+1)\quad\Leftrightarrow\quad n^2+n-1332\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (n-36)(n+37)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow n\le -37 \text{ ឬ } 36\le n$$

ដូច្នេះ តំលៃអប្បបរមានៃ n ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $666\le\frac{n(n+1)}{2}$ គឺ $n = 36$, និង

$$666=\frac{36(36+1)}{2}$$

ដូច្នេះ តួទី 666-th នៃស៊ីតដើម គឺជាតួចុងក្រោយនៃក្រុមទី 36-th គឺ $\frac{1}{37}$ ។

7) ផលបូកតួក្នុងក្រុមទី the n-th គឺ

$$\frac{n}{n+1}+\frac{n-1}{n+1}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n}{2}.$$

ដូច្នេះ ផលបូកស៊ីតរហូតដល់តួទី 666-th គឺ

$$\sum_{n=1}^{36}\frac{n}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{36(36+1)}{2}=333$$

---

7. ពិនិត្យស៊ីតដែលមានចំនួនផ្សេងៗគ្នាខាងក្រោម

$a, b, a^2, ab, b^2, a^3, a^2b, ab^2, b^3, a^4, a^3b, \ldots\ldots\ldots.$

1) តើតួដែលមានចំនួន $a^{20}b^5$ ជាតួទីប៉ុន្មាន ?

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

2) ប្រសិនបើ $a \neq 1$ និង $b = 1$. រកផលបូលនៃស៊ីតនេះដល់តួទី 135 ។

ចំលើយ

ក្រុមនៃស៊ីតបានសរសេរដូចខាងក្រោម

$\{a, b\}, \{a^2, ab, b^2\}, \{a^3, a^2b, ab^2, b^3\}, \{a^4, a^3b, a^2b^2, ab^3, b^4\}, \ldots\ldots\ldots\ldots$

នោះក្រុមទី n-th មាន $n+1$ តួ

$a^n, a^{n-1}b, a^{n-2}b^2, a^{n-3}b^3, \ldots\ldots\ldots, a^2b^{n-2}, ab^{n-1}, b^n$

ដូច្នេះ a^pb^q គឺតួទី $(q+1)$-th នៃក្រុមទី $(p+q)$-th

នាំអោយតួចុងក្រោយនៃក្រុមទី n-th គឺជាតួទី $\frac{1}{2}n(n+3)$ -th ដោយ

$$2+3+\ldots\ldots+(n+1) = \frac{1}{2}n(n+3)$$

1) ដោយ $a^{20}b^5$ គឺជាតួទី 6-th ក្នុងក្រុមទី 25-th នេះគឺជាតួទី $\left\{\frac{24(24+3)}{2}+6\right\}$-th-នៃស៊ីតដើម

ដូច្នេះ, $a^{20}b^5$ គឺជាតួទី 330-th

2) ពេលដែល $135 \leq \frac{n(n+3)}{2}$, យើងបាន

$$135 \leq \frac{n(n+3)}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 270 \leq n(n+3)$$

ដោយ $15\cdot18 = 270$, តំលៃអប្បបរមានៃ n ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $135 \leq \frac{n(n+3)}{2}$ គឺ $n = 15$.

និងតួទី 135-th គឺជាតួចុងក្រោយនៃក្រុមទី 15-th ដែលជា b^{15} ។

ផលបូកចំនួនតួនៅក្នុងក្រុមទី n-th គឺ

$$S_n = a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + a^{n-3}b^3 + \ldots\ldots\ldots + a^2b^{n-2} + ab^{n-1} + b^n$$

ដោយគ្រប់តួនៃស៊ីតនេះផ្សេងៗគ្នា, យើងបាន $a \neq b$ និង $ab \neq 0$ ។

ដូច្នេះ S_n គឺជផលបូក $n+1$ តួនៃស៊ីតធរណីមាត្រដែលមានតួទីមួយ a^n ហើយមានផលធៀបរួម $\frac{b}{a}$ ។

ដូច្នេះ,

$$S_n = \frac{a^n\left\{1-\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{b}{a}} = \frac{a^{n-1}-b^{n-1}}{a-b}$$

ដូច្នេះ, ផលបូកស៊ីតរហូតដល់តួទី 135-th គឺ

$$\sum_{n=1}^{15} S_n = \sum_{n=1}^{15} \frac{a^{n-1}-b^{n-1}}{a-b} = \frac{1}{a-b}\left(\sum_{n=1}^{15} a^{n+1} - \sum_{n=1}^{15} b^{n+1}\right)$$

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

$$= \frac{1}{a-b}\left(\frac{a^2(1-a^{15})}{1-a} - \frac{b^2(1-b^{15})}{1-b}\right)$$

---

8. ឧបមាថាមានស្វ៊ីតនព្វន្ត $\{a_n\}$ ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ

$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = 240$

$a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} = 230$

1) រកតួទី 1 និងផលសងរួមនៃ $\{a_n\}$ ។

2) ក្រុមតួនៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$ ដែលមាន n ក្រុម ដែលមាន $2n - 1$ តួ ។ នោះយើងបាន

$\{a_1\}, \{a_2, a_3, a_4\}, \{a_5, a_6, a_7, a_8, a_9\}, \ldots\ldots\ldots\ldots$

រកតំលៃអប្បបរមានៃ m ដែលផលបូកនៃចំនួនតួក្នុងក្រុមទី m ជាចំនួនអវិជ្ជមាន ។

ចំលើយ

1) តាមលក្ខខណ្ឌដែលអោយ យើងបាន

$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = 5a_5 = 240 \Rightarrow a_5 = 48$

$a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} = 5a_6 = 230 \Rightarrow a_6 = 46$

ដូច្នេះ ផលសងរួមនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត $\{a_n\}$ គឺ -2, ហើយតួទី 1-st គឺ $48 - (-2)\cdot 4 = 56$ ។

2) តាមសំនួរទី 1, យើងបាន $a_m = 56 - 2(m-1) = -2m + 58$ ។

តួចុងក្រោយនៃក្រុមទី m-th គឺតួទី m^2-th នៃស្វ៊ីតដើម ពីព្រោះ

$$\sum_{k=1}^{m}(2k-1) = m^2 \text{ ។}$$

នោះយើងបាន

$a_{m^2} = -2m^2 + 58$

ដោយតួចុងក្រោយនៃក្រុមទី $(m-1)$-th គឺ $a_{(m-1)^2}$, តួដំបូងនៃក្រុមទី m-th គឺ

$a_{(m-1)^2+1} = -2\{(m-1)^2 + 1\} + 58 = -2m^2 + 4m + 54$

ដូច្នេះ, ក្រុមទី m-th មាន $2m - 1$ តួទីមួយ និងតួចុងក្រោយ

$-2m^2 + 4m + 54$ និង $-2m^2 + 58$ រៀងគ្នា

ដូច្នេះ, ផលបូកនៃតួក្នុងក្រុមទី the m-th គឺ

$$\frac{(-2m^2 + 4m + 54) + (-2m^2 + 58)}{2} \times (2m-1) = (-2m^2 + 2m + 56)(2m-1) \text{ ។}$$

ដោយ m ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន, $2m - 1$ គឺវិជ្ជមាន។ ដូច្នេះយើងឃើញថាតំលៃអប្បបរមានៃ m

ធ្វើអោយ $-2m^2 + 2m + 56$ អវិជ្ជមាន ។

បង្ហាញថា $-2m^2 + 2m + 56 < 0$

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

$$m > \frac{1+\sqrt{113}}{2} \quad (\text{ពីព្រោះ } m > 0)$$

អប្បបរមានៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន m ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $m > \frac{1+\sqrt{113}}{2}$ គឺ $m = 6$ ។

---

9. គណនាផលបូក $\sum_{k=1}^{n} a_k$ នៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$ ដែលកំនត់ដូចខាងក្រោម

1) $a_n = \dfrac{2}{(n+1)^2 - 1}$

2) $a_n = \dfrac{2}{n(n+1)(n+2)}$

ចំលើយ

1) $a_n = \dfrac{2}{(n+1)^2-1} = \dfrac{2}{n(n+2)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+2}$

ដូច្នេះ

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \dots\dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

2) $a_n = \dfrac{2}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{n(n+1)} - \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$

ដូច្នេះ,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3}\right) + \left(\frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 4}\right) + \dots\dots + \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

---

10. គណនាផលបូក $\sum_{k=1}^{n} a_k$ នៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$ កំនត់ដោយ $a_n = \dfrac{4n+3}{n(n+1)(n+2)}$ ។

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

ចំលើយ

ឧបមាថា a_n អាចបំលែងជា

$$\frac{4n+3}{n(n+1)(n+2)} = \frac{An+B}{n(n+1)} - \frac{A(n+1)+B}{(n+1)(n+2)}$$

នោះ.

$$\frac{An+B}{n(n+1)} - \frac{A(n+1)+B}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+2)(An+B)-n(A(n+1)+B)}{n(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{An+2B}{n(n+1)(n+2)}$$

ដូច្នេះ យើងបាន $A = 4$ និង $B = \frac{3}{2}$ នោះ

$$a_n = \frac{4n+3}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left\{\frac{8n+3}{n(n+1)} - \frac{8(n+1)+3}{(n+1)(n+2)}\right\}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left\{\frac{8k+3}{k(k+1)} - \frac{8(k+1)+3}{(k+1)(k+2)}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{8\cdot 1+3}{1\cdot 2} - \frac{8\cdot 2+3}{2\cdot 3}\right) + \left(\frac{8\cdot 2+3}{2\cdot 3} - \frac{8\cdot 3+3}{3\cdot 4}\right) + \cdots + \left(\frac{8n+3}{n(n+1)} - \frac{8(n+1)+3}{(n+1)(n+2)}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{8 - \frac{8(n+1)+3}{(n+1)(n+2)}\right\}$$

$$= \frac{11}{4} - \frac{8n+11}{2(n+1)(n+2)}$$

---

11. គណនាផលបូក $\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{k+2}$ ។

ចំលើយ 1

យក $S_n = \sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{k+2}$ នោះ

$$S_n = 1\cdot 2^3 + 2\cdot 2^4 + 3\cdot 2^5 + \ldots\ldots + (n-1)2^{n-1} + n\cdot 2^{n-2}$$

$$2S_n = 1\cdot 2^4 + 2\cdot 2^5 + \ldots\ldots + (n-2)2^{n-1} + (n-1)2^{n-2} + n\cdot 2^{n+3}$$

ដូច្នេះ,

$$S_n - 2S_n = 2^3 + 2^4 + 2^5 + \ldots\ldots + 2^{n-1} + 2^{n+2} - n\cdot 2^{n+3}$$

$$= \frac{2^3(1-2^n)}{1-2} - n\cdot 2^{n-3}$$

$$= 2^{n-3} - 8 - n\cdot 2^{n-3}$$

$$= -(n-1)2^{n-3} - 8$$

ដូច្នេះ,

$$-S_n = -(n-1)2^{n+3} - 8$$

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

$$\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{k-2} = (n-1)2^{n-3} + 8$$

ចំលើយ 2

$$\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{k-2} = 2^3\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{k-1} = 2^3\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{k-1}$$

យក $f(x) = 2^3x^k$ នោះ, បើ $x \neq 1$, យើងបាន

$$\sum_{k=1}^{n} f(x) = 2^3(x + x^2 + \cdots\cdots + x^{n-1} + x^n) = \frac{8x(1-x^n)}{1-x}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} f(x)\right)' = 2^3(x + x^2 + \cdots\cdots + x^{n-1} + x^n)'$$

$$= 2^3(1 + 2x + \cdots\cdots + (n-1)x^{n-2} + nx^{n-1})$$

$$= 2^3\sum_{k=1}^{n} k\cdot x^{k-1}$$

ម្យ៉ាងទៀត

$$\left(\sum_{k=1}^{n} f(x)\right)' = \left(\frac{8x(1-x^n)}{1-x}\right)'$$

$$= \frac{\{8(1-x^n) + 8x(-nx^{n-1})\}(1-x) - 8x(1-x^n)(-1)}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{8(1-x^n-nx^n)(1-x) + 8x(1-x^n)}{(1-x)^2}$$

ដូច្នេះ

$$\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{k-2} = 2^3\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{k-1}$$

$$= \frac{8(1-2^n-n2^n)(1-2) + 8\cdot 2(1-2^n)}{(1-2)^2}$$

$$= (n+1)2^{n+3} - 8 + 16 - 2\cdot 2^{n+3}$$

$$= (n-1)2^{n+3} + 8$$

12\. ស៊ីត $\{a_n\}$ បំពេញលក្ខខណ្ឌខាងក្រោម :

$a_1 = 1$, $a_n - a_{n-1} = 2n + 1$ for $n = 2, 3, 4, \cdots\cdots$ ។

រកតួទូទៅនៃស៊ីត $\{a_n\}$ ។

ចំលើយ

ចំពោះ $n = 2, 3, 4, \cdots\cdots$, យើងបាន

$$a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots\cdots + (a_3 - a_2) + (a_2 - a_1) + a_1$$

សុខ ពិសិដ្ឋ Facebook.com/TeacherSokPiseth www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

$= (2n+1) + (2(n-1)+1) + \cdots\cdots + (2\cdot 3+1) + (2\cdot 2+1) + 1$
$= 2(2+3+\cdots\cdots+n) + n$
$= n(n+1) - 2 + n$
$= n^2 + 2n - 2$

ដូច្នេះ

$a_n = n^2 + 2n - 2$

នេះពិតចំពោះគ្រប់ $n = 1$, ដោយ $a_1 = 1^2 + 2\cdot 1 - 2 = 1$ ។

****

13. ស្វ៊ីត $\{a_n\}$ កំនត់ដោយទំនាក់ទំនងកំនើនដូចខាងក្រោម :

$a_1 = 1,\ a_{n+1} = 3a_n + 2$ for $n = 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots$

រកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$ ។

ចំលើយ

តាមការដោះស្រាយដោយប្រើសមីការសំគាល់ $t = 3t + 2$, យើងបាន $t = -1$ ។

ដូច្នេះ តាមទំនាក់ទំនងកំណើន $a_{n+1} = 3a_n + 2$ អាចបំលែងទៅជា

$a_{n+1} + 1 = 3(a_n + 1)$.

បើសិនជាយើងយក $b_n = a_n + 1$, នោះ b_n ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលផលធៀបរួមស្មើ 3 និងតួទីមួយ

$a_1 + 1 = 2$ ដូច្នេះ

$b_n = 2\cdot 3^{n-1}$

ដូច្នេះ

$a_n + 1 = 2\cdot 3^{n-1}$
$a_n = 2\cdot 3^{n-1} - 1$

....

14. ស្វ៊ីត $\{a_n\}$ កំនត់ដោយទំនាក់ទំនងកំនើនដូចខាងក្រោម :

$a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + n$ ចំពោះ $n = 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots$

3) យក $b_n = 2^n a_n$ រកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត $\{b_n\}$ ។

4) រកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$ ។

ចំលើយ 1

1) គុណអង្គទាំងពីរនៃទំនាក់ទំនងកំនើននឹង 2^{n+1} យើងបាន

$2^{n+1}a_{n+1} = 2^n a_n + n\cdot 2^{n+1}$

បើសិនជាយើងយក $b_n = 2^n a_n$, យើងបាន $b_1 = 2^1\cdot 1 = 2$ និង $b_{n+1} = b_n + n\cdot 2^{n+1}$ ដែល,

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

$b_1 = 2,\ b_{n+1} - b_n = n\cdot 2^{n-1}.$

ដូច្នេះ ចំពោះ $n = 2, 3, 4, \ldots\ldots$, យើងបាន

$$b_n = (b_n - b_{n-1}) + (b_{n-1} - b_{n-2}) + \ldots\ldots\ldots + (b_3 - b_2) + (b_2 - b_1) + b_1$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} k\cdot 2^{k-1} + 2$$

យក $S = \sum_{k=1}^{n-1} k\cdot 2^{k-1}$ នោះ

$$S = 1\cdot 2^2 + 2\cdot 2^3 + 3\cdot 2^4 + \ldots\ldots\ldots + (n-1)\cdot 2^n$$

$$2S = 1\cdot 2^3 + 2\cdot 2^4 + \ldots\ldots\ldots + (n-2)\cdot 2^n + (n-1)\cdot 2^{n-1}$$

ដូច្នេះ

$$S - 2S = 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots\ldots\ldots + 2^n - (n-1)\cdot 2^{n-1}$$

$$= \frac{2^2(1-2^{n-1})}{1-2} - (n-1)\cdot 2^{n-1}$$

$$= -(n-2)\cdot 2^{n-1} - 4$$

$$S = (n-2)\cdot 2^{n-1} + 4$$

ដូច្នេះ យើងបាន

$$b_n = S + 2 = (n-2)\cdot 2^{n-1} + 6$$

ពិតចំពោះគ្រប់ $n = 1$ ដោយ $b_1 = (1-2)\cdot 2^{1-1} + 6 = 2.$

ដូច្នេះ

$$b_n = (n-2)\cdot 2^{n-1} + 6 \text{ for } n = 1, 2, 3, \ldots\ldots.$$

2) ដោយយើងយក $b_n = 2^n a_n$, យើងបាន

$$a_n = \frac{b_n}{2^n} = 2(n-2) + \frac{3}{2^{n-1}}.$$

[វិធីផ្សេងទៀត]

ចំពោះទំនាក់ទំនងកំណើន $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + n$, ពិនិត្យអនុគមន៍ $g(n)$ ដែល

$$g(n+1) = \frac{1}{2}g(n) + n$$

នោះ យើងបាន

$$a_{n+1} - g(n+1) = \frac{1}{2}\{a_n - g(n)\}$$

ដូច្នេះ ស្វ៊ីត $\{a_n - g(n)\}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានផលធៀបរួមស្មើនឹង $\frac{1}{2}$ និងតួទីមួយ

$a_1 - g(1) = 1 - g(1)$ ដូច្នេះ,

$$a_n - g(n) = \frac{1-g(1)}{2^{n-1}}$$

$$a_n = \frac{1-g(1)}{2^{n-1}} + g(n) \quad \text{ចំពោះ } n = 1, 2, \ldots\ldots$$

សុខ ពិសិទ្ធ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

ចំពោះគ្រប់ $n = 1, 2, \cdots$.

$$p(n+1)+q=\frac{1}{2}(pn+q)\ \ +n$$

$$(p-2)n+2p+q=0$$

ដូច្នេះ, $p = 2$ និង $q = -4$

ដែល,

$$g(n) = 2n - 4$$

ដូច្នេះ

$$a_n = \frac{3}{2^{n-1}} + 2n - 4 \quad \text{ចំពោះ } n = 1, 2, \cdots\cdots.$$

---

15. យក $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ ប្រសិនបើ S_n ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $S_n + n = 3^n$ ចំពោះ $n = 1, 2, 3, \cdots\cdots$, រកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត a_n ។

ចំលើយ

ដោយ $a_1 = S_1$ និង $a_n = S_n - S_{n-1}$ ចំពោះ $n \geq 2$ ជាទូទៅយើងបាន

$$a_1 = S_1 = 3^1 - 1 = 2.$$

ហើយ ចំពោះ $n \geq 2$.

$$S_n + n = 3^n$$

$$S_{n-1} + (n-1) = 3^{n-1}.$$

ដូច្នេះ

$$S_n - S_{n-1} + 1 = 2\cdot 3^{n-1}$$

$$S_n - S_{n-1} = 2\cdot 3^{n-1} - 1$$

$$a_n = 2\cdot 3^{n-1} - 1 \quad (n = 2, 3, 4, \cdots\cdots)$$

បើ $n = 1$, យើងបាន

$$a_1 = 2\cdot 3^0 - 1 = 1.$$

ដូច្នេះ, $a_n = 2\cdot 3^{n-1} - 1$ មិនពិតចំពោះ $n = 1$ ។

ដូច្នេះ

$$a_1 = 2, \text{ and } a_n = 2\cdot 3^{n-1} - 1 \quad (n = 2, 3, 4, \cdots\cdots)$$

---

16. ឧបមាថាផលបូក $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ បំពេញលក្ខខណ្ឌខាងក្រោម

$$S_1 = 1,\ S_{n+1} - 3S_n = 2^{n+1} - 1 \ (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

រកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត a_n ។

(ការណែនាំ : យក $b_n = \dfrac{a_n}{2^n}$, និងរក b_n ។)

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

ចំលើយ

ដោយ $S_{n+1} - 3S_n = 2^{n+1} - 1$, យើងបាន

$$S_n - 3S_{n-1} = 2^n - 1, \quad \text{ចំពោះ } n \ge 2$$

ដូច្នេះ

$$(S_{n+1} - 3S_n) - (S_n - 3S_{n-1}) = (2^{n+1} - 1) - (2^n - 1)$$
$$(S_{n+1} - S_n) - 3(S_n - S_{n-1}) = 2^n$$

ដោយ $S_n - S_{n-1} = a_n$, យើងបាន

$$a_{n+1} - 3a_n = 2^n \quad \text{ចំពោះ } n \ge 2. \ \cdots\cdots \text{(i)}$$

ដោយយក $n = 1$ ក្នុង $S_{n+1} - 3S_n = 2^{n+1} - 1$, យើងបាន

$$S_2 - 3S_1 = 2^2 - 1$$
$$S_2 - 3 = 3$$
$$S_2 = 6$$

ដោយ $a_1 = S_1$, $S_2 - S_1 = a_2$, និង $S_2 - 3S_1 = 3$, យើងបាន

$$(a_1 + a_2) - 3a_1 = 3$$
$$a_2 - 2a_1 = 3$$
$$a_2 = 2a_1 + 3$$
$$a_2 = 5$$

ប៉ុន្តែ បើ $n = 1$, តាមទំនាក់ទំនងកំណើន (i) យើងបាន

$$a_2 - 3a_1 = 2$$
$$a_2 = 3a_1 + 2$$
$$a_2 = 5$$

ដូច្នេះ (i) ពិតចំពោះ $n = 1$.

ចែកអង្គទាំងពីរនៃ (i) នឹង 2^{n+1} យើងបាន

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{3a_n}{2^{n+1}} = \frac{2^n}{2^{n+1}}.$$

បើសិនជាយើងយក $b_n = \dfrac{a_n}{2^n}$, យើងបាន

$$b_1 = \frac{1}{2}, \ b_{n+1} - \frac{3}{2}b_n = \frac{1}{2}$$

ដូច្នេះ

$$b_{n+1} + 1 = \frac{3}{2}(b_n + 1)$$

ដូច្នេះ, $\{b_n + 1\}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានផលធៀបស្មើនឹង $\frac{3}{2}$ និងតួទីមួយ $\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$ ។

ដូច្នេះយើងបាន

$$b_n + 1 = \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

$$b_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1$$

ដោយ $b_n = \frac{a_n}{2^n}$, យើងបាន

$$a_n = 3^n - 2^n$$

---

17. រកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$ កំនត់ដូចខាងក្រោម

$$a_1 = 0,\ a_2 = 3,\ a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$$

ចំលើយ

ប្រើសមីការសំគាល់សំរាប់ទំនាក់ទំនងកំណើននេះ

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0 \cdots\cdots\cdots \text{(i)}$$

យើងបាន

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \cdots\cdots\cdots \text{(ii)}$$

ដោះស្រាយសមីការ (ii) យើងបាន

$$x = 1,\ 3.$$

ដូច្នេះ ទំនាក់ទំនងកំណើន (i) អាចបំលែងជាទំរង់ខាងក្រោម

$$a_{n+2} - a_{n+1} = 3(a_{n+1} - a_n) \cdots\cdots\cdots \text{(iii)}$$

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} = a_{n+1} - 3a_n \cdots\cdots\cdots \text{(iv)}$$

បើសិនជាយើងយក $b_n = a_{n+1} - a_n$ ជំនួសក្នុង (iii), យើងបាន

$b_1 = a_2 - a_1 = 3,$

$b_{n+1} = 3b_n$

ដូច្នេះ b_n ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានផលធៀបរួមស្មើនឹង 3 និងតួទីមួយ 3 ។ នោះ

$$b_n = 3^n$$

ដូច្នេះ

$$a_{n+1} - a_n = 3^n \cdots\cdots\cdots \text{(v)}$$

បើសិនជាយើងយក $b_n = a_{n+1} - 3a_n$ ជំនួសក្នុង (iv), យើងបាន

$$b_{n+1} = b_n = \cdots\cdots = b_1 = a_2 - 3a_1 = 3$$

នោះ

$$b_n = 3$$

ដូច្នេះ

$$a_{n+1} - 3a_n = 3 \cdots\cdots\cdots \text{(vi)}$$

(v) – (vi), យើងបាន

$$2a_n = 3^n - 3$$

$$a_n = \frac{3^n - 3}{2}$$

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

18. តាង $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតនៅលើបន្ទាត់ក្រិតមួយ ឧបមាថា $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2}$ ជាចំនុចមួយដែលចែកក្នុង a_n និង a_{n+1} ជាផលធៀប $1 : p$ ។ នោះរកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$ ។

ចំលើយ

ដោយ $a_{n+2} = \dfrac{pa_n + a_{n+1}}{1+p}$, យើងបាន

$$a_{n+2} - \frac{1}{1+p}a_{n+1} - \frac{p}{1+p}a_n = 0 \text{ .... (i)}$$

រូមបញ្ចូលសមីការសំគាល់នៃ (i) យើងបាន

$$x^2 - \frac{1}{1+p}x - \frac{p}{1+p} = 0 \text{ .... (ii)}$$

ដោះស្រាយសមីការ (ii) យើងបាន

$$x = 1, \ -\frac{p}{1+p}$$

ដូច្នេះ តាមទំនាក់ទំនងកំនើន (i) អាចបំលែងជាសមីការខាងក្រោម

$$a_{n+2} - a_{n+1} = -\frac{p}{1+p}(a_{n+1} - a_n) \text{ .... (iii)}$$

$$a_{n+2} + \frac{p}{1+p}a_{n+1} = a_{n+1} + \frac{p}{1+p}a_n \text{ .... (iv)}$$

តាម (iii), យើងបាន

$$a_{n+1} - a_n = -\frac{p}{1+p}(a_n - a_{n-1}) = \left(-\frac{p}{1+p}\right)^{n-1}(a_2 - a_1) = \left(-\frac{p}{1+p}\right)^{n-1}$$

តាម (iv), យើងបាន

$$a_{n+1} + \frac{p}{1+p}a_n = a_n + \frac{p}{1+p}a_{n-1} = \cdots\cdots = a_2 + \frac{p}{1+p}a_1 = \frac{2+3p}{1+p}$$

ដូច្នេះ,

$$a_{n+1} - a_n = \left(-\frac{p}{1+p}\right)^{n-1} \text{ .... (v)}$$

$$a_{n+1} + \frac{p}{1+p}a_n = \frac{2+3p}{1+p} \text{ .... (vi)}$$

(vi) – (v), យើងបាន

$$\frac{p}{1+p}a_n + a_n = \frac{2+3p}{1+p} - \left(-\frac{p}{1+p}\right)^{n-1}$$

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

$$\frac{1+2p}{1+p}a_n = \frac{2+3p}{1+p} - \left(-\frac{p}{1+p}\right)^{n-1}$$

ដូច្នេះ

$$a_n = \frac{2+3p}{1+2p} - \left(-\frac{p}{1+p}\right)^{n-1} \cdot \frac{1+p}{1+2p}$$

19.ពិនិត្យស៊ីត $\{a_n\}$ កំនត់ដូចខាងក្រោម

$$a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_{n+1} - \frac{4n+2}{n+1}a_n + \frac{4n-4}{n}a_{n-1} = 0 \qquad (n = 2, 3, \ldots\ldots)$$

5) យក $b_n = a_{n+1} - \dfrac{2n}{n+1}a_n$ ចំពោះ $n \geq 1$, និងរកតួទូទៅនៃស៊ីត $\{b_n\}$ ។

6) រកតួទូទៅនៃស៊ីត $\{a_n\}$

ចំលើយ

1) $a_{n+1} - \dfrac{4n+2}{n+1}a_n + \dfrac{4n-4}{n}a_{n-1} = 0$

$$\Leftrightarrow \quad a_{n+1} - \frac{2n}{n+1}a_n = \frac{2n+2}{n+1}a_n - \frac{4n-4}{n}a_{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad a_{n+1} - \frac{2n}{n+1}a_n = 2\left(a_n - \frac{2(n-1)}{n}a_{n-1}\right)$$

ដូច្នេះ យើងបាន

$b_n = 2b_{n-1}$ for $n = 2, 3, \ldots\ldots$

ដោយ $b_1 = a_2 - \dfrac{2}{1+1}a_1 = 2$, យើងបាន

$b_n = 2^n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots)$

2) តាមសំនួរទី 1, យើងបាន

$$a_{n+1} - \frac{2n}{n+1}a_n = 2^n$$

$$(n+1)\cdot a_{n+1} - 2n\cdot a_n = (n+1)\cdot 2^n$$

ចែកអង្គទាំងពីរនឹង 2^{n-1} យើងបាន

$$\frac{n+1}{2^{n-1}}\cdot a_{n+1} - \frac{n}{2^n}\cdot a_n = \frac{n+1}{2}$$

យក $c_n = \dfrac{n}{2^n}\cdot a_n$, នោះយើងបាន

$$c_1 = \frac{1}{2},\ c_{n+1} - c_n = \frac{n+1}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots)$$

ដូច្នេះ

$$c_n = (c_n - c_{n-1}) + (c_{n-1} - c_{n-2}) + \ldots\ldots\ldots + (c_3 - c_2) + (c_2 - c_1) + c_1$$

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

$$= \frac{n}{2} + \frac{n-1}{2} + \cdots\cdots + \frac{3}{2} + 1 + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\frac{n}{2}+\frac{1}{2}}{2} \times n$$

$$= \frac{n(n+1)}{4}$$

ដូច្នេះ

$$\frac{n}{2^n}\cdot a_n = \frac{n(n+1)}{4} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots\cdots)$$

ដូច្នេះ

$$a_n = 2^{n-2}(n+1) \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots\cdots)$$

---

20. រកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$ កំនត់ដូចខាងក្រោម

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{a_n}{2+a_n} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

ចំលើយ

ដោយ $\{a_n\}$ កំណត់ដោយ $a_1 = 1$ និង $a_{n+1} = \frac{a_n}{2+a_n}$, យើងបាន $a_n > 0$ ចំពោះគ្រប់ n ។ ដូច្នេះ,

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2+a_n} \Leftrightarrow \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2+a_n}{a_n} \Leftrightarrow \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2}{a_n} + 1$$

បើសិនជាយើងយក $b_n = \frac{1}{a_n}$, នោះ

$$b_{n+1} = 2b_n + 1$$
$$b_{n+1} + 1 = 2(b_n + 1)$$

ដោយ $b_1 + 1 = 1 + 1 = 2$, យើងបាន

$$b_n + 1 = 2^n$$
$$b_n = 2^n - 1$$

ដូច្នេះ

$$a_n = \frac{1}{b_n} = \frac{1}{2^n - 1}$$

---

21. ពិនិត្យស៊្វីត $\{a_n\}$ កំនត់ដូចខាងក្រោម $a_1 = 4,\ a_{n+1} = \frac{4a_n - 9}{a_n - 2}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$

1) ស្រាយថា $a_n \neq 3$ ចំពោះគ្រប់ n ។

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

2) យក $b_n = \dfrac{1}{a_n - 3}$ និងរកតួទូទៅនៃស៊ីត $\{b_n\}$ ។

3) រកតួទូទៅនៃស៊ីត $\{a_n\}$ ។

ចំលើយ

1) បើសិនជាមាន k ដែល $a_k = 3$, ដូច្នេះ

$$a_{k-1} = \frac{4a_k - 9}{a_k - 2} = \frac{4\cdot 3 - 9}{3 - 2} = 3$$

ដូច្នេះ, យើងបាន $a_{k-1} = a_k = 3$ ដែល

$$a_{k-1} = a_k = \cdots\cdots = a_2 = a_1 = 3$$

យ៉ាងណាក៏ដោយ, $a_1 = 4$ ជុយពីការពិត

ដូច្នេះ a_n ត្រូវមិនមែនជា 3 ចំពោះគ្រប់ n ។

2) ដោយ $a_n \neq 3$ ចំពោះគ្រប់ n, និង

$$a_{n-1} - 3 = \frac{4a_n - 9}{a_n - 2} - 3 = \frac{a_n - 3}{a_n - 2},$$

យើងបាន

$$\frac{1}{a_{n-1} - 3} = \frac{a_n - 2}{a_n - 3} = 1 + \frac{1}{a_n - 3}$$

បើសិបជា $b_n = \dfrac{1}{a_n - 3}$, នោះយើងបាន

$$b_{n-1} = 1 + b_n$$

ស៊ីត $\{b_n\}$ ជាស៊ីតនព្វន្តដែលមានផលសងរួមស្មើនឹង 1 និងតួទីមួយ $\dfrac{1}{a_1 - 3} = \dfrac{1}{4-3} = 1$ ។

យើងបាន

$$b_n = n$$

3) តាមសំនួទី 2, យើងបាន

$$\frac{1}{a_n - 3} = n$$

ដូច្នេះយើងបាន

$$a_n - 3 = \frac{1}{n}$$

$$a_n = \frac{1}{n} + 3$$

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

22. ចំពោះចំនួនគត់វិជ្ជមាន n, យក $p(n) = \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}$, និងកំនត់ស្វ៊ីត $\{a_n\}$ ដោយ

$$a_n = \frac{1}{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

7) បង្ហាញថា $a_{p(n)} = \dfrac{1}{2^n}$

8) តាមអនុមានរូមគណិតវិទ្យា បង្ហាញថា $\sum_{k=1}^{p(n)} a_k \geq \dfrac{n}{2}$ ។

ចំលើយ

1) ដោយ $p(n) = \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} = 2^n - 1$, យើងបាន

$$a_{p(n)} = \frac{1}{(2^n - 1) + 1} = \frac{1}{2^n}$$

2) បើ $n = 1$, យើងបាន

$$\sum_{k=1}^{p(1)} a_k = \sum_{k=1}^{1} a_k = \frac{1}{2}$$

ដូច្នេះ វិសមភាពនេះពិតចំពោះ $n = 1$ ។

សន្មត់ថាវិសមភាពនេះពិតចំពោះ $n = l$ នោះ

$$\sum_{k=1}^{p(l)} a_k \geq \frac{l}{2}$$

ពេលដែល $n = l + 1$, យើងបាន

$$\sum_{k=1}^{p(l+1)} a_k = \sum_{k=1}^{p(l)} a_k + \sum_{k=p(l)+1}^{p(l+1)} a_k$$

$$\geq \frac{l}{2} + \frac{1}{2^l + 1} + \frac{1}{2^l + 2} + \cdots\cdots + \frac{1}{2^{l-1}}$$

(ពីព្រោះ $p(l) + k = (2^l - 1) + k$, យើងបាន

$$a_{p(l)+k} = \frac{1}{p(l) + k + 1} = \frac{1}{(2^l - 1) + k + 1} = \frac{1}{2^l + k})$$

$$> \frac{l}{2} + \frac{1}{2^{l-1}} + \frac{1}{2^{l-1}} + \cdots\cdots + \frac{1}{2^{l-1}}$$

(ពីព្រោះ $2^l + 1 < 2^{l-1}$, យើងបាន $\dfrac{1}{2^l + 1} > \dfrac{1}{2^{l-1}}$)

$$= \frac{l}{2} + \frac{2^l}{2^{l-1}}$$

$$= \frac{l+1}{2}$$

ដូច្នេះ, យើងបាន

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

$$\sum_{k=1}^{p(l+1)} a_k > \frac{l+1}{2}.$$

វិសមភាពនេះពិតចំពោះ $n = l + 1$ ។

ដូច្នេះ តាមអនុមានរួមគណិតវិទ្យា យើងអាចសន្និដ្ឋានថាវិសមភាព $\sum_{k=1}^{p(n)} a_k \geq \frac{n}{2}$ ពិតចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ n ។

---

23. ពិនិត្យស៊ីត $\{a_n\}$ និង $\{S_n\}$ កំនត់ដូចខាងក្រោម

$a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k^2$

តាមវិធីនេះ យើងបង្ហាញថា បើមាន α និង β $(\alpha < \beta)$ នាំអោយ

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = a_\alpha a_\beta$$

9) គណនា $a_3, a_4, a_5, a_6, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5.$

10) ផ្អែកលើលទ្ធផលក្នុងសំនួរទី 1, តើយើងអាចរក α និង β ជាអនុគមន៍ n យ៉ាងដូចម្តេច? ចូរសរសេរ ការពិភាក្សារបស់អ្នក។

11) បង្ហាញការពិភាក្សារបស់អ្នកក្នុងសំនួរទី 2 ថាពិតជាអនុគមន៍អនុមានរួមគណិតវិទ្យា។

ចំលើយ

1) $a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 5, a_6 = 8, S_1 = 1, S_2 = 2, S_3 = 6, S_4 = 15, S_5 = 40.$

2) តាមលទ្ធផលទី 1 យើងអាចសន្មត់ថា $S_n = a_n a_{n+1}$ ។

$\alpha = n$ និង $\beta = n + 1$

3) យើងត្រូវតែបង្ហាញថា

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = a_n a_{n+1} \cdots\cdots\cdots \text{(i)}$$

បើ $n = 1$, យើងបាន

$$\sum_{k=1}^{1} a_k^2 = 1 \text{ និង } a_1 a_{1+1} = 1\cdot 1 = 1$$

ដូច្នេះ (i) ពិតចំពោះ $n = 1$

សន្មត់ថា (i) ពិតចំពោះ $n = l$ ។

ពេល $n = l + 1$, យើងបាន

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

$$\sum_{k=1}^{l+1} a_k^2 = \sum_{k=1}^{l} a_k^2 + a_{l+1}^2 = a_l a_{l+1} + a_{l+1}^2 = a_{l+1}(a_l + a_{l+1}) = a_{l+1}a_{l+2}$$

ដូច្នេះ (i) ពិតចំពោះ $n = l + 1$ ។

ដូច្នេះ តាមអនុមានរួគណិតវិទ្យា យើងអាចសន្និដ្ឋានថា (i) ពិតចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។

---

24. ពិនិត្យស្វ៊ីត $\{a_n\}$ កំនត់ដូចខាងក្រោម

$$a_1 = \frac{1}{4},\ a_{n+1} = \frac{1}{2-a_n} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

12) រក a_2, a_3, និង a_4 ។

13) សន្និដ្ឋានតួទូទៅនៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$, ជាអនុគមន៍លទ្ធផលនៃសំនួរទី 1 ។

14) ស្រាយថាកាសន្និដ្ឋានរបស់អ្នកក្នុងសំនួរទី 2 ថាពិតជាអនុគមន៍អនុមានរួមគណិតវិទ្យា ។

ចំលើយ

1) $a_2 = \frac{4}{7},\ a_3 = \frac{7}{10},\ a_4 = \frac{10}{13}$

2) តាមសំនួទី 1, យើងអាចសន្មត់ថា

$$a_n = \frac{1+3(n-1)}{4+3(n-1)} = \frac{3n-2}{3n+1} \quad \cdots\cdots\cdots \text{(i)}$$

3) បើ $n = 1$, យើងបាន

$$a_1 = \frac{3\cdot1-2}{3\cdot1+1} = \frac{1}{4}$$

ដូច្នេះ (i) ពិតចំពោះ $n = 1$

សន្មត់ថា (i) ពិតចំពោះ $n = k$ នោះ

$$a_k = \frac{3k-2}{3k+1}$$

ចំពោះ $n = k + 1$ យើងបាន

$$a_{k+1} = \frac{1}{2-a_k} = \frac{1}{2-\frac{3k-2}{3k+1}} = \frac{1}{\frac{2(3k+1)-(3k-2)}{3k+1}} = \frac{1}{\frac{3k+4}{3k+1}} = \frac{3k+1}{3k+4}$$

$$= \frac{3(k+1)-2}{3(k+1)+1}$$

ដូច្នេះ, (i) ពិតចំពោះ $n = k + 1$

ដូច្នេះ, អនុមានរួមគណិតវិទ្យាយើងអាចសន្និដ្ឋានថា (i) ពិតចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

25. ពិនិត្យ $\{a_n\}$ កំនត់ដូចខាងក្រោម

$$a_1 = 1,\ a_n + (2n+1)(2n+2)a_{n+1} = \frac{2(-1)^n}{(2n)!} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

15) រក a_2, a_3, និង a_4.

16) សន្និដ្ឋានតួទូទៅនៃស៊ីត $\{a_n\}$, ជាអនុគមន៍លទ្ធផលដែលមាននៅក្នុងសំនួរទី 1 ។

ស្រាយថាកាសន្និដ្ឋានរបស់អ្នកក្នុងសំនួរទី 2 ថាពិតជាអនុគមន៍អនុមានរូមគណិតវិទ្យា ។

ចំលើយ

1) ពេលដែល $n = 1$,

$$a_1 + (2\cdot1+1)(2\cdot1+2)a_2 = \frac{2(-1)}{(2\cdot1)!}$$

$$\Leftrightarrow 1 + 12a_2 = -1$$

$$\Leftrightarrow \quad a_2 = -\frac{1}{6}$$

ពេល $n = 2$,

$$a_2 + (2\cdot2+1)(2\cdot2+2)a_3 = \frac{2(-1)^2}{(2\cdot2)!}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{6} + 30a_3 = \frac{1}{12}$$

$$\Leftrightarrow \quad a_3 = \frac{1}{120}$$

ពេល $n = 3$,

$$a_3 + (2\cdot3+1)(2\cdot3+2)a_4 = \frac{2(-1)^3}{(2\cdot3)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{120} + 56a_4 = -\frac{1}{360}$$

$$\Leftrightarrow \quad a_4 = -\frac{1}{5040}$$

2) ភាគបែងនៃ a_1, a_2, a_3, និង a_4 គឺ 1, 6, 120, និង 5040, រៀងគ្នា

ប៉ុន្តែ

$1 = 1!$

$6 = 2\cdot3 = 3!$

$120 = 6\cdot20 = 3!\cdot4\cdot5 = 5!$

$5040 = 120\cdot42 = 5!\cdot6\cdot7 = 7!$

ដូច្នេះ, យើងអាចសន្និដ្ឋានថា

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} \quad \cdots\cdots\cdots \text{(i)}$$

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

3) ពេលដែល $n = 1$,

$$a_1 = \frac{(-1)^{1-1}}{(2\cdot 1-1)!} = 1$$

ដូច្នេះ, (i) ពិតចំពោះ $n = 1$ ។

សន្មត់ថា (i) ពិតចំពោះ $n = k$ នោះ

$$a_k = \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}$$

ពេល $n = k+1$, យើងបាន

$$a_k + (2k+1)(2k+2)a_{k+1} = \frac{2(-1)^k}{(2k)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} + (2k+1)(2k+2)a_{k+1} = \frac{2(-1)^k}{(2k)!}$$

$$\Leftrightarrow (2k+1)(2k+2)a_{k+1} = \frac{2(-1)^k}{(2k)!} - \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}$$

$$= \frac{(-1)^k + k(-1)^k}{k\cdot(2k-1)!}$$

$$= \frac{(k+1)(-1)^k}{k\cdot(2k-1)!}$$

$$\Leftrightarrow a_{k+1} = \frac{(k+1)(-1)^k}{k\cdot(2k-1)!}\cdot\frac{1}{2(2k+1)(k+1)}$$

$$= \frac{(-1)^k}{(2k+1)\cdot 2k\cdot(2k-1)!}$$

$$= \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$$

ដូច្នេះ, (i) ពិតចំពោះ $n = k+1$.

ដូច្នេះ, តាមអនុមានរួមគណិតវិទ្យាយើងសន្និដ្ឋានថា (i) ពិតចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។

---

26. ស៊ីត $\{a_n\}$ បំពេញលក្ខខណ្ឌខាងក្រោមចំពោះគ្រប់ $n = 1, 2, 3, \cdots$ ។

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(a_k + \frac{1}{k+1}\right) = 2^n + 1 - \frac{1}{n+1}$$

1) បង្ហាញតួទី n នៃស៊ីត $\{a_n\}$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

2) គណនា $\sum_{k=1}^{n} a_k$

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

ចំលើយ

1) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(a_k + \frac{1}{k+1}\right) = 2^n + 1 - \frac{1}{n+1}$ .... (i)

$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\left(a_k + \frac{1}{k+1}\right) = 2^{n-1} + 1 - \frac{1}{n+2}$ .... (ii)

(ii) – (i), យើងបាន

$$\frac{1}{n+1}\left(a_{n-1} + \frac{1}{n+2}\right) = 2^n + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

ដូច្នេះ

$$a_{n-1} = (n+1)2^n$$

នាំអោយ

$$a_n = n \cdot 2^{n-1} \quad (n = 2, 3, 4, ...) \text{ .... (iii)}$$

យក $n = 1$ ជំនួសក្នុង (i) យើងបាន

$$a_1 + \frac{1}{2} = 2^1 + 1 - \frac{1}{2}$$

ដូច្នេះ

$$a_1 = 2$$

ប៉ុន្តែ $a_1 = 2$ មិនបំពេញលក្ខខណ្ឌ (iii).

ដូច្នេះយើងបាន

$a_1 = 2$,

$a_n = n \cdot 2^{n-1}$ for $n \geq 2$.

2) យក $S = \sum_{k=1}^{n} a_k$. នោះ

a) ចំពោះ $n \geq 2$,

$$S = 2 + 2\cdot2^1 + 3\cdot2^2 + \text{.........} + n\cdot2^{n-1}$$

$$2S = 2\cdot2 + 2\cdot2^2 + \text{.........} + (n-1)\cdot2^{n-1} + n\cdot2^n$$

ដូច្នេះ,

$$S - 2S = 2 + 2^2 + 2^3 + \text{.........} + 2^{n-1} - n\cdot2^n$$

$$-S = \frac{2(2^{n-1} - 1)}{2-1} - n\cdot2^n$$

$$= 2^n - 2 - n\cdot2^n$$

$$= -(n-1)2^n - 2$$

$$S = (n-1)2^n + 2$$

b) ចំពោះ $n = 1$,

$$S = a_1 = 2$$

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

យកករណី (b) បញ្ចូលក្នុងករណី (a), យើងបាន

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = (n-1)2^n + 2 \qquad \text{for } n = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots$$

---

27. ស៊ីត $\{a_n\}$ កំណត់ដូចខាងក្រោម

$a_1 = 1,$

$a_n = 10a_{n-1} + n \qquad (n = 2, 3, \ldots\ldots)$

រកតួទូទៅនៃស៊ីត $\{a_n\}$ ។

ចំលើយ

យើងមាន

$a_n = 10a_{n-1} + n \qquad (n \geq 2)\ldots\ldots\ldots \text{(i)} \quad a_{n+1} = 10a_n + (n+1) \ldots\ldots\ldots \text{(ii)}$

(ii) – (i), យើងបាន

$a_{n+1} - a_n = 10(a_n - a_{n-1}) + 1$

បើសិនជាយើងយក $b_n = a_{n+1} - a_n$, នោះយើងបាន

$b_n = 10b_{n-1} + 1$

ដូច្នេះ

$$b_n + \frac{1}{9} = 10\left(b_{n-1} + \frac{1}{9}\right) \quad (n = 2, 3, \ldots\ldots)$$

$b_1 = a_2 - a_1 = 10a_1 + 2 - a_1$

$\quad = 11$

ដូច្នេះ ស៊ីត $\left\{b_n + \frac{1}{9}\right\}$ ជាស៊ីតធរណីមាត្រដែលមានផលធៀបរួមស្មើនឹង 10 និងតួទីមួយ $11 + \frac{1}{9}$

$= \frac{10^2}{9}$ នាំអោយ

$$b_n + \frac{1}{9} = 10^{n-1} \cdot \frac{10^2}{9}$$

$$b_n = \frac{10^{n+1}}{9} - \frac{1}{9} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots\ldots)$$

ដូច្នេះ ចំពោះ $n \geq 2$, យើងបាន

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{10^{k+1}}{9} - \frac{1}{9}\right)$$

$$= 1 + \frac{10^2}{9} \cdot \frac{10^{n-1} - 1}{10 - 1} - \frac{1}{9}(n-1)$$

$$= 1 + \frac{10^{n+1} - 100}{81} - \frac{1}{9}(n-1)$$

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

$$= \frac{1}{81}\cdot 10^{n-1} - \frac{1}{9}n - \frac{10}{81} \;\cdots\cdots\; \text{(iii)}$$

យក $n = 1$ ជំនួសក្នុង (iii) យើងបាន

$$a_1 = \frac{1}{81}\cdot 10^2 - \frac{1}{9}\cdot 1 - \frac{10}{81} = 1$$

ដូច្នេះ (iii) ពិតចំពោះ $n = 1$

ដូច្នេះ តួទូទៅគឺ

$$a_n = \frac{1}{81}\cdot 10^{n-1} - \frac{1}{9}n - \frac{10}{81}$$

---

28. ស៊ីត $\{a_n\}$ កំណត់ដូចខាងក្រោម

$$a_1 = a,\quad a_{n+1} = \begin{cases} 2a_n & (a_n < 1) \\ a_n - 1 & (a_n \geq 1) \end{cases},\ \text{ចំពោះ}\quad n = 1, 2, 3, \cdots \text{។}$$

3) រកតម្លៃនៃតួ a_{1000} ចំពោះ $a = \frac{1}{9}$ និងចំពោះ $a = \frac{1}{12}$ ។

បើ $a = \frac{1}{12}$, គណនាតម្លៃ $\sum_{k=1}^{1000} a_k$ ។

ចំលើយ

1) ពេល $a = \frac{1}{9}$, យើងបាន

$$a_1 = \frac{1}{9},\ a_2 = \frac{2}{9},\ a_3 = \frac{4}{9},\ a_4 = \frac{8}{9},\ a_5 = \frac{16}{9},$$

$$a_6 = \frac{16}{9} - 1 = \frac{7}{9},\ a_7 = \frac{14}{9},$$

$$a_8 = \frac{14}{9} - 1 = \frac{5}{9},\ a_9 = \frac{10}{9},$$

$$a_{10} = \frac{10}{9} - 1 = \frac{1}{9},$$

ដោយ $a_1 = a_{10}$, យើងបានតម្លៃនៃ 9 តួ $a_1, a_2, \cdots, a_9$ ដដែលៗលេចឡើង នាំអោយ

$a_{9k} = a_9,\ a_{9k+1} = a_1,\ a_{9k+2} = a_2,\ \cdots\cdots,\ a_{9k+8} = a_8.\quad (k = 1, 2, 3, \cdots)$

ដូច្នេះពេលដែល $a = \frac{1}{9}$,

$$a_{1000} = a_{9\cdot 111+1} = a_1 = \frac{1}{9}$$

ពេលដែល $a = \frac{1}{12}$, យើងបាន

$$a_1 = \frac{1}{12},\ a_2 = \frac{2}{12},\ a_3 = \frac{4}{12},\ a_4 = \frac{8}{12},\ a_5 = \frac{16}{12},$$

$$a_6 = \frac{16}{12} - 1 = \frac{4}{12}$$

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

ដោយ $a_3 = a_6$, បន្ទាប់ពីតួទីបី a_3, តំលៃនៃបីតួ a_3, a_4, a_5 ដដែលៗលេចឡើង នាំអោយ

$$a_1 = \frac{1}{12},\ a_2 = \frac{2}{12},\ a_{3k} = a_3,\ a_{3k+1} = a_4,\ a_{3k+2} = a_5. \quad (k = 1, 2, 3, \cdots)$$

ដូច្នេះពេលដែល $a = \frac{1}{12}$, យើងបាន

$$a_{1000} = a_{3\cdot 333+1} = a_4 = \frac{8}{12}$$

2) ពេលដែល $a = \frac{1}{12}$, យើងបាន

$$\sum_{k=1}^{1000} a_k = a_1 + a_2 + (a_3 + a_4 + a_5)\times 332 + a_3 + a_4$$

$$= \frac{1}{12} + \frac{2}{12} + \left(\frac{4}{12} + \frac{8}{12} + \frac{16}{16}\right)\times 332 + \frac{4}{12} + \frac{8}{12}$$

$$= \frac{15}{12} + \frac{28}{12}\times 332$$

$$= \frac{9311}{12}$$

---

29. ស៊ីត $\{a_n\}$ និង $\{b_n\}$ កំណត់ដូចខាងក្រោម

$$a_1 = 6,\ b_1 = 1$$
$$a_{n+1} = a_n + 3b_n,\ b_{n+1} = 2a_n + 2b_n \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

1) បង្ហាញ $a_n - b_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

2) បង្ហាញ $2a_n + 3b_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

3) រកតួទូទៅនៃស៊ីត $\{a_n\}$ និង $\{b_n\}$ ។

ចំលើយ

1) $a_{n+1} = a_n + 3b_n$ .... (i)
$b_{n+1} = 2a_n + 2b_n$ .... (ii)

(i) − (ii), យើងបាន

$$a_{n+1} - b_{n+1} = -(a_n - b_n).$$

ដោយ $a_1 - b_1 = 5$, ស៊ីត $\{a_n - b_n\}$ ជាស៊ីតធរណីមាត្រដែលមានផលធៀបរួមស្មើនឹង -1, និងតួទីមួយស្មើនឹង 5 ដូច្នេះ

$$a_n - b_n = 5\cdot(-1)^{n-1} \text{ .... (iii)}$$

2) (i)×2 + (ii)×3, យើងបាន

$$2a_{n+1} + 3b_{n+1} = 4(2a_n + 3b_n).$$

ដោយ $2a_1 + 3b_1 = 15$, ស៊ីត $\{2a_n + 3b_n\}$ ជាស៊ីតធរណីមាត្រដែលមានផលធៀបរួមស្មើនឹង 4

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

និង តួទីមួយស្មើនឹង 15 ។ ដូច្នេះ

$2a_n + 3b_n = 15\cdot4^{n-1}$ .... (iv)

3) (iii)×3 + (iv),យើងបាន

$5a_n = 15\cdot(-1)^{n-1} + 15\cdot4^{n-1}$

ដូច្នេះ,

$a_n = 3\cdot(-1)^{n-1} + 3\cdot4^{n-1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots\ldots)$

តាម (iii)×2 – (iv), យើងបាន

$-5b_n = 10\cdot(-1)^{n-1} - 15\cdot4^{n-1}$

ដូច្នេះ,

$b_n = -2\cdot(-1)^{n-1} + 3\cdot4^{n-1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots\ldots)$

---

30. រកតួទី n នៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$ និង $\{b_n\}$ កំណត់ដូចខាងក្រោម

$a_1 = 1, a_2 = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}, b_1 = 0, b_2 = \frac{\sqrt{3}}{2},$

$3a_n = b_n + a_{n-1} + a_{n-1},\quad 3b_n = a_n + b_{n-1} + b_{n-1}\quad (n = 2, 3, 4, \ldots\ldots)$

ចំលើយ

$3a_n = b_n + a_{n-1} + a_{n-1},$ .... (i)

$3b_n = a_n + b_{n-1} + b_{n-1}$ .... (ii)

តាម (i) + (ii) និង (i) – (ii), យើងបាន

$3(a_n + b_n) = (a_n + b_n) + (a_{n-1} + b_{n-1}) + (a_{n-1} + b_{n-1})$

$3(a_n - b_n) = -(a_n - b_n) + (a_{n-1} - b_{n-1}) + (a_{n-1} - b_{n-1})$

បើសិនជាយើងយក $c_n = a_n + b_n$ និង $d_n = a_n - b_n$, នោះយើងបាន

$3c_n = c_n + c_{n-1} + c_{n-1}$

$3d_n = -d_n + d_{n-1} + d_{n-1}$

ចំពោះ $n = 2, 3, 4, \ldots\ldots$,យើងបាន

$c_{n-1} - 2c_n + c_{n-1} = 0$ .... (iii)

$d_{n-1} - 4d_n + d_{n-1} = 0$ .... (iv)

តាម (iii), យើងបាន

$c_{n-1} - c_n = c_n - c_{n-1}$

ដូច្នេះ, $\{c_{n-1} - c_n\}$ ជាស្វ៊ីតថេរ ។

ដោយ

$c_1 = a_1 + b_1 = 1$

$c_2 = a_2 + b_2 = 2,$

តួទីមួយនៃស្វ៊ីត $\{c_{n+1} - c_n\}$ គឺ $c_2 - c_1 = 1$.

ដូច្នេះ

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

$c_{n+1} - c_n = 1$ ចំពោះ $n = 1, 2, 3, \dots\dots$.

នេះបង្ហាញថា $\{c_n\}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានតួទីមួយស្មើនឹង 1 និង ផលសងរួមស្មើនឹង 1 ។ នោះ

$c_n = n$

$a_n + b_n = n \dots\dots\dots$ (v)

បើសិនជាយើងយក $\alpha = 2-\sqrt{3}$ និង $\beta = 2+\sqrt{3}$, តាមទំនាក់ទំនងកំណើន (iv) អាចបំលែង

ទៅជា $\quad d_{n+1} - \alpha d_n = \beta(d_n - \alpha d_{n-1})$

ដូច្នេះ $\{d_{n+1} - \alpha d_n\}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានផលធៀបរួមស្មើនឹង $\beta = 2+\sqrt{3}$ ។

ដោយ

$d_1 = a_1 - b_1 = 1$

$d_2 = a_2 - b_2 = 2-\sqrt{3}$.

តួទីមួយនៃស្វ៊ីត $\{d_{n+1} - \alpha d_n\}$ គឺ

$d_2 - \alpha d_1 = 2-\sqrt{3} - (2-\sqrt{3})\cdot 1 = 0$

ដូច្នេះ

$d_{n+1} - \alpha d_n = 0$ for $n = 1, 2, 3, \dots\dots$

ដូច្នេះ

$d_{n+1} = \alpha d_n$

$d_n = \alpha^{n-1} d_1 = (2-\sqrt{3})^{n-1}$

$a_n - b_n = (2-\sqrt{3})^{n-1} \dots\dots\dots$ (vi)

ដូច្នេះ តាម (v) + (vi) និង (v) − (vi), យើងបាន

$2a_n = n + (2-\sqrt{3})^{n-1}$

$2b_n = n - (2-\sqrt{3})^{n-1}$

ចំពោះ $n = 1, 2, 3, \dots\dots\dots$, យើងបាន

$$a_n = \frac{1}{2}\{n + (2-\sqrt{3})^{n-1}\}$$

$$b_n = \frac{1}{2}\{n - (2-\sqrt{3})^{n-1}\}$$

---

31. ពិនិត្យស្វ៊ីត $\{a_n\}$ កំនត់ដូចខាងក្រោម

$a_1 = 1, a_2 = 2, \; a_{n+2}a_n + a_{n+1}a_{n+1} - a_{n+1}a_n = 0 \; (n = 1, 2, 3, \dots\dots)$

4) រកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$ ។

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

5) កំណត់តំលៃ $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ ។

ចំលើយ

1) បើ $n = 1$,

$$a_3a_1 + a_2a_2 - a_2a_1 = 0 \quad\Rightarrow\quad a_3 + 4 - 2 = 0 \quad\Rightarrow\quad a_3 = -2.$$

បើ $n = 2$,

$$a_4a_2 + a_3a_3 - a_3a_2 = 0 \quad\Rightarrow\quad 2a_4 + 4 + 4 = 0 \quad\Rightarrow\quad a_4 = -4.$$

បើ $n = 3$,

$$a_5a_3 + a_4a_4 - a_4a_3 = 0 \quad\Rightarrow\quad -2a_5 + 16 - 8 = 0 \quad\Rightarrow\quad a_5 = 4.$$

បើ $n = 4$,

$$a_6a_4 + a_5a_5 - a_5a_4 = 0 \quad\Rightarrow\quad -4a_6 + 16 + 16 = 0 \quad\Rightarrow\quad a_6 = 8.$$

បើ $n = 5$,

$$a_7a_5 + a_6a_6 - a_6a_5 = 0 \quad\Rightarrow\quad 4a_7 + 64 - 32 = 0 \quad\Rightarrow\quad a_7 = -8.$$

បើ $n = 6$,

$$a_8a_6 + a_7a_7 - a_7a_6 = 0 \quad\Rightarrow\quad 8a_8 + 64 + 64 = 0 \quad\Rightarrow\quad a_8 = -16.$$

បើ $n = 7$,

$$a_9a_7 + a_8a_8 - a_8a_7 = 0 \quad\Rightarrow\quad -8a_9 + 16^2 - 16\cdot 8 = 0 \quad\Rightarrow a_9 = 16.$$

ដូច្នេះ, យើងអាចសន្មត់ថាតួទូទៅនៃស៊ីត $\{a_n\}$ គឺ

$$\begin{cases} a_{2m-1} = (-2)^{m-1} \\ a_{2m} = -(-2)^m \end{cases} \quad \text{.........} \ (*)$$

យើងស្រាយថាការសន្មត់នេះពិត

ពេលដែល $m = 1$, យើងមាន $a_1 = 1$ និង $a_2 = 2$ ។ ដូច្នេះ (*) ពិតចំពោះ $m = 1$ ។

ឧបមាថា (*) ពិតចំពោះ $m = k$ នោះយើងបាន

$$\begin{cases} a_{2k-1} = (-2)^{k-1} \\ a_{2k} = -(-2)^k \end{cases}$$

ម្យ៉ាងវិញទៀត ពេលដែល $n = 2k - 1$ យើងបាន

$$a_{2k+1}a_{2k-1} + a_{2k}a_{2k} - a_{2k}a_{2k-1} = 0$$

$$\Rightarrow \quad (-2)^{k-1}a_{2k+1} + (-2)^{2k} + (-2)^{2k-1} = 0$$

$$\Rightarrow \quad a_{2k+1} = -(-2)^{k+1} - (-2)^k$$

$$\Rightarrow \quad a_{2k+1} = (-2)^k \quad \text{.........} \ (\text{i})$$

ពេល $n = 2k$, យើងបាន

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

$a_{2k-2}a_{2k}+a_{2k-1}a_{2k-1}-a_{2k+1}a_{2k}=0$

$\Rightarrow \quad -(-2)^{k}a_{2k-2}+(-2)^{2k}+(-2)^{2k}=0$

$\Rightarrow \quad a_{2k-2}=2(-2)^{k}$

$\Rightarrow \quad a_{2k-2}=-(-2)^{k-1}$ .... (ii)

ដោយ (i) និង (ii), (*) ពិតចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន m ។

ដូច្នេះ

$a_n=(-2)^{\frac{n-1}{2}}$ ចំពោះចំនួនគត់សេសវិជ្ជមាន n និង

$a_n=-(-2)^{\frac{n}{2}}$ ចំពោះចំនួនគត់គូវិជ្ជមាន n ។

2) តាម (*), យើងបាន

$a_{2m}+a_{2m-1}=-(-2)^{k}+(-2)^{k}=0$ for $n=1,2,3,\ldots$.

ដូច្នេះពេលដែល n ជាចំនួនសេស

$S_n=a_1+(a_2+a_3)+\cdots+(a_{n-1}+a_n)$

$=a_1$

$=1$

ពេលដែល n ជាចំនួនគូ

$S_n=a_1+(a_2+a_3)+\cdots+(a_{n-2}+a_{n-1})+a_n$

$=a_1+a_n$

$=1-(-2)^{\frac{n}{2}}$

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS