TRẦN ĐỨC HUYÊN
Thạc sĩ Toán
GV Trường PTTH chuyên Lê Hồng Phong

# Phương pháp
# KHẢO SÁT HÀM SỐ

12 - LUYỆN THI ĐẠI HỌC

*(Tái bản lần thứ nhất)*

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Phần I

# CÁC VẤN ĐỀ VỀ KHẢO SÁT HÀM SỐ

## 1- HÀM BẬC BA

$$\boxed{y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)}$$

### I- NHỮNG VẤN ĐỀ CƠ BẢN

1. ***Miền xác định :*** $D = R$

2. ***Đạo hàm :***

   * $y' = 3ax^2 + 2bx + c, \qquad \Delta' = b^2 - 3ac$

     $\Delta' > 0$ : *Hàm số có 2 cực trị có hoành độ* $x_1, x_2$

     $\Delta' \leq 0$ : *Hàm số đơn điệu trên R*

   * $y'' = 6ax + 2b$

   *Đồ thị hàm số luôn có một điểm uốn I có hoành độ* $x_0 = -\dfrac{b}{3a}$

3. ***Giới hạn :***

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \begin{cases} -\infty & (a > 0) \\ +\infty & (a < 0) \end{cases} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & (a > 0) \\ -\infty & (a < 0) \end{cases}$$

4. ***Bảng biến thiên :***

| $a > 0$ | $\Delta' > 0$ |
|---|---|

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | + | 0 | − | 0 | + | |
| $y$ | $-\infty$ | ↗ | CĐ | ↘ | CT | ↗ | $+\infty$ |

| $a > 0$ | $\Delta' \leq 0$ |
|---|---|

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $y'$ | | + | |
| $y$ | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

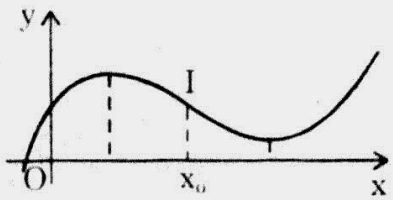
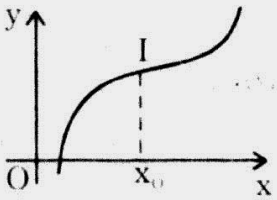
| $a < 0$ | $\Delta' > 0$ |
|---|---|

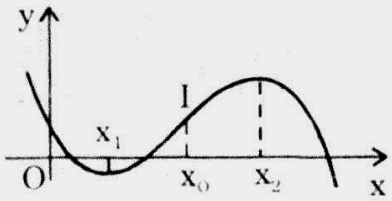
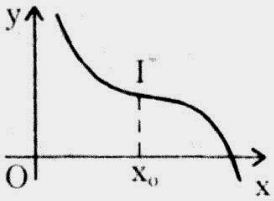
| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $CT$ | $\nearrow$ | $CĐ$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

| $a < 0$ | $\Delta' \leq 0$ |
|---|---|

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | |
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

**5. Đồ thị :** *Luôn nhận điểm uốn I là tâm đối xứng (h : 1, 2, 3, 4).*

| | $\Delta' > 0$ | $\Delta' \leqslant 0$ |
|---|---|---|
| $\Delta > 0$ |   *Hình 1* |   *Hình 2* |

| | $\Delta' > 0$ | $\Delta' \leqslant 0$ |
|---|---|---|
| $\Delta < 0$ |   *Hình 3* |   *Hình 4* |

## II- BÀI TOÁN MINH HỌA

**Đề 1** Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số :

**1.** $y = (1 - x)(x + 2)^2$ **2.** $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$

**3.** $y = -x^3 + 3x^2 - 5x + 2$.



www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

*Giải*

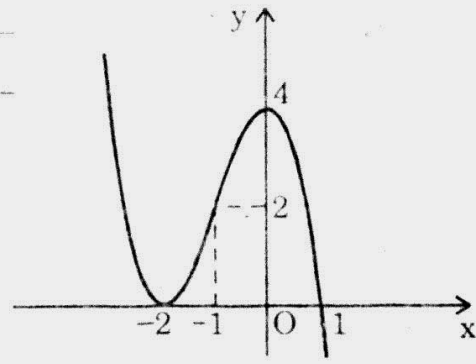
**1.** $y = (1 - x)(x + 2)^2 \Leftrightarrow y = -x^3 - 3x^2 + 4$

- $D = R$
- $y' = -3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = -2$
- $y'' = -6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow$ điểm uốn $I(-1; 2)$

| x | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| y | $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↗ | $4$ | ↘ | $-\infty$ |

- $y = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -2$

Đồ thị (hình 5).




*Hình 5*

**2.** $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$

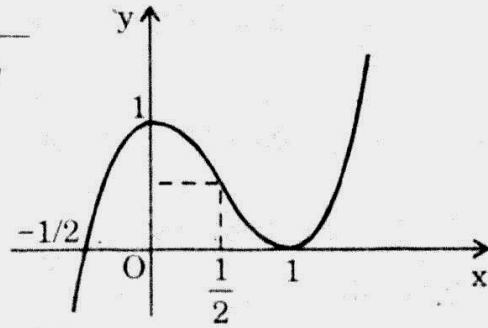
- $D = R$
- $y' = 6x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$
- $y'' = 12x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow$ điểm uốn $I\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

| x | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| y | $-\infty$ | ↗ | $1$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

- $y = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(2x^2 - x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -\frac{1}{2}$

Đồ thị (hình 6).




*Hình 6*

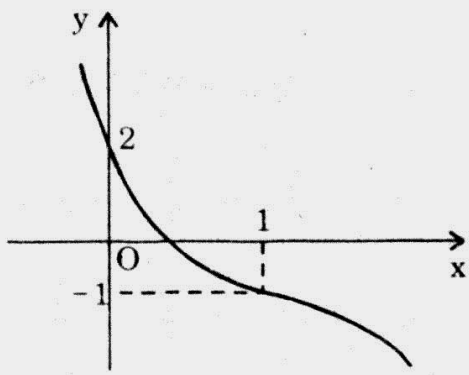
**3.** $y = -x^3 + 3x^2 - 5x + 2$

- $D = R$
- $y' = -3x^2 + 6x - 5 < 0, \quad x \in D$
- $y'' = -6x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow I(1; -1)$ là điểm uốn

| x | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y' | | $-$ | $-2$ | $-$ | |
| y | $+\infty$ | ↘ | $-1$ | ↘ | $-\infty$ |

- $x = 0 \Rightarrow y = 2$

Đồ thị (hình 7).




*Hình 7*

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

**Đề 2** Cho hàm số : $y = f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2. Tìm tất cả các tâm đối xứng của (C).
3. Tìm điểm trên (C) có hệ số góc tiếp tuyến tại đó nhỏ nhất.
4. Lập phương trình tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $y = 3x - 1$.

***Giải***

$$y = f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1 \qquad (1)$$

**1.** D = R

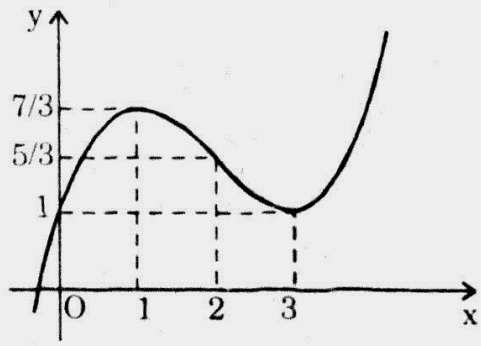
$y' = x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$

$y'' = 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow I\left(2, \frac{5}{3}\right)$ là điểm uốn

| x | $-\infty$ | | 1 | | 2 | | 3 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | 0 | | − | | 0 | + | |
| y | $-\infty$ | ↗ | $\frac{7}{3}$ | ↘ | | ↘ | −1 | ↗ | $+\infty$ |

$x = 0 \Rightarrow y = 1$

Đồ thị (hình 8).




*Hình 8*

**2.** Chuyển trục : $x = X + x_0$

$y = Y + y_0$

Hàm y thành :

$$Y + y_0 = \frac{1}{3}(X + x_0)^3 - 2(X + x_0)^2 + 3(X + x_0) + 1$$

$$\Rightarrow Y = \frac{1}{3}X^3 + (x_0 - 2)X^2 + 3(x_0 - 4x_0 + 3)X + \frac{x_0^3}{3} - 2x_0^2 + 3x_0 + 1 - y_0$$

$I(x_0; y_0)$ làm tâm đối xứng $\Leftrightarrow$ Y là hàm lẻ

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - 2 = 0 \\ \frac{x_0^3}{3} - 2x_0^2 + 3x_0 + 1 = y_0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x_0 = 2 \quad \text{và} \quad y_0 = \frac{5}{3}.$$



www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

**3.** $y' = x^2 - 4x + 3 = (x^2 - 4x + 4) - 1 = (x - 2)^2 - 1 \geq -1$

Vậy hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị nhỏ nhất là $-1$. Khi đó tiếp điểm là $\left(2, \dfrac{5}{3}\right)$.

**4.** Tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_0$ song song với đường thẳng $y = 3x - 1$ có phương trình là : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

với $f'(x_0) = x_0^2 - 4x_0 + 3 = 3 \Leftrightarrow x_0 = 0 \vee x_0 = 4$

Vậy có hai tiếp tuyến cần tìm $(T_1) : y = 3x + 1$

$(T_2) : y = 3x - \dfrac{29}{3}$.

**Đề 3** Cho hàm số : $y = f(x) = -\dfrac{x^3}{3} + (a - 1)x^2 + (a + 3)x - 4$

1. Xác định a để hàm số đồng biến trong khoảng $0 < x < 3$.
2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi $a = 0$.
3. Chứng minh rằng đồ thị (C) nhận điểm uốn làm tâm đối xứng.

***Giải***

$y = f(x) = -\dfrac{x^3}{3} + (a - 1)x^2 + (a + 3)x - 4$

**1.** $y' = -x^2 + 2(a - 1)x + (a + 3) = g(x)$

Hàm y đồng biến trong khoảng $(0; 3) \Leftrightarrow g(x) \geq 0 \quad \forall x \in (0; 3)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(-1)g(0) \leq 0\\(-1)g(3) \leq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a + 3 \geq 0\\-9 + 7a - 3 \geq 0\end{cases} \Leftrightarrow a \geq \frac{12}{7}.$$

**2.** $a = 0$ thì $y = -\dfrac{x^3}{3} - x^2 + 3x - 4$

$D = R$

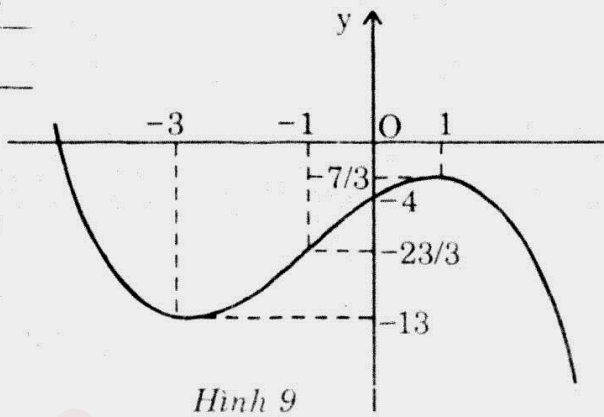
$y' = -x^2 - 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 1$

$y'' = -2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ Vậy $I\left(-1, \dfrac{-23}{3}\right)$ là điểm uốn.

| x | $-\infty$ | | $-3$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |
| y | $+\infty$ | ↘ | $-13$ | ↗ | $\dfrac{-7}{3}$ | ↘ | $-\infty$ |

$x = 0 \Rightarrow y = -4$

Đồ thị (hình 9).




*Hình 9*

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

3. Chuyển trục : $\begin{cases} x = X - 1 \\ y = Y - \dfrac{23}{3} \end{cases}$

Hàm y trở thành : $Y - \dfrac{23}{3} = -\dfrac{(X-1)^3}{3} - (X-1)^2 + 3(X-1) - 4$

$$\Leftrightarrow \quad Y = -\frac{X^3}{3} + 4X + 8 - 7$$

Y là hàm lẻ $\Rightarrow$ $\left(-1, \dfrac{-23}{3}\right)$ là tâm đối xứng.

**Đề 4** Cho hàm số : $y = f(x) = \dfrac{4x^3}{3} - 2(1 - \sin\alpha)x^2 - (1 + \cos 2\alpha)x + 1$

với $\alpha$ là tham số.

1. Tìm các giá trị của $\alpha$ để hàm số luôn luôn tăng.
2. Với giá trị nào của $\alpha$ thì hàm số có cực đại, cực tiểu.
3. Gọi $x_1$, $x_2$ là hoành độ các điểm cực trị. Tìm $\alpha$ sao cho $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

***Giải***

$$y = f(x) = \frac{4x^3}{3} - 2(1 - \sin\alpha)x^2 - (1 + \cos 2\alpha)x + 1$$

1. $y' = 4x^2 - 4(1 - \sin\alpha)x - 2\cos^2\alpha = 2[2x^2 - 2(1 - \sin\alpha)x - \cos^2\alpha]$

y luôn tăng $\Leftrightarrow$ $y' \geq 0 \quad \forall x \in R$

$\Leftrightarrow$ $\Delta' = (1 - \sin\alpha)^2 + 2\cos^2\alpha \leq 0$

$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \sin\alpha = 1 \\ \cos\alpha = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\alpha = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, \quad k \in Z.$

2. Hàm số cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow$ y' có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ $\Delta' = (1 - \sin\alpha)^2 + 2\cos^2\alpha > 0$

$\Leftrightarrow$ $\sin\alpha \neq 1$ hay $\cos\alpha \neq 0$

$\Leftrightarrow$ $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in Z).$

3. $x_1^2 + x_2^2 = 1$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} y' \text{ có hai nghiệm phân biệt} \\ (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ (1 - \sin\alpha)^2 + \cos^2\alpha = 1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ \sin\alpha = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ $\alpha = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi$ hay $\alpha = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \quad (k \in Z).$


www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

**Đề 5** Cho hàm số : $y = f(x) = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - (m^2 - 1)$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số với $m = 0$.
2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị cắt Ox tại 3 điểm có hoành độ dương.

## *Giải*

$y = f(x) = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - (m^2 - 1)$

**1.** $m = 0$ thì $y = x^3 - 3x + 1$

$D = R$

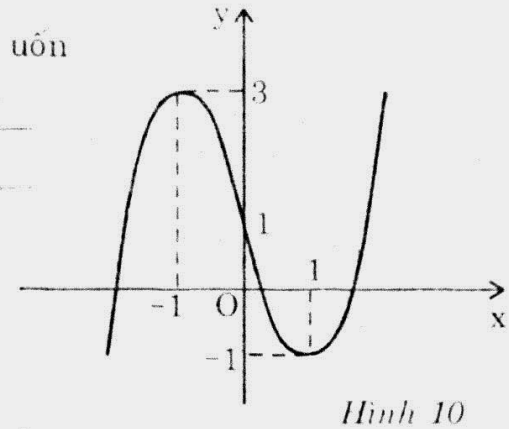
$y' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

$y'' = 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow I(0; 1)$ là điểm uốn

| x | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | 0 | − | 0 | + | |
| y | $-\infty$ | ↗ | 3 | ↘ | $-1$ | ↗ | $+\infty$ |

$f(0) = 1$

Đồ thị (hình 10).




*Hình 10*

**2.** $y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1) = 3(x^2 - 2mx + m^2 - 1)$

Đồ thị cắt Ox tại 3 điểm có hoành độ dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y' \text{ có hai nghiệm phân biệt } x_1,\ x_2 \\ f(x_1).f(x_2) < 0 \\ f(0) < 0 \qquad (0 < x_1 < x_2) \end{cases} \qquad (I)$$

Cần thêm điều kiện cho $x_1$, $x_2$ là : $\dfrac{S}{2} > 0 \Leftrightarrow m > 0$

Vì $f(x) = \dfrac{y'}{3}(x - m) - 2x + (m - 1)^2(m + 1)$, nên :

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 1 > 0 \\ f(0) = -(m^2 - 1) < 0 \\ f(x_1).f(x_2) = [-2x_1 + (m-1)^2(m+1)][-2x_2 + (m-1)^2(m+1)] < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 > 1 \\ f(x_1).f(x_2) = [-2(m+1) + (m-1)^2(m+1)][-2(m-1) + (m-1)^2(m+1)] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 > 1 \\ (m+1)[(m-1)^2 - 2](m-1)(m^2 - 1 - 2) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 > 1 \\ (m^2 - 1)(m^2 - 3)(m^2 - 2m - 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{3} < m < 1 + \sqrt{2}.$$

www.sethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

# 2- HÀM BẬC BỐN TRÙNG PHƯƠNG

$$\boxed{y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c \quad (a \neq 0)}$$

## I- NHỮNG VẤN ĐỀ CƠ BẢN

**1. *Miền xác định :*** $D = R$

**2. *Đạo hàm :***

* $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$

$$y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = \dfrac{-b}{2a} \end{array}\right.$$

$ab \geq 0$ : *Hàm số có 1 cực trị* $x_0 = 0$

$ab \leq 0$ : *Hàm số có 3 cực trị* $x_0 = 0, \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{\dfrac{-b}{2a}}$

* $y'' = 12ax^2 + 2b$

$$y'' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{-b}{6a}$$

$ab \geq 0$ : *Hàm số không có điểm uốn*

$ab < 0$ : *Hàm số có 2 điểm uốn*

**3. *Giới hạn :***

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \left[\begin{array}{ll} +\infty & (a > 0) \\ -\infty & (a < 0) \end{array}\right.$$

**4. *Bảng biến thiên :***

| $a > 0$ | $b < 0$ |
|---|---|

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $0$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $CT$ | $\nearrow$ | $CĐ$ | $\searrow$ | $CT$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

| $a > 0$ | $b \geq 0$ |
|---|---|

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $CT$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |



www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

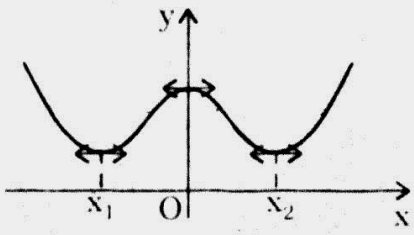
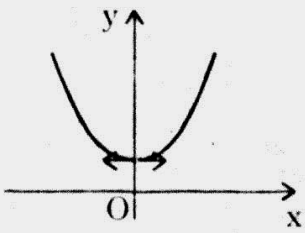
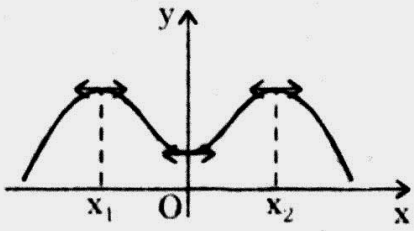
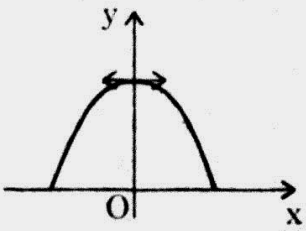
| $a < 0$ | $b > 0$ |
|---|---|

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $0$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | CĐ | $\searrow$ | CT | $\nearrow$ | CĐ | $\searrow$ | $-\infty$ |

| $a < 0$ | $b \le 0$ |
|---|---|

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | CĐ | $\searrow$ | $-\infty$ |

**5. Đồ thị :** *Luôn nhận Oy là trục đối xứng (h : 11, 12, 13, 14)*

| | $ab < 0$ | $ab \ge 0$ |
|---|---|---|
| $a > 0$ |   *Hình 11* |   *Hình 12* |
| $a < 0$ |   *Hình 13* |   *Hình 14* |

## II- BÀI TOÁN MINH HỌA

**Đề 6** Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số :

**1.** $y = f(x) = 2x^2 - x^4$ **2.** $y = f(x) = x^4 - 4x^2 + 1$

**3.** $y = f(x) = x^4 - x^2 - 2$ .

### *Giải*

**1.** $y = 2x^2 - x^4$

$D = R$

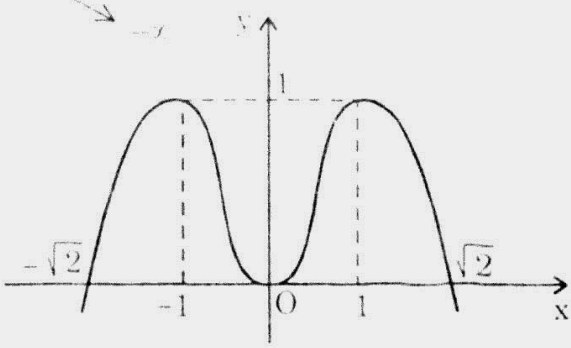
$y' = -4x^3 + 4x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee x = \pm 1$

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

| x | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | 0 | − | 0 | + | 0 | − | |
| y | $-\infty$ | ↗ | 1 | ↘ | 0 | ↗ | 1 | ↘ | $-\infty$ |

$y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm\sqrt{2}$

Đồ thị (hình 15).




*Hình 15*

**2.** $y = x^4 - 4x^2 + 1$

$D = R$

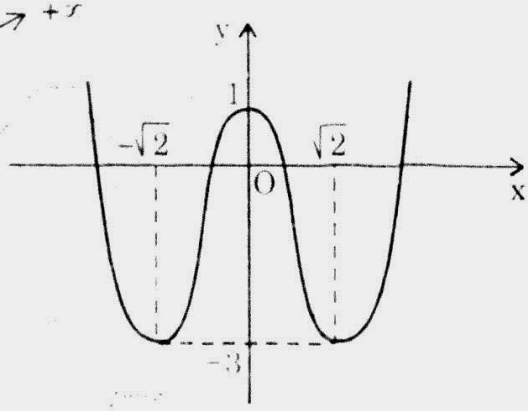
$y' = 4x^3 - 8x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm\sqrt{2}$

| x | $-\infty$ | | $-\sqrt{2}$ | | $0$ | | $\sqrt{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | − | 0 | + | 0 | − | 0 | + | |
| y | $+\infty$ | ↘ | $-3$ | ↗ | 1 | ↘ | $-3$ | ↗ | $+\infty$ |

$x = 0 \Rightarrow y = 1$

$x = 1 \Rightarrow y = -2$

Đồ thị (hình 16).




*Hình 16*

**3.** $y = x^4 + x^2 - 2$

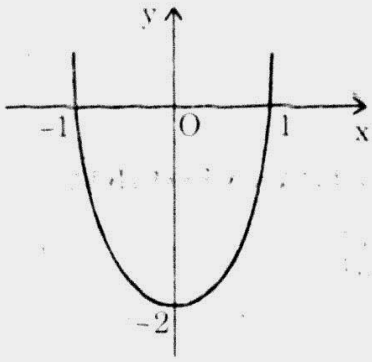
$D = R$

$y' = 4x^3 + 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

| x | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y' | | − | 0 | + | |
| y | $+\infty$ | ↘ | $-2$ | ↗ | $+\infty$ |

$y = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Đồ thị (hình 17).




*Hình 17*

**Đề 7** Cho hàm số : $y = f(x) = x^4 + 2(m - 2)x^2 + m^2 - 5m + 5$ $(C_m)$.

**1.** Khảo sát và vẽ đồ thị $(C_1)$ của hàm số khi $m = 1$.

**2.** Tìm m để $(C_m)$ cắt Ox tại 4 điểm phân biệt.

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

*Giải*

$y = x^4 + 2(m-2)x^2 + m^2 - 5m + 5 \quad (C_m)$

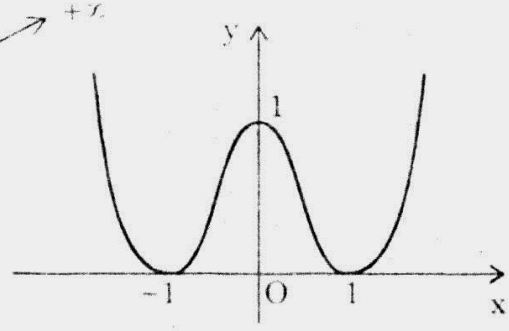
1. $m = 1$ thì $y = x^4 - 2x^2 + 1 \quad (C_1)$

$D = R$

$y' = 4x^3 - 4x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee x = \pm 1$

| x | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | | 0 | + | 0 | − | 0 | + | |
| y | $+\infty$ | ↘ | 0 | ↗ | 1 | ↘ | 0 | ↗ | $+\infty$ |

Đồ thị (hình 18).




*Hình 18*

2. $(C_m)$ cắt Ox tại 4 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ $y = 0$ có 4 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ $g(t) = t^2 + 2(m-2)t + m^2 - 5m + 5 = 0$

có hai nghiệm dương phân biệt (với $t = x^2$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m - 1 > 0 \\ g(0) = m^2 - 5m + 5 > 0 \\ 0 < 2 - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < m < 2 \\ m > \dfrac{5+\sqrt{5}}{2} \vee m < \dfrac{5-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 < m < \frac{5-\sqrt{5}}{2}.$$

**Đề 8** Cho hàm số : $y = f(x) = (1-m)x^4 - mx^2 + 2m - 1 \quad (C_m)$

**1.** Tìm m để hàm số có đúng một cực trị.

**2.** Tìm m để hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$.

**3.** Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số với giá trị m tìm được ở câu 2.

***Giải***

$y = (1-m)x^4 - mx^2 + 2m - 1 \quad (C_m)$

**1.** Hàm số có đúng một cực trị

$\Leftrightarrow$ $y' = 2x[2(1-m)x^2 - m] = 0$ có đúng một nghiệm

$\Leftrightarrow$ $2(1-m)x^2 - m = 0$ vô nghiệm hay có nghiệm $x = 0$ hay có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \quad m = 1 \quad \text{hay} \quad \begin{cases} m \neq 1 \\ m(1-m) < 0 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} m = 0 \\ 1 - m \neq 0 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} \dfrac{m}{2(1-m)} = 0 \\ 1 - m \neq 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ $m \leq 0$ hay $m \geq 1$.

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

**2.** $m \le 0$ hay $m \ge 1$ $\Rightarrow$ hàm số có đúng một cực trị tại $x = 0$ nên không thỏa bài toán.

Xét $0 < m < 1$, ta có bảng biến thiên sau :

| x | $-\infty$ | | $-\sqrt{x_0}$ | | 0 | | $\sqrt{x_0}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | − | 0 | + | 0 | − | 0 | + | |
| y | $+\infty$ | ↘ | | ↗ | | ↘ | | ↗ | $+\infty$ |

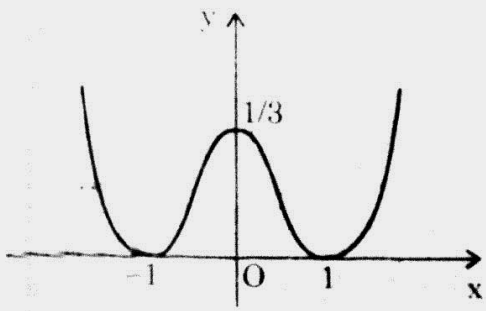
với $x_0 = \dfrac{m}{2(1-m)}$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ $\Leftrightarrow$ $x_0 = \dfrac{m}{2(1-m)} = 1$ $\Leftrightarrow$ $m = \dfrac{2}{3}$.

**3.** Với $m = \dfrac{2}{3}$, ta có bảng biến thiên sau :

| x | $-\infty$ | | $-1$ | | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | − | 0 | + | 0 | − | 0 | + | |
| y | $+\infty$ | ↘ | 0 | ↗ | $\frac{1}{3}$ | ↘ | 0 | ↗ | $+\infty$ |

Đồ thị (hình 19).




*Hình 19*

**Đề 9** Cho hàm số : $y = f(x) = x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 1$.

**1.** Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = -2$.

**2.** Xác định các giá trị của m sao cho đồ thị của hàm số cắt Ox tại 4 điểm có hoành độ tương ứng lập thành một cấp số cộng.

***Giải***

$$y = x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 1$$

**1.** $m = -2$ $\Rightarrow$ $y = x^4 + 2x^2 - 3$

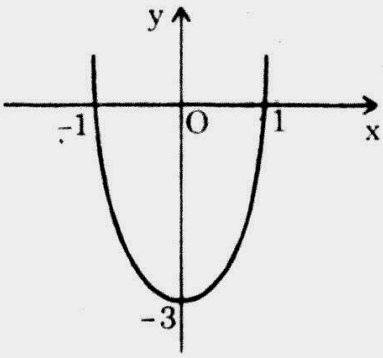
$D = \mathbb{R}$

$y' = 4x^3 + 4x = 0$ $\Leftrightarrow$ $x = 0$



www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

| x | $-\infty$ | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y' | | − | 0 | + | |
| y | $+\infty$ | ↘ | $-3$ | ↗ | $+\infty$ |




*Hình 20*

$y = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Đồ thị (hình 20).

**2.** Đồ thị cắt Ox tại 4 điểm lập thành cấp số cộng

$\Leftrightarrow t^2 - 2(m+1)t + 2m + 1 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt dương

$0 < t_1 < t_2$ thỏa mãn $\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} = 2\sqrt{t_1}$

$-\sqrt{t_2}$ $-\sqrt{t_1}$ 0 $\sqrt{t_2}$ $-\sqrt{t_1}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 > 0 \\ 2m + 1 > 0 \\ 0 < m + 1 \\ t_2 = 9t_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > -\dfrac{1}{2} \\ 2m + 1 = 9 \text{ hoặc } 2m + 1 = \dfrac{1}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 4 \\ m = -\dfrac{4}{9} \end{array}\right.$$

**Đề 10** Cho hàm số : $y = f(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x - 1$.

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số.

**2.** Chứng minh rằng đồ thị có một trục đối xứng.

**3.** Xác định giao điểm của đồ thị với Ox.

***Giải***

$y = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x - 1$

**1.** $D = R$

$y' = 4(x^3 - 3x^2 - x + 3)$

$y' = (x - 1)(x^2 - 2x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1,\ x = 3$

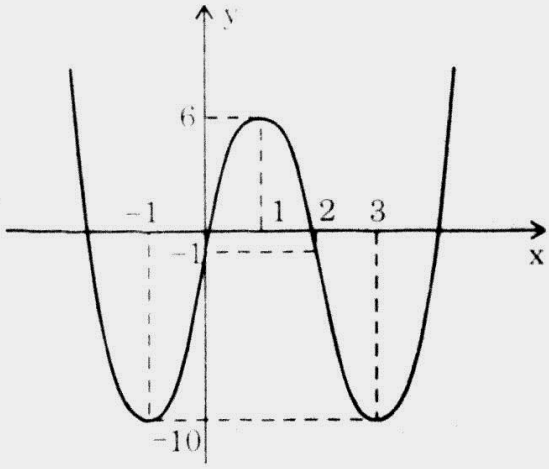
| x | $-\infty$ | | $-1$ | | 1 | | 3 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | 0 | + | 0 | − | 0 | + | |
| y | $+\infty$ | ↘ | $-10$ | ↗ | 6 | ↘ | $-10$ | ↗ | $+\infty$ |

$x = 0 \Rightarrow y = -1$

Đồ thị (hình 21).



www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS




*Hình 21*

**2.** Chuyển trục $\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y \end{cases}$

$$y = Y = (X + x_0)^4 - 4(X + x_0)^3 - 2(X + x)^2 + 12(X + x_0) - 1$$

$$\Leftrightarrow \quad Y = X^4 + (4x_0 - 4)X^3 + (6x_0^2 - 12x_0 - 2)X^2 +$$

$$+ (4x_0^3 - 12x_0^2 - 4x_0 + 12)X + x_0^4 - 4x_0^3 - 2x_0^2 + 12x_0 - 1$$

Đường thẳng $x = x_0$ là trục đối xứng $\Leftrightarrow$ Y là hàm chẵn

$\Leftrightarrow$ Hệ số bậc lẻ của Y bằng 0

$\Leftrightarrow$ $x_0 = 1$

Vậy đồ thị chỉ có một trục đối xứng $x = 1$.

**3.** Đặt $x = X + 1$; $y = 0$

$$\Leftrightarrow \quad (X + 1)^4 - 4(X + 1)^3 - 2(X + 1)^2 + 12(X + 1) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad X^4 - 8X^2 + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad X = \pm\sqrt{48 \pm \sqrt{10}}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 1 \pm \sqrt{48 \pm \sqrt{10}}.$$



www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

# 3- HÀM NHẤT BIẾN

$$\boxed{y = f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \quad (c \neq 0)}$$

## I- NHỮNG VẤN ĐỀ CƠ BẢN

1. ***Miền xác định :*** $D = R \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$.

2. ***Đạo hàm :*** $f'(x) = \dfrac{ad - bc}{(cx + d)^2} = \dfrac{D}{(cx + d)^2}$.

   $D > 0$ : $f$ tăng trên $\forall (a, b) \in D$

   $D < 0$ : $f$ giảm trên $\forall (a, b) \in D$

   $D = 0$ : $f(x) = const \ \forall x \in D$.

3. ***Giới hạn :***

   $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \dfrac{a}{c}$ : *Tiệm cận ngang* $y = \dfrac{a}{c}$

   $\lim\limits_{x \to -d/c} f(x) = \infty$ : *Tiệm cận đứng* $x = -\dfrac{d}{c}$.

4. ***Bảng biến thiên :***

$\boxed{D > 0}$ *Đồng biến*

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{d}{c}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $+$ | ‖ | $+$ | |
| $f$ | $\frac{a}{c}$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $\frac{a}{c}$ |

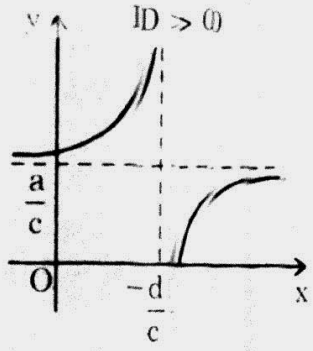
$\boxed{D < 0}$ *Nghịch biến*

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{d}{c}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $-$ | ‖ | $-$ | |
| $f$ | $\frac{a}{c}$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $\frac{a}{c}$ |

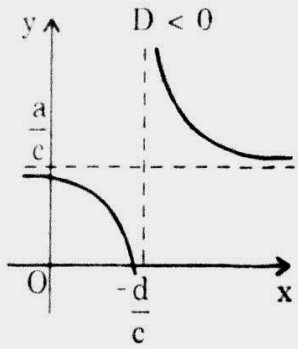
Facebook.com/TeacherSokPiseth www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

**5. Đồ thị :**

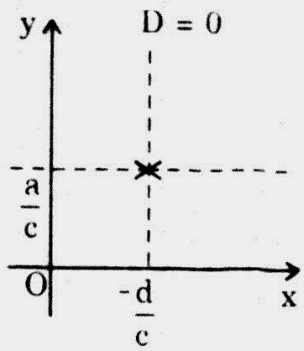
*Được gọi là một hyperbol vuông góc có tâm đối xứng* $I\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$ *là giao của hai tiệm cận.*




*Hình 22*




*Hình 23*




*Hình 24*

## II- BÀI TOÁN MINH HỌA

**Đề 11** Khảo sát và vẽ đồ thị các hàm số :

**1.** $y = \dfrac{3x+4}{x+2}$ **2.** $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ **3.** $y = \dfrac{2-x}{x+1}$.

***Giải***

**1.** $y = \dfrac{3x+4}{x+2}$

$D = R\backslash\{-2\}$

$y' = \dfrac{2}{(x+2)^2}$

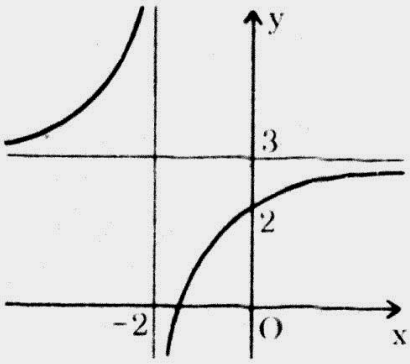
$\lim\limits_{x\to -2} y = \infty \Rightarrow$ đường thẳng $x = -2$ là tiệm cận đứng

$\lim\limits_{x\to \infty} y = 3 \Rightarrow$ đường thẳng $y = 3$ là tiệm cận ngang

| x | $-\infty$ | | $-2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | ‖ | + | |
| y | 3 | ↗ $+\infty$ | ‖ | $-\infty$ ↗ | 3 |

$x = 0 \Rightarrow y = 2$

Đồ thị (hình 25).




*Hình 25*

**2.** $y = \dfrac{x+1}{x-1}$

$D = R\backslash\{1\}$



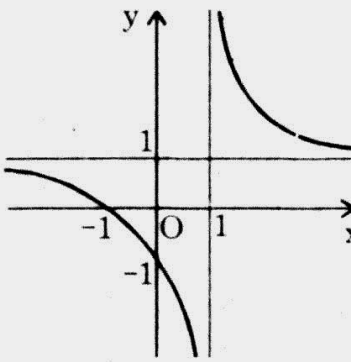
www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

$$y' = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

$\lim\limits_{x \to 1} y = \infty \quad \Rightarrow \quad$ x = 1 là tiệm cận đứng

$\lim\limits_{x \to \infty} y = 1 \quad \Rightarrow \quad$ y = 1 là tiệm cận ngang

| x | $-\infty$ | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y' | | − | ‖ | − | |
| y | 1 ↘ | $-\infty$ | ‖ | $+\infty$ ↘ | 1 |




*Hình 26*

$x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -1$

$x = -1 \quad \Rightarrow \quad y = 0$

Đồ thị (hình 26).

**3.** $y = \dfrac{2-x}{x+1}$

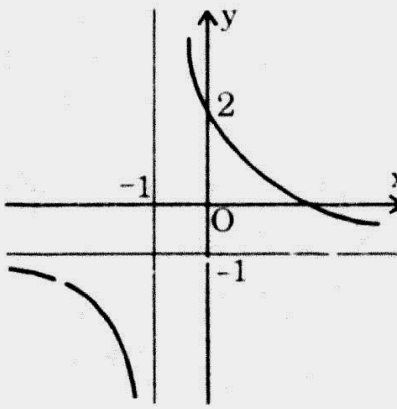
$D = R \setminus \{-1\}$

$$y' = \frac{-3}{(x+1)^2}$$

$\lim\limits_{x \to -1} y = \infty \quad \Rightarrow \quad$ x = −1 là tiệm cận đứng

$\lim\limits_{x \to \infty} y = -1 \quad \Rightarrow \quad$ y = −1 là tiệm cận ngang

| x | $-\infty$ | | −1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y' | | − | ‖ | − | |
| y | −1 ↘ | $-\infty$ | ‖ | $+\infty$ ↘ | −1 |




*Hình 27*

$x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 2$

$x = 2 \quad \Rightarrow \quad y = 0$

Đồ thị (hình 27).

**Đề 12** Cho hàm số : $y = f(x) = \dfrac{2x-4}{x-3}$.

**1.** Khảo sát và vẽ đồ thị (H) của hàm số.

**2.** Tìm tâm đối xứng của (H).

**3.** Lập phương trình tiếp tuyến với (H) tại giao điểm của (H) với trục hoành.

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

*Giải*

**1.** $y = \dfrac{2x-4}{x-3}$

$D = R\backslash\{3\}$

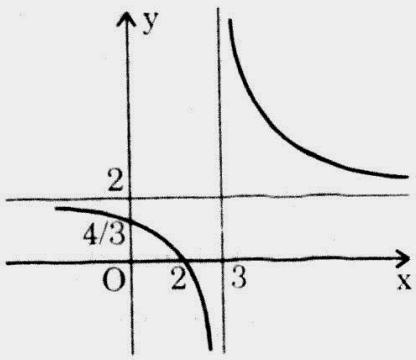
$y' = \dfrac{-2}{(x-3)^2}$

$\lim\limits_{x\to 3} y = \infty \quad \Rightarrow \quad x = 3$ là tiệm cận đứng

$\lim\limits_{x\to \infty} y = 2 \quad \Rightarrow \quad y = 2$ là tiệm cận ngang

| x | $-\infty$ | | 3 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y' | | − | ‖ | − | |
| y | 2 | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | 2 |

$x = 2 \Rightarrow y = 0$ ; $\quad x = 0 \Rightarrow y = \dfrac{4}{3}$




*Hình 28*

Đồ thị (hình 28).

**2.** Chuyển trục $\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$

Hàm y $\Leftrightarrow$ Hàm $Y = \dfrac{2(X + x_0) - 4}{X + x_0 - 3} - y_0$

$\Leftrightarrow \quad Y = \dfrac{(2 - y_0)X + 2x_0 - 4 - y_0x_0 + 3y_0}{X + x_0 - 3}$

$I(x_0, y_0)$ là tâm đối xứng của đồ thị $\Leftrightarrow$ Y là hàm lẻ

$\Leftrightarrow \quad -Y(X) = Y(-X)\ ;\ \forall X$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{AX + B}{X + D} = \dfrac{-AX + B}{-X + D} \quad \forall X \text{ (tương đương } 2AX^2 - 2BD = 0;\ \forall X) \\ A = 2 - y_0 \text{ và } B = 2x_0 - 4 - y_0x_0 + 3y_0 \\ D = x_0 - 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 - y_0 = 0 \\ BD = 0 = (x_0 - 3)(2x_0 - 4 - y_0x_0 + 3y_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 3 \\ y_0 = 2 \end{cases}$

**3.** $y = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow$ đồ thị cắt Ox tại M(2; 0)

Phương trình tiếp tuyến $\Delta$ : $y = y'(2)(x - 2) + y(2)$

$\Delta$ : $y = -2x + 4$.



www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

**Đề 13** Cho hàm số : $y = f(x) = \dfrac{mx - 1}{2x + m}$.

1. Chứng minh rằng $\forall m$ hàm số luôn luôn tăng trên mỗi khoảng mà nó xác định.
2. Xác định m để tiệm cận đứng của đồ thị qua $A\left(-1, \sqrt{2}\right)$.
3. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số khi m = 2.

***Giải***

**1.** $y = \dfrac{mx - 1}{2x + m}$ (H)

$D = R \setminus \left\{-\dfrac{m}{2}\right\}$

$y' = \dfrac{m^2 + 2}{(2x + m)^2} > 0 \qquad \forall x \in D \Rightarrow$ y luôn tăng trên D.

**2.** Để tiệm cận đứng của (H) qua $A\left(-1, \sqrt{2}\right)$ thì :

$$\begin{cases} -\dfrac{m}{2} = -1 \\ m\left(-\dfrac{m}{2}\right) - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad m = 2$$

**3.** $m = 2 \Rightarrow \quad y = \dfrac{2x - 1}{2x + 2}$

$D = R \setminus \{-1\}$

$y' = \dfrac{3}{2(x + 1)^2} > 0$

$\lim\limits_{x \to -1} y = \infty \Rightarrow$ x = −1 là tiệm cận đứng

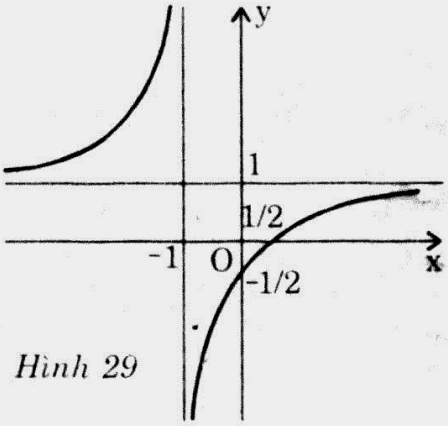
$\lim\limits_{x \to \infty} y = 1 \Rightarrow$ y = 1 là tiệm cận ngang

| x | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | ‖ | + | |
| y | 1 | ↗ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | 1 |

$x = 0 \Rightarrow \quad y = -\dfrac{1}{2}$

$x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \quad y = 0$

Đồ thị (hình 29).




*Hình 29*

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok-SPS

**Đề 14** Cho hàm số : $y = f(x) = \dfrac{3-x}{2x-1}$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (H) của hàm số.
2. Tìm những điểm trên (H) có tọa độ là các số nguyên.
3. Dùng đồ thị để giải bất phương trình : $\dfrac{3-x}{2x-1} < \dfrac{1}{2}(5x-1)$.

***Giải***

**1.** $y = \dfrac{3-x}{2x-1}$ (H)

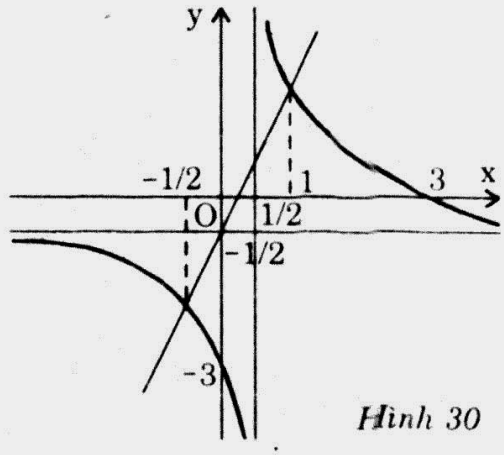
$D = R \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

$y' = \dfrac{-5}{(2x-1)^2} < 0;\ \forall x \in D$

$\lim\limits_{x \to 1/2} y = \infty \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$ là tiệm cận đứng

$\lim\limits_{x \to \infty} y = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow y = -\dfrac{1}{2}$ là tiệm cận ngang

| x | $-\infty$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y' | | $-$ | ‖ | $-$ | |
| y | $-\frac{1}{2}$ ↘ | $-\infty$ | ‖ | $+\infty$ ↘ | $-\frac{1}{2}$ |



*Hình 30*

$x = 3 \Rightarrow y = 0$; $\quad x = 0 \Rightarrow y = -3$

Đồ thị (hình 30).

**2.** $y = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{2(2x-1)}$ (H)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M(x, y) \in (H) \\ x, y \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in Z \\ -\dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{2(2x-1)} \in Z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in Z \\ \left[\begin{array}{l} 2x-1 = \pm 1 \\ 2x-1 = \pm 5 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{-2; 0; 1; 3\}$$

Ta có : $\{M_1(-2; -1), M_2(1; 2), M_3(0; -3), M_4(3; 0)\} \subset (H)$.

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

**3.** $\Delta$ : $y = \frac{1}{2}(5x - 1)$; (H) : $y = \frac{3 - x}{2x - 1}$

$$\frac{3 - x}{2x - 1} = \frac{1}{2}(5x - 1) \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \quad \text{hay} \quad x = -\frac{1}{2}$$

Vậy $\Delta$ cắt (H) tại $A\left(-\frac{1}{2}, -\frac{7}{4}\right)$ và $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

Theo đồ thị ta có :

$$\frac{3 - x}{2x - 1} < \frac{1}{2}(5x - 1) \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \quad \text{hay} \quad x > 1.$$

**Đề 15** Cho hàm số : $y = f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ $(c \neq 0)$

**1.** Xác định a, b, c, d biết rằng đồ thị của hàm số có tâm đối xứng I(2; 2) và đi qua điểm $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

**2.** Khảo sát và vẽ đồ thị (H) của hàm số.

**3.** Tiếp tuyến với đồ thị tại điểm M bất kì cắt tiệm cận tại P, Q. Chứng minh rằng MP = MQ.

***Giải***

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \quad (c \neq 0)$$

**1.** Đồ thị hàm số có tâm đối xứng I(2; 2) và qua $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$

$$\begin{cases} -\frac{d}{c} = 2 \\ \frac{a}{c} = 2 \\ \frac{b}{d} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = -2c \\ a = 2c \\ b = -c \end{cases} \qquad a\left(-\frac{d}{c}\right) + b \neq 0$$

Vậy $y = \frac{2x - 1}{x - 2}$ (H).

**2.** $D = R\backslash\{2\}$

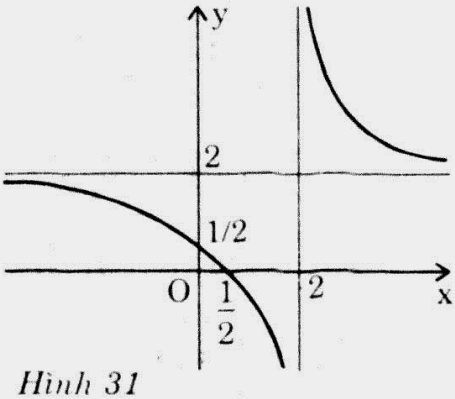
$$y' = \frac{-3}{(x - 2)^2} < 0; \quad \forall x \in D$$

$\lim\limits_{x \to 2} y = \infty \quad \Rightarrow \quad$ x = 2 là tiệm cận đứng

$\lim\limits_{x \to \infty} y = 2 \quad \Rightarrow \quad$ y = 2 là tiệm cận ngang

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

| x | $-\infty$ | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y' | | $-$ | ‖ | $-$ | |
| y | 2 ↘ | $-\infty$ | ‖ | $+\infty$ ↘ | 2 |



*Hình 31*

$x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}$

$x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad y = 0$

Đồ thị (hình 31).

**3.** Phương trình tiếp tuyến tại điểm M có hoành độ $x_o$ là :

$$(T) : y = \frac{-3}{(x_o - 2)^2}(x - x_o) + \frac{2x_o - 1}{x_o - 2}$$

(T) cắt tiệm cận đứng và ngang lần lượt tại

$$P \begin{cases} x_P = 2 \\ y_P = \dfrac{-3(2 - x_o)}{(x_o - 2)^2} + \dfrac{2x_o - 1}{x_o - 2} = \dfrac{2x_o + 2}{x_o - 2} \end{cases}; \qquad Q(x_Q; 2)$$

$$y_P + y_Q = \frac{2x_o + 2}{x_o - 2} + 2 = 2.\frac{2x_o - 1}{x_o - 2} = 2y_o \quad (y_o \text{ là tung độ của M})$$

M, P, Q $\in$ (T) nên M là trung điểm PQ $\Rightarrow$ MP = MQ.

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

# 4- HÀM HỮU TỈ BẬC 2/1 (Hyperbol xiên)

$$\boxed{y = f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}}$$

$$\boxed{y = f(x) = Ax + B + \frac{C}{dx + e} \quad (A, C, d \neq 0)}$$

## I- NHỮNG VẤN ĐỀ CƠ BẢN

### 1. *Miền xác định*

$$D = R \setminus \left\{ -\frac{e}{d} \right\}$$

### 2. *Đạo hàm*

$$f'(x) = \frac{A(dx + e)^2 - Cd}{(dx + e)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad (dx + e)^2 = \frac{Cd}{A}$$

$ACd < 0$ : *Hàm số không có cực trị*

$ACd > 0$ : *Hàm số có hai cực trị tại* $x_1, x_2$

### 3. *Giới hạn*

$\lim\limits_{x \to -\frac{e}{d}} f(x) = \infty$ : *Tiệm cận đứng* $x = -\frac{e}{d}$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) - (Ax + B) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{C}{dx + e} = 0$ : *Tiệm cận xiên* $y = Ax + B$

### 4. *Bảng biến thiên*

| $A > 0$ | $ACd > 0$ | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $-\frac{e}{d}$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
| $f'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | $-\infty$ | ↗ | CĐ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | CT | ↗ | $+\infty$ |

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

| $A > 0$ | $ACd < 0$ |
|---|---|

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{e}{d}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $+$ | ‖ | $+$ | |
| $f$ | $-\infty$ ↗ | | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

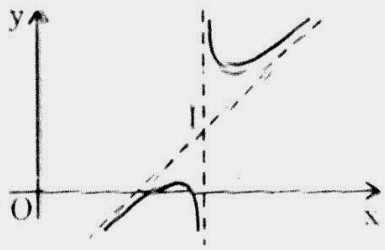
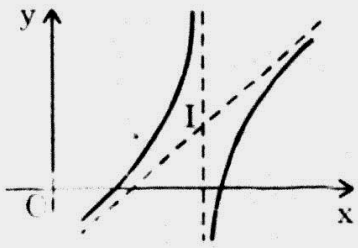
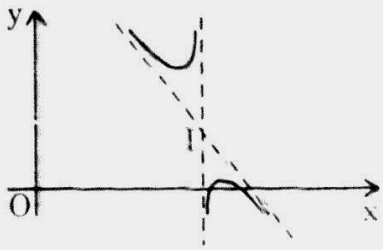
| $A < 0$ | $ACd > 0$ |
|---|---|

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $-\frac{e}{d}$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | $+\infty$ | ↘ | $CT$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $CĐ$ | ↘ | $-\infty$ |

| $A < 0$ | $ACd < 0$ |
|---|---|

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{e}{d}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $-$ | ‖ | $-$ | |
| $f$ | $+\infty$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $-\infty$ |

**5. Đồ thị :** *là một hyperbol xiên nhận giao điểm của hai tiệm cận làm tâm đối xứng (h.32, 33, 34, 35).*

| | $ACd < 0$ | $ACd < 0$ |
|---|---|---|
| $a > 0$ |   *Hình 32* |   *Hình 33* |
| $a < 0$ |   *Hình 34* | *Hình 35* |

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

## II- BÀI TOÁN MINH HỌA

**Đề 16** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số :

**1.** $y = f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$ **2.** $y = f(x) = 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{1-x}$

**3.** $y = \dfrac{x^2 + x - 2}{x+1}$ **4.** $y = 1 - x + \dfrac{1}{x-2}$.

### *Giải*

**1.** $y = \dfrac{x^2}{x+1} \Leftrightarrow y = x - 1 + \dfrac{1}{x+1}$

$D = R \setminus \{-1\}$

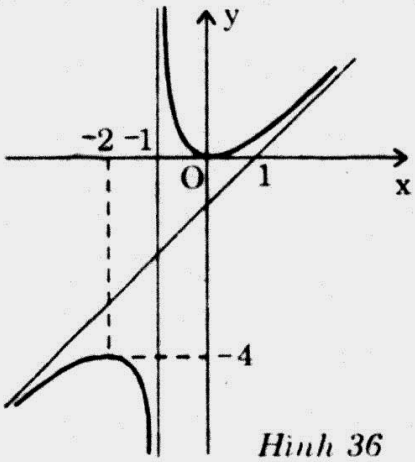
$y' = \dfrac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right.$

$\lim\limits_{x \to -1} y = \infty \Rightarrow$ x = –1 là tiệm cận đứng

$\lim\limits_{x \to \infty} [y - (x - 1)] = 0 \Rightarrow$ y = x – 1 là tiệm cận xiên

| x | $-\infty$ | | –2 | | –1 | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | 0 | – | ‖ | – | 0 | + | |
| y | $-\infty$ | ↗ | –4 | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | 0 | ↗ | $+\infty$ |

Đồ thị (hình 36).




*Hình 36*

**2.** $y = 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{1-x}$

$D = R \setminus \{1\}$

$y' = \dfrac{-x^2 + 2x + 3}{2(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right.$

$\lim\limits_{x \to 1} y = \infty \Rightarrow$ x = 1 là tiệm cận ngang

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

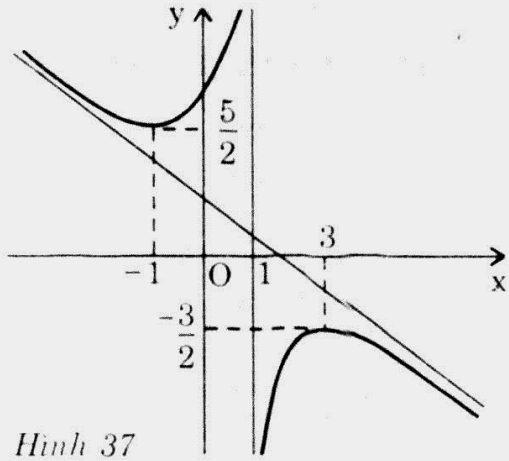
$\lim\limits_{x \to \infty}\left[y - \left(1 - \frac{x}{2}\right)\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{2}x + 1$ là tiệm cận xiên

| x | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| y | $+\infty$ | ↘ | $\frac{5}{2}$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $-\frac{3}{2}$ | ↘ | $-\infty$ |

$x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 3$

$x = -1 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{5}{2}$

Đồ thị (hình 37).



*Hình 37*

**3.** $y = \frac{x^2 + x - 2}{x + 1} = x - \frac{2}{x + 1}$

$D = R \setminus \{-1\}$

$y' = \frac{x^2 + 2x + 3}{(x + 1)^2} > 0 \quad \forall x \in D$

$\lim\limits_{x \to -1} y = \infty \quad \Rightarrow \quad x = -1$ là tiệm cận ngang

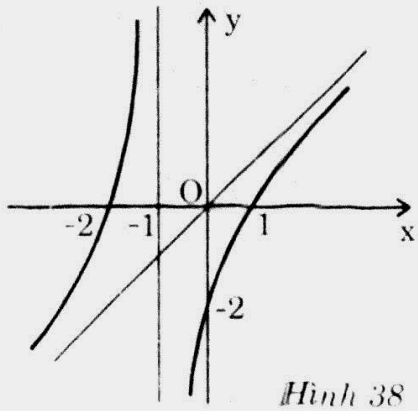
$\lim\limits_{x \to \infty}(y - x) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = x$ là tiệm cận xiên

| x | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y' | | $+$ | ‖ | $+$ | |
| y | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

$x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -2$

$x = 1 \vee x = -2 \quad \Rightarrow \quad y = 0$

Đồ thị (hình 38).



*Hình 38*

**Đề 17** Cho hàm số : $y = f(x) = \frac{2x^2 + (6 - m)x + 4}{mx + 2}$

**1.** Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số đi qua điểm A(–1; 1).

**2.** Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi m = 1.

**3.** Chứng minh rằng (C) có một tâm đối xứng.


www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

## *Giải*

$$y = \frac{2x^2 + (6 - m)x + 4}{mx + 2}$$

**1.** Đồ thị hàm số qua A(–1; 1) $\Rightarrow$ $1 = \dfrac{2 + m - 6 + 4}{-m + 2}$ $\Rightarrow$ $m = 1$

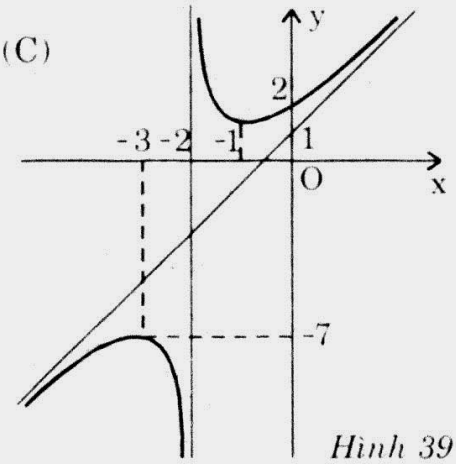
**2.** $m = 1 \Rightarrow y = \dfrac{2x^2 + 5x + 4}{x + 2} = 2x + 1 + \dfrac{2}{x + 2}$ (C)

$D = R \setminus \{-2\}$

$y' = \dfrac{2(x^2 + 4x + 3)}{(x + 2)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = -1 \end{array}\right.$

$x = -2$ là tiệm cận đứng

$y = 2x + 1$ là tiệm cận xiên




*Hình 39*

| x | $-\infty$ | | $-3$ | | $-2$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | 0 | – | ‖ | – | 0 | + | |
| y | $-\infty$ | ↗ | $-7$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | 1 | ↗ | $+\infty$ |

$x = 0 \Rightarrow y = 2$

Đồ thị (hình 39).

**3.** Chuyển trục $\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$

Hàm y $\Leftrightarrow$ hàm $Y = 2(X + x_0) + 1 + \dfrac{2}{X + x_0 + 2} - y_0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Y = 2X + A + \dfrac{2}{X + B} \\ A = 2x_0 + 1 - y_0 \\ B = 2 + x_0 \end{cases}$$

$I(x_0; y_0)$ là tâm đối xứng của (C) $\Leftrightarrow$ Y là hàm chẵn

$\Leftrightarrow Y(X) = Y(-X) \quad \forall X$

$\Leftrightarrow 2X + A + \dfrac{2}{X + B} = -2X + A + \dfrac{2}{-X + B}$

$\Leftrightarrow \dfrac{2A(B^2 - X^2) + 4B}{B^2 - X^2} = 0, \ \forall X$



www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ 2AB^2 + 4B = 0 \end{cases} \qquad \text{Vậy} \begin{cases} x_o = -2 \\ y_o = -3. \end{cases}$$

**Đề 18** Cho hàm số : $y = f(x) = \dfrac{x^2 + mx - 1}{x - 1}$

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số với m = 1.

**2.** Tìm m để hàm số :

**a)** Đồng biến trong $(-\infty; 1)$ và trong $(1; +\infty)$.

**b)** Đồng biến trong $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

**3.** Tìm m để đường y = m cắt đồ thị hàm số tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho OA vuông góc với OB.

***Giải***

$$y = \frac{x^2 + mx - 1}{x - 1}$$

**1.** m = 1 $\Rightarrow$ $y = \dfrac{x^2 + x - 1}{x - 1} = x + 2 + \dfrac{1}{x - 1}$

$D = R \setminus \{1\}$

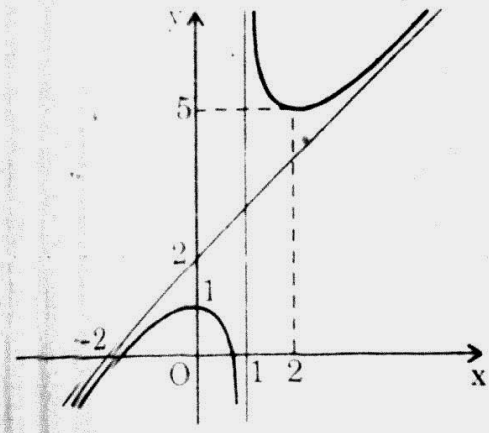
$y' = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee x = 2$

$y = x + 2$ là tiệm cận xiên

$x = 1$ là tiệm cận đứng

| x | $-\infty$ | | 0 | | 1 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | 0 | − | ‖ | − | 0 | + | |
| y | $-\infty$ | ↗ | 1 | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | 5 | ↗ | $+\infty$ |

**Đồ thị (hình 40).**




*Hình 40*



www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

**2. a)** $y' = \dfrac{x^2 - 2x - m + 1}{(x-1)^2}$

y đồng biến trong $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - m + 1 \geq 0 \quad \forall x \\ 1 + m - 1 \neq 0 \text{ (hàm y không suy biến)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m \leq 0 \\ m \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad m < 0$$

**b)** y đồng biến trong $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{y đồng biến trong từng khoảng xác định} \\ \lim\limits_{x \to 1^-} y \leq \lim\limits_{x \to 1^+} y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + mx - 1}{x - 1} \leq \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2 + mx - 1}{x - 1} \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ +\infty \leq -\infty \end{cases}$$

$\Rightarrow$ không tồn tại m thỏa mãn bài toán

(vì $g(1) = m < 0 \Rightarrow$ khi $x \to 1$, $g(x) = x^2 + mx - 1 < 0$).

**3.** (d) : $y = m$,

(d) và $(C_m)$ có phương trình hoành độ giao điểm : $\dfrac{x^2 + mx - 1}{x - 1} = m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + mx - 1 = m(x - 1) \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 - m \\ x \neq 1 \end{cases} \quad \text{(I)}$$

(d) và $(C_m)$ cắt nhau tại 2 điểm $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ phân biệt thỏa mãn $OA \perp OB$

$\Leftrightarrow$ (I) có 2 nghiệm $x_A$, $x_B$ phân biệt và thỏa mãn $x_A.x_B + y_A.y_B = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \text{ và } m \neq 0 \\ x_A.x_B + \left(\dfrac{x_A^2 + mx_A - 1}{x_A - 1}\right)\left(\dfrac{x_B^2 + mx_B - 1}{x_B - 1}\right) = 0 \\ x_A \text{ và } x_B \text{ là nghiệm của } x^2 = 1 - m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \text{ và } m \neq 0 \\ m - 1 + \dfrac{1 - m + m\sqrt{1-m} - 1}{\sqrt{1-m} - 1} \times \dfrac{1 - m - m\sqrt{1-m} - 1}{-\sqrt{1-m} - 1} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \text{ và } m \neq 0 \\ m^2 + m - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

**Đề 19** Cho hàm số : $y = f(x) = \dfrac{2x^2 + (m+1)x - 3}{x + m}$

1. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số khi m = 2.
2. Tìm trên đồ thị tất cả các điểm mà tọa độ là các số nguyên.
3. Với giá trị nào của m thì đồ thị của hàm số không phải là một hyperbol.

*Giải*

**1.** $y = \dfrac{2x^2 + (m+1)x - 3}{x + m}$

m = 2 thì : $y = \dfrac{2x^2 + 3x - 3}{x + 2} = 2x - 1 - \dfrac{1}{x+2}$ (C)

$D = R \setminus \{-2\}$

$y' = 2 + \dfrac{1}{(x+2)^2} > 0 \ \forall x \in D$

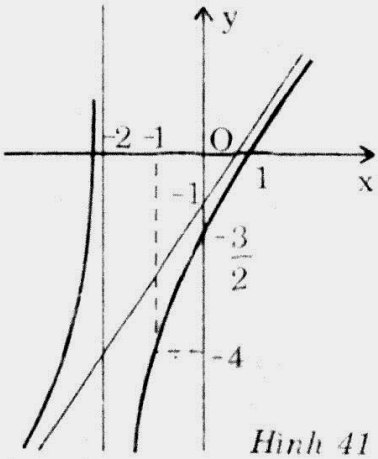
$x = -2$ là tiệm cận đứng

$y = 2x - 1$ là tiệm cận ngang

| x | $-\infty$ | | $-2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | ‖ | + | |
| y | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

- $x = 0 \Rightarrow y = -\dfrac{3}{2}$
- $x = -1 \Rightarrow y = -4$

Đồ thị (hình 41).



*Hình 41*

**2.** $M(x_0; y_0) \in (C)$ có $x_0, y_0 \in Z$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \in Z \\ 2x_0 - 1 - \dfrac{1}{x_0 + 2} \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = -4 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x_0 = -3 \\ y_0 = -6 \end{cases}$

**3.** Đồ thị không là hyperbol

$\Leftrightarrow$ Nghiệm tử trùng với nghiệm mẫu (hàm suy biến)

$\Leftrightarrow 2m^2 + (m+1)(-m) - 3 = 0$

$\Leftrightarrow m^2 - m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$.


www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

**Đề 20** Cho hàm số : $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 2mx + 3m^2}{x - 2m}$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số với $m = -1$.
2. Xác định m để hàm số luôn đồng biến trên các khoảng mà nó xác định.
3. Xác định m để hàm số đồng biến trên khoảng $1 < x < +\infty$.

## *Giải*

**1.** $y = \dfrac{x^2 - 2mx + 3m^2}{x - 2m}$

$m = -1 \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{x^2 + 2x + 3}{x + 2} = x + \dfrac{3}{x + 2}$

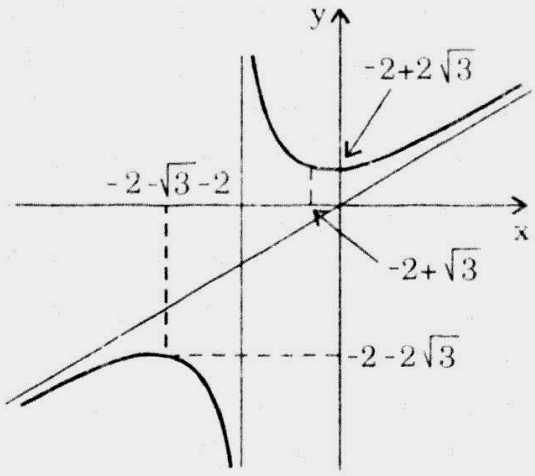
$D = R \setminus \{-2\}$

$y' = \dfrac{x^2 + 4x + 1}{(x + 2)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2 \pm \sqrt{3}$

- $x = -2$ là tiệm cận đứng
- $y = x$ là tiệm cận xiên

| x | $-\infty$ | | $-2-\sqrt{3}$ | | $-2$ | | $-2+\sqrt{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | 0 | − | ‖ | − | 0 | + | |
| y | $-\infty$ | ↗ | $-2-2\sqrt{3}$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $2+2\sqrt{3}$ | ↗ | $+\infty$ |

Đồ thị (hình 42).




*Hình 42*

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

**2.** $y' = \dfrac{x^2 - 4mx + m^2}{(x - 2m)^2}$

y đồng biến trên từng khoảng xác định

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2m)^2 - 2m(2m) + 3m^2 = 0 \text{ (hàm y không suy biến)} \\ \Delta' = 4m^2 - m^2 \le 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \ne 0 \\ m = 0 \end{cases}$$

Vậy hàm không tồn tại m thỏa mãn bài toán.

**3.** Đặt $g(x) = x^2 - 4mx + m^2$

f(x) đồng biến trên khoảng $(1, +\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \text{ có 2 nghiệm } x_1, x_2 \text{ thỏa mãn} \\ x_1 < x_2 < 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(1) > 0 \\ 2m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4m + 1 > 0 \\ 2m < 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 - \sqrt{3} \ \vee \ m > 2 + \sqrt{3} \\ m < \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m < 2 - \sqrt{3}.$$



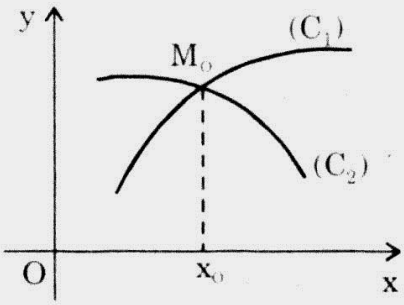
www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

# 5- VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA HAI ĐỒ THỊ

## I- NHỮNG VẤN ĐỀ CƠ BẢN

*Cho hai đồ thị* $(C_1) : y = f(x)$

$(C_2) : y = g(x)$




*Hình 43*

1. ***Số giao điểm của $(C_1)$ và $(C_2)$*** *chính là số nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm của $(C_1)$ và $(C_2)$ :*

$$f(x) = g(x) \qquad (1)$$

2. ***Các trường hợp :***

*(1) vô nghiệm* $\Leftrightarrow$ *$(C_1)$ và $(C_2)$ không có nghiệm chung*

*(1) có n nghiệm* $\Leftrightarrow$ *$(C_1)$ và $(C_2)$ có n điểm chung*

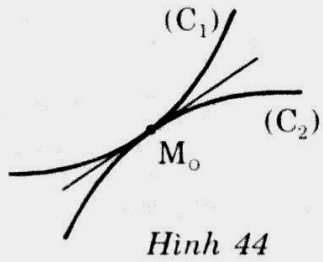
*(1) có nghiệm đơn $x_o$* $\Leftrightarrow$ *$(C_1)$ cắt $(C_2)$ tại $M_o(x_o, y_o)$*

*(1) có nghiệm kép $x_o$* $\Leftrightarrow$ *$(C_1)$ tiếp xúc $(C_2)$ tại $M_o(x_o, y_o)$*

3. ***Điều kiện tiếp xúc :***

***Cách 1 :***

*$(C_1)$ tiếp xúc với $(C_2)$* $\Leftrightarrow$ *phương trình $f(x) = g(x)$ có nghiệm kép*




*Hình 44*

***Cách 2 :***

*$(C_1)$ tiếp xúc với $(C_2)$* $\Leftrightarrow$ *hệ phương trình có nghiệm*

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x). \end{cases}$$

## II- BÀI TOÁN MINH HỌA

**Đề 21** Cho hàm số : $y = f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2. Tiếp tuyến của (C) tại gốc tọa độ lại cắt (C) tại điểm A. Tính tọa độ của A.
3. Biện luận theo k vị trí tương đối của (C) với đường thẳng $y = kx$.

***Giải***

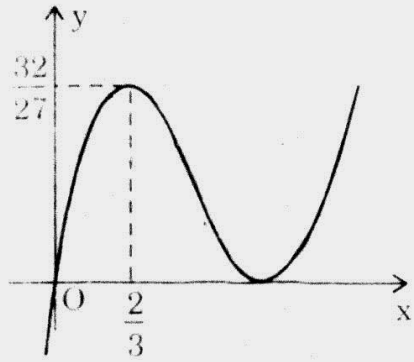
$y = x^3 - 4x^2 + 4x = f(x) \quad (C)$

1. $D = R$

$y' = 3x^2 - 8x + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \vee x = \dfrac{2}{3}$

Facebook.com/TeacherSokPiseth www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{2}{3}$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $\frac{32}{27}$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |




*Hình 45*

$y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$

Đồ thị (hình 45).

**2.** Tiếp tuyến tại O có phương trình $y = f'(0).x \Leftrightarrow y = 4x$ $(\Delta)$

Phương trình hoành độ giao điểm của $(\Delta)$ và (C) :

$$x^3 - 4x^2 + 4x = 4x \Leftrightarrow x = 0 \text{ hay } x = 4 ; \quad f(4) = 16$$

Vậy $(\Delta)$ cắt (C) tại A(4; 16)

**3.** (d) : $y = kx$ là đường thẳng qua O có hệ số góc k

Phương trình hoành độ giao điểm của $(\Delta)$ và (C) :

$$x^3 - 4x^2 + 4x = kx \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + (4 - k)x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 + 4x + 4 - k = 0$$

(d) tiếp xúc với (C)

$\Leftrightarrow$ $x^2 - 4x + 4 - k = 0$ có nghiệm $x = 0$ hay có nghiệm kép

$\Leftrightarrow$ $k = 4$ hay $k = 0$

- $k = 4 \vee k = 0$ : (d) tiếp xúc (C) tại O và cắt (C) tại một điểm.
- $\begin{cases} k > 0 \\ k \neq 4 \end{cases}$ (d) cắt (C) tại 3 điểm
- $k < 0$ : (d) cắt (C) tại 1 điểm là O.

**Đề 22** Cho hàm số : $y = f(x) = (4 - x)(x - 1)^2$.

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

**2.** Gọi I là giao điểm của (C) với Oy, d là đường thẳng qua I có hệ số góc m. Định m để d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt.

***Giải***

$y = (4 - x)(x - 1)^2 = -x^3 + 6x^2 - 9x + 4$ (C)

**1.** D = R

$y' = -3x^2 + 12x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$

$y'' = 3(-2x + 4) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Vậy S(2; 2) là điểm uốn.

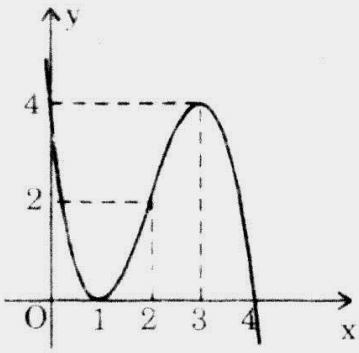
www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

| x | $-\infty$ | | 1 | | 3 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | − | 0 | + | 0 | − | |
| y | $+\infty$ | ↘ | 0 | ↗ | 4 | ↘ | $-\infty$ |

$x = 0 \Rightarrow y = 4$

$x = 4 \Rightarrow y = 0$

Đồ thị (hình 46).




*Hình 46*

**2.** Giao điểm (C) và Oy là I(0; 4)

Đường thẳng qua I hệ số góc m có phương trình (d) : $y = mx + 4$

(d) cắt (C) tại 3 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (C) :

$x^3 - 6x^2 + (9 + m)x = 0$ có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ $x^2 - 6x + 9 + m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác không

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -9 \\ \Delta' = 9 - (9 + m) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -9 \\ -m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -9 \\ m < 0 \end{cases}$$

**Đề 23** Cho hàm số : $y = f(x) = -x^4 + 2mx^2 - 2m + 1$ $(C_m)$.

**1.** Biện luận theo m số cực trị của hàm số f.

**2.** Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số với m = 5.

**3.** Xác định m sao cho $(C_m)$ tương ứng cắt trục hoành tại 4 điểm lập thành cấp số cộng. Xác định các cấp số này.

***Giải***

$y = -x^4 + 2mx^2 - 2m + 1$ $(C_m)$

**1.** $y' = -4x^3 + 4mx = 4x(-x^2 + m)$

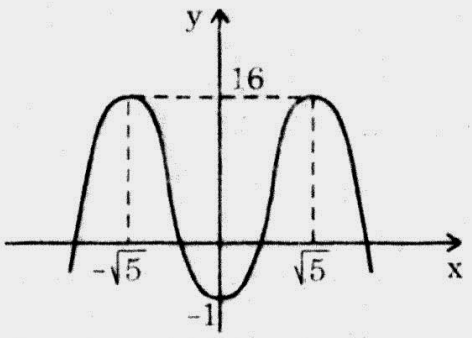
$m \leq 0 \Rightarrow$ y có 1 cực trị

$m > 0 \Rightarrow$ y có 3 cực trị

**2.** $m = 5 \Rightarrow y = -x^4 + 10x^2 - 9$

D = R

$y' = 4x(-x^2 + 5) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm\sqrt{5}$




*Hình 47*

| x | $-\infty$ | | $-\sqrt{5}$ | | 0 | | $+\sqrt{5}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | 0 | − | 0 | + | 0 | − | |
| y | $-\infty$ | ↗ | 16 | ↘ | −9 | ↗ | 16 | ↘ | $-\infty$ |

Đồ thị (hình 47).

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

**3.** $(C_m)$ cắt Ox tại 4 điểm lập thành cấp số cộng

$\Leftrightarrow$ $g(t) = -t^2 + 2mt - 2m + 1 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt dương

$0 < t_1 < t_2$ thỏa mãn $\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} = 2\sqrt{t_1}$




$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (m-1)^2 > 0 \\ g(0) = 1 - 2m < 0 \\ 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m > \dfrac{1}{2} \\ m = 5 \text{ hay } m = \dfrac{5}{9} \end{cases}$$

$2m - 1 = 9$ hay $1 = 9(2m - 1)$

- $m = 5 \div -3; -1; 1; 3$
- $m = 1 \div -1; -\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{3}; 1.$

**Đề 24** Cho hàm số : $y = f(x) = \dfrac{(m-1)x + m}{x - m}$ $(m \neq 0)$.

**1.** Chứng minh rằng khi m thay đổi thì $(H_m)$ của hàm số luôn tiếp xúc với nhau tại một điểm cố định.

**2.** Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số ứng với m = 2.

**3.** Chứng minh rằng $\forall b$ đường thẳng $\Delta : y = x + b$ luôn cắt (C) tại hai điểm thuộc hai nhánh phân biệt.

***Giải***

**1.** $y = \dfrac{(m-1)x + m}{x - m}$ $(H_m)$ $(m \neq 0)$

$y' = \dfrac{-m^2}{(x-m)^2}$

$M(x_o; y_o)$ là điểm cố định của đồ thị

$\Leftrightarrow$ $y_o = \dfrac{(m-1)x_o + m}{x_o - m}$ $\forall m$

$\Leftrightarrow$ $(x_o + 1 + y_o)m - (x_o + x_o y_o) = 0$ $\forall m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_o + 1 + y_o = 0 \\ x_o(1 + y_o) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_o = 0 \\ 1 + y_o = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_o = 0 \\ y_o = -1 \end{cases}$$

$y'(0) = -1 \Rightarrow$ các đồ thị $(H_m)$ luôn tiếp xúc tại $(0; -1)$.


www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

**2.** $m = 2 \Rightarrow \quad y = \dfrac{x+2}{x-2}$ (H)

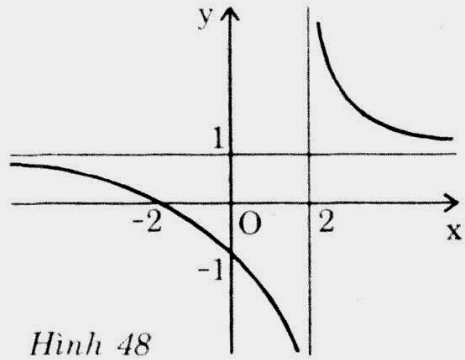
$D = R \setminus \{2\}$

$y' = \dfrac{-4}{(x-2)^2} < 0 \qquad \forall x \in D$

| x | $-\infty$ | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y' | | − | ‖ | − | |
| y | 2 ↘ | $-\infty$ | ‖ | $+\infty$ ↘ | 2 |

$x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -1$

$x = -2 \quad \Rightarrow \quad y = 0$



*Hình 48*

Đồ thị (hình 48).

**3.** $\Delta : y = x + b$

Phương trình hoành độ giao điểm của $\Delta$ và (H) : $x + b = \dfrac{x+2}{x-2}$

$\Leftrightarrow \quad g(x) = x^2 + (b-3)x - 2b - 2 = 0 \qquad (1)$

$g(2) = -4 < 0$

$\Rightarrow$ (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt $x_1 < 2 < x_2 \Rightarrow$ điều cần chứng minh.

**Đề 25** Cho hàm số : $y = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{1 - x}$.

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

**2.** Tìm trên (C) điểm cách đều các trục tọa độ.

**3.** Biện luận theo m vị trí tương đối của (C) và đường thẳng d: $y = 3x + m$.

**4.** Khi d tiếp xúc với (C) hãy xác định các tiếp điểm.

***Giải***

**1.** $y = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{1 - x} = -x + 2 + \dfrac{1}{1-x}$ (C)

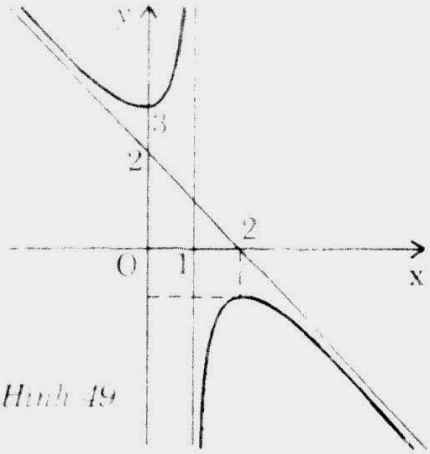
$D = R \setminus \{1\}$

$y' = \dfrac{-x^2 + 2x}{(1-x)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee x = 2$

| x | $-\infty$ | | 0 | | 1 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | − | 0 | + | ‖ | + | 0 | − | |
| y | $+\infty$ | ↘ | 3 | ↗ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $-1$ | ↘ | $-\infty$ |

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

Đồ thị (hình 49)




*Hình 49*

**2.** M(x; y) ∈ (C) cách đều Ox và Oy

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x^2 - 3x + 3}{1 - x} = x \qquad \text{hay} \qquad \frac{x^2 - 3x + 3}{1 - x} = -x$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \neq 1 \\ 2x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases} \qquad \text{hay} \qquad \begin{cases} x \neq 1 \\ 2x = 3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{3}{2}$$

**3.** d : y = 3x + m

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) : $3x + m = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{1 - x}$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \neq 1 \\ 4x^2 + (m - 6)x + 3 - m = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2 + (m - 6)x + 3 - m = 0 \qquad (1)$$

$\Delta = m^2 + 4m - 12$

- $m = -6 \vee m = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta = 0 \quad \Leftrightarrow$ (1) có nghiệm **kép**

  $\Leftrightarrow$ d tiếp xúc (C)

- $-6 < m < 2 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta < 0 \quad \Leftrightarrow$ (1) vô nghiệm

  $\Leftrightarrow$ d và (C) **không có điểm chung**

- $m > 2 \vee m < -6 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta > 0 \quad \Leftrightarrow$ (1) có hai **nghiệm phân biệt**

  $\Leftrightarrow$ d cắt (C) tại **hai điểm phân biệt**.

**4.** d tiếp xúc (C) $\Leftrightarrow$ m = −6 hay m = 2

m = −6 $\Rightarrow$ tiếp điểm có hoành độ $x = \dfrac{3}{2}$ **là nghiệm của** (1)

$\Rightarrow \quad M_1\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{3}{2}\right)$.

m = 2 $\Rightarrow$ tiếp điểm là $M_2\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{7}{2}\right)$ với $\dfrac{1}{2}$ **là nghiệm của** (1).



Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

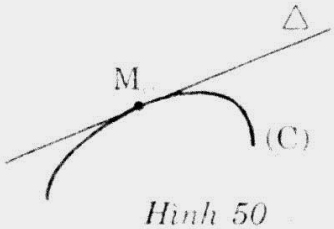
# 6- TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ

## I- NHỮNG VẤN ĐỀ CƠ BẢN

**1. *Phương trình tiếp tuyến với đồ thị :***

*(C) : y = f(x) tại điểm $M_0(x_0; y_0)$ là :*

$\Delta : y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ (1).



*Hình 50*

**2. *Để lập phương trình tiếp tuyến Δ với (C) khi biết hệ số góc K*** *(h.50)*

***Cách 1 :***

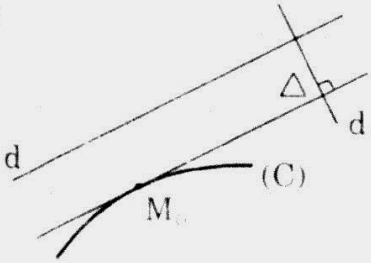
*Tìm tiếp điểm $M_0(x_0; y_0)$*

*Bằng phương trình $f'(x) = K$ rồi dùng công thức (1)*

***Cách 2 :***

*Δ có dạng $y = Kx + m$.*

*Tìm m bằng điều kiện nghiệm kép của phương trình : $f(x) = Kx + m$*



*Hình 51*

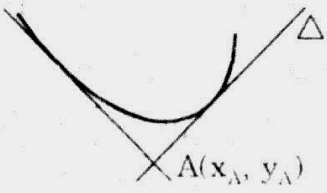
*Chú ý :* $\Delta // d \Leftrightarrow K_\Delta = K_d$

$\Delta \perp d \Leftrightarrow K_\Delta . K_d = -1$.

**3. *Để lập phương trình tiếp tuyến Δ với (C) biết Δ đi qua $A(x_A; y_A)$***

***Cách 1 :***

- *Gọi K là hệ số góc của Δ*
- *Phương trình $\Delta : y = g(x) = K(x - x_A) + y_A$*
- *Tìm K bằng điều kiện nghiệm kép của phương trình $f(x) = g(x)$*



*Hình 52*

***Cách 2 :***

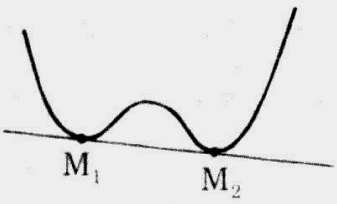
- *Gọi $M_0(x_0; y_0)$ là tiếp điểm*
- *Phương trình $\Delta : y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$*
- *Tìm $x_0$ bằng điều kiện Δ đi qua $A(x_A; y_A)$*

$$y_A - y_0 = f'(x_0)(x_A - x_0).$$

**4. *Để lập phương trình tiếp tuyến Δ tiếp xúc với (C) tại 2 điểm***

*Đặt $\Delta : y = ax + b$*

- *Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Δ : $f(x) = ax + b$ (1)*
- *Từ điều kiện (1) phải có 2 nghiệm kép $x_1$, $x_2$ ta tìm được a, b.*



*Hình 53*

Facebook.com/TeacherSokPiseth www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

## II- TOÁN MINH HỌA

**Đề 26** Cho hàm số : $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2. Viết phương trình tiếp tuyến tại điểm uốn của (C). Khảo sát vị trí tương đối của (C) với tiếp tuyến này.
3. Lập phương trình tiếp tuyến của (C) đi qua điểm A(0; 3).

*Giải*

$y = x^3 - 3x^2 + 2 = f(x)$ (C)

**1.** D = R

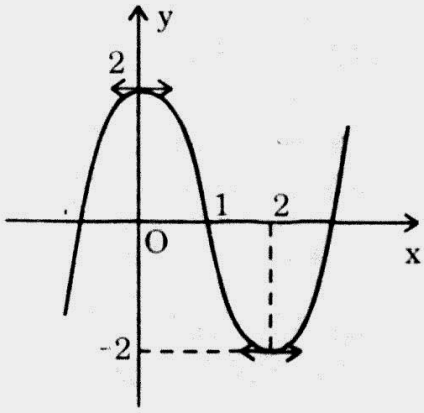
$y' = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$

$y'' = 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow$ I(1; 0) là điểm uốn

| x | $-\infty$ | | 0 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | 0 | − | 0 | + | |
| y | $-\infty$ | ↗ | 2 | ↘ | −2 | ↗ | $+\infty$ |

$y = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 1 \pm \sqrt{3}$

Đồ thị (hình 54).




*Hình 54*

**2.** I(1; 0) là điểm uốn

Phương trình tiếp tuyến tại I (T) :

$$y = f'(1)(x - 1) = -3x + 3$$

Phương trình hoành độ giao điểm (T) và (C) :

$$x^3 - 3x^2 + 2 = -3x + 3 \Leftrightarrow (x - 1)^3 = 0$$

Vậy (T) tiếp xúc (C) tại I(1; 0) và là điểm chung duy nhất.

**3.** $M(x_o; y_o) \in (C)$

Phương trình tiếp tuyến tại M

$$\Delta : y = (3x_o^2 - 6x_o)(x - x_o) + x_o^3 - 3x_o^2 + 2$$

$$\Leftrightarrow \Delta : y = (3x_o^2 - 6x_o)x + 3x_o^2 + 2 - 2x_o^3$$

$\Delta$ qua A(0; 3) $\Leftrightarrow 3 = 3x_o^2 + 2 - 2x_o^3 \Leftrightarrow (x_o - 1)(2x_o^2 - x_o - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow x_o = 1 \vee x_o = -\frac{1}{2}$$

Có hai tiếp tuyến với (C) qua A(0; 3) là : $\Delta_1 : y = -3x + 3$;

$\Delta_2 : y = \frac{15}{4}x + 3$.



www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

**Đề 27** Cho hàm số : $y = f(x) = \dfrac{3 - x}{2x - 1}$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2. Lập phương trình tiếp tuyến với (C) song song với đường phân giác thứ hai của mặt phẳng tọa độ.
3. Chứng minh rằng đường thẳng $\Delta : y = x + m$ luôn cắt (C) tại 2 điểm thuộc 2 nhánh phân biệt.

***Giải***

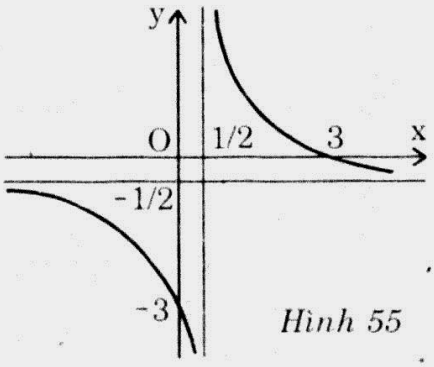
**1.** $y = \dfrac{3 - x}{2x - 1}$ (C)

$D = R \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

$y' = \dfrac{-5}{(2x - 1)^2} < 0 \quad \forall x \in D$

$x = \dfrac{1}{2}$ và $y = -\dfrac{1}{2}$ là hai tiệm cận đứng và ngang

| x | $-\infty$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y' | | $-$ | ‖ | $-$ | |
| y | $-\frac{1}{2}$ ↘ | $-\infty$ | ‖ | $+\infty$ ↘ | $-\frac{1}{2}$ |



*Hình 55*

Đồ thị (hình 55).

**2.** Phương trình phân giác thứ hai (d) : $y = -x$.

Tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_0$ song song với (d)

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{5}{(2x_0 - 1)^2} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \vee x_0 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Hai tiếp tuyến là :

$$(T_1) : y = -\left(x - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) + \frac{3 - \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = -x + \sqrt{5}$$

$$(T_2) : y = -\left(x - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) + \frac{3 - \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}}{-\sqrt{5}} = -x - \sqrt{5}.$$

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

**3.** $\Delta: \quad y = x + m$

Phương trình hoành độ giao điểm $\Delta$ và (C):

$$x + m = \frac{3 - x}{2x - 1} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \neq \dfrac{1}{2} \\ g(x) = 2x^2 - 2mx - m - 3 = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - 3 < 0 \quad \Rightarrow \quad (1) \text{ có 2 nghiệm phân biệt } x_1 < \frac{1}{2} < x_2$$

$\Rightarrow$ $\Delta$ luôn cắt (C) tại 2 điểm trên hai nhánh.

**Đề 28** Cho hàm số: $y = f(x) = \dfrac{x^2 - mx + m}{2}$.

**1.** Cho m = 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

**2.** Lập phương trình tiếp tuyến với (C) đi qua điểm M(2; –1). Chứng minh rằng các tiếp tuyến đó vuông góc với nhau.

**3.** Xác định các giá trị của m sao cho từ M(2; –1) có thể kẻ được 2 tiếp tuyến vuông góc với nhau đến đồ thị.

***Giải***

**1.** $$y = \frac{x^2 - mx + m}{2} \qquad (C_m)$$

$$m = 1 \Rightarrow \quad y = \frac{x^2 - x + 1}{x} = f(x) \qquad (C)$$

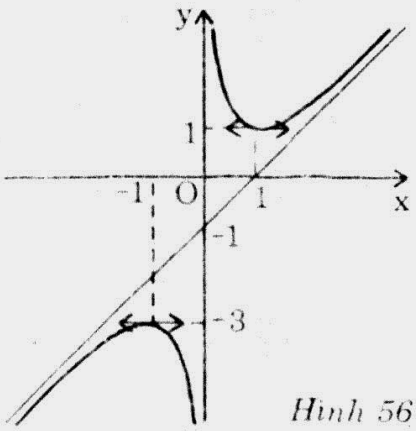
$$D = R \setminus \{0\}$$

$$y' = \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

x = 0 là tiệm cận đứng

$y = x - 1 + \dfrac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad y = x - 1$ là tiệm cận xiên

| x | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | 0 | – | ‖ | – | 0 | + | |
| y | $-\infty$ | ↗ | $-3$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $1$ | ↗ | $+\infty$ |



*Hình 56*

Đồ thị (hình 56).

**2.** Tiếp tuyến với (C) tại $M(x_0; y_0)$ có phương trình

$$\Delta: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad \Delta: y = \left(1 - \frac{1}{x_0^2}\right)x - 1 + \frac{2}{x_0}$$


Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

$\Delta$ qua A(2; –1) $\Leftrightarrow$ $-1 = 1 - \dfrac{2}{x_0^2} + \dfrac{2}{x_0}$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{1}{x_0^2} - \dfrac{1}{x_0} - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad x_0^2 + x_0 - 1 = 0 \qquad (1)$$

Có hai tiếp tuyến qua A(2; –1) với hệ số góc $f'(x_1)$, $f'(x_2)$ ($x_1$, $x_2$ là hai nghiệm của (1)) và

$$f'(x_1).f'(x_2) = \left(1 - \frac{1}{x_1^2}\right)\left(1 - \frac{1}{x_2^2}\right) = \left(-\frac{1}{x_1}\right)\left(-\frac{1}{x_2}\right) = -1$$

Vậy hai tiếp tuyến $(T_1)$, $(T_2)$ qua A(2; –1) vuông góc với nhau

$$(T_1) : y = \frac{\sqrt{5}-1}{2}x + 2 - \sqrt{5}$$

$$(T_2) : y = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}x + 2 + \sqrt{5}.$$

**3.** Phương trình hoành độ giao điểm của d : y = kx – 2k – 1 (d qua M(2; –1)) và $(C_m)$ là :

$$kx - 2k - 1 = \frac{x^2 - mx + m}{x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ (k-1)x^2 + (m - 2k - 1)x - m = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

$\Delta$ tiếp xúc $(C_m)$ $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm kép khác không

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 4k^2 + 4k + (1-m)^2 - 4m = 0 \\ m \neq 0 \quad \text{và} \quad k \neq 1 \end{cases} \qquad (3)$$

m thỏa mãn bài toán $\Leftrightarrow$ (3) có hai nghiệm phân biệt $k_1$, $k_2$ thỏa mãn

$$\begin{cases} k_1 \neq 1 \quad \text{và} \quad k_2 \neq 1, \quad \Delta' = 4 + 16m - (1-m)^2 > 0 \\ k_1k_2 = \dfrac{(1-m)^2 - 4m}{4} = -1 \\ m \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad m = 1 \vee m = 5.$$

**Đề 29** Cho hàm số : $y = f(x) = \dfrac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \dfrac{3}{2}$.

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

**2.** Lập phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm uốn.

**3.** Lập phương trình các tiếp tuyến với (C) đi qua điểm $A\left(0, \dfrac{3}{2}\right)$.

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

*Giải*

**1.** $y = f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2}$

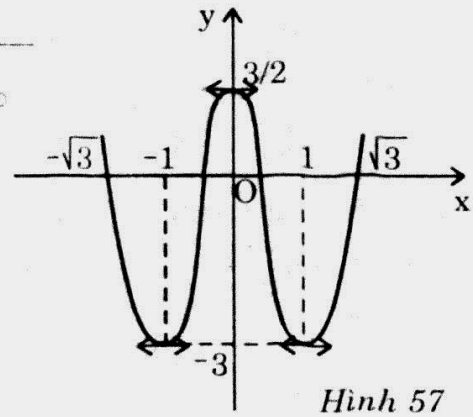
$D = R$

$y' = 2x^3 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ; $x = \pm\sqrt{3}$

$y'' = 6x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

$I_1(1; -1)$ ; $I_2(-1; -1)$ là điểm uốn

| x | $-\infty$ | | $-\sqrt{3}$ | | 0 | | $\sqrt{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | − | 0 | + | 0 | − | 0 | + | |
| y | $+\infty$ | ↘ | −3 | ↗ | $\frac{3}{2}$ | ↘ | −3 | ↗ | $+\infty$ |



*Hình 57*

Đồ thị (hình 57).

**2.** Phương trình tiếp tuyến tại $I_1(1; -1)$

$(d_1)$ : $y = f'(1)(x - 1) + f(1) = -4(x - 1) - 1$

$(d_1)$ : $y = -4x + 3$

Do tính đối xứng (hàm f chẵn), phương trình tiếp tuyến tại $I_2(-1; -1)$ :

$(d_2)$ : $y = 4x + 3$.

**3.** $M_0(x_0, y_0) \in (C)$

Phương trình tiếp tuyến tại $M_0$

$(\Delta) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = (2x_0^3 - 6x_0)x + \left(-\frac{3}{2}x_0^4 + 3x_0^2 + \frac{3}{2}\right)$

$(\Delta)$ qua $A\left(0, \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}x_0^4 + 3x_0^2 + \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow x_0 = 0$ hay $x_0 = \pm\sqrt{2}$

$\Delta_1 : y = \frac{3}{2}$; $\Delta_2 : y = -2\sqrt{2}x + \frac{3}{2}$; $\Delta_3 : y = 2\sqrt{2}x + \frac{3}{2}$.

**Đề 30** Cho hàm số : $y = f(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + \frac{5}{4}$.

1. Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2. Lập phương trình của tiếp tuyến Δ với (C) biết rằng Δ tiếp xúc với (C) tại 2 điểm phân biệt.


www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

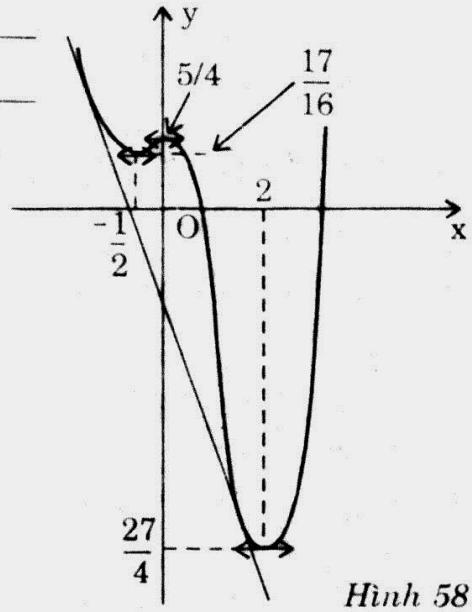
## *Giải*

$y = f(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + \frac{5}{4}$ (C)

**1.** D = R

$y' = 4x^3 - 6x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hay $x = 2$ hay $x = -\frac{1}{2}$

| x | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | 0 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | − | 0 | + | 0 | − | 0 | + | |
| y | $+\infty$ | ↘ | $\frac{17}{16}$ | ↗ | $\frac{5}{4}$ | ↘ | $\frac{27}{4}$ | ↗ | $+\infty$ |



*Hình 58*

Đồ thị (hình 58).

**2.** Δ : $y = ax + b$

Phương trình hoành độ giao điểm (C) và Δ :

$$x^4 - 2x^3 - 2x^2 - ax + \frac{5}{4} - b = 0 \qquad (1)$$

(Δ) tiếp xúc (C) tại hai điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (1) có dạng : $(x - x_1)^2 (x - x_2)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x^4 - 2(x_1 + x_2)x^3 + \left(x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2\right)x^2 - 2x_1x_2(x_1 + x_2)x + x_1^2x_2^2 = 0$ (2)

Đồng nhất (1) và (2) bằng hệ :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 = -2 \\ a = 2x_1x_2(x_1 + x_2) \\ \frac{5}{4} - b = x_1^2x_2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1x_2 = -\frac{3}{2} \\ a = 2x_1x_2(x_1 + x_2) \\ b = \frac{5}{4} - x_1^2x_2^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1 + \sqrt{7}}{2} \\ x_2 = \frac{1 - \sqrt{7}}{2} \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x_1 = \frac{1 - \sqrt{7}}{2} \\ x_2 = \frac{1 + \sqrt{7}}{2} \end{cases}$$

$a = -3$ và $b = -1$

Vậy Δ : $y = -3x - 1$.

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

# 7- BIỆN LUẬN SỐ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẰNG ĐỒ THỊ

## I- NHỮNG VẤN ĐỀ CƠ BẢN

**1. *Để biện luận số nghiệm của phương trình P(x) = Q(x) (1) bằng đồ thị (C) : y = f(x), ta thực hiện các việc :***

– *Biến đổi (1) $\Leftrightarrow$ $f(x) = g(x; m)$*

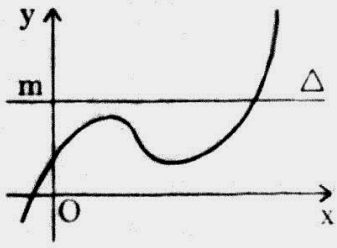
– *Số nghiệm của phương trình (1) chính là số giao điểm của đồ thị của (C) : $y = f(x)$ và $\Delta : y = g(x; m)$*

**2. *Các dạng chuyển động của g(x; m) theo tham số m***

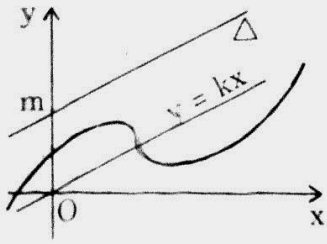
$g(x; m) = m$ : *$\Delta$ vuông góc với Oy tại $M(0; m)$*

$g(x; m) = Kx + m$ : *$\Delta$ cùng phương với $y = Kx$ và cắt Oy tại $M(0; m)$*

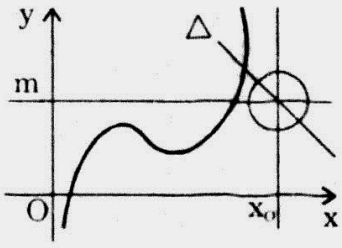
$g(x; m) = m(x - x_o) + y_o$ : *$\Delta$ quay quanh $M_o(x_o; y_o)$ và có hệ số góc m.*




*Hình 59*




*Hình 60*




*Hình 61*

## II- BÀI TOÁN MINH HỌA

**Đề 31** Cho hàm số : $y = f(x) = 4x^3 - 3x$.

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

**2.** Biện luận theo m số nghiệm của phương trình : $4x^3 - 3x - m = 0$.

**3.** Cho đường thẳng (d) : $y = k(x - 1) - 1$

Tìm k để (d) tiếp xúc với (C).

*Giải*

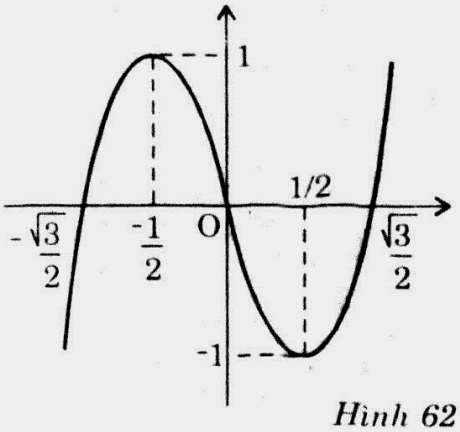
$y = f(x) = 4x^3 - 3x$ (C)

**1.** D = R

$y' = 12x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{2}$

$y'' = 24x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\Rightarrow$ O(0; 0) là điểm uốn.




*Hình 62*



Facebook.com/TeacherSokPiseth www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

| x | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | 0 | − | 0 | + | |
| y | $-\infty$ | ↗ | 1 | ↘ | −1 | ↗ | $+\infty$ |

Đồ thị (hình 62).

**2.** $4x^3 - 3x - m = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^3 - 3x = m \qquad (1)$

Số nghiệm phương trình là số giao điểm của (C) và đường thẳng $(\Delta) : y = m$

$m > 1$ hay $m < -1$ : $(\Delta)$ cắt (C) tại 1 điểm $\Rightarrow$ (1) có 1 nghiệm

$m = 1$ hay $m = -1$ : $(\Delta)$ cắt (C) tại 1 điểm và tiếp xúc (C) tại 1 điểm

$\Rightarrow$ (1) có 1 nghiệm đơn và 1 nghiệm kép.

$-1 < m < 1$ : $(\Delta)$ cắt (C) tại 3 điểm $\Rightarrow$ (1) có 3 nghiệm.

**3.** $(d) : y = k(x - 1) - 1 \quad \Rightarrow \quad$ (d) luôn qua $A(1; -1)$

Phương trình tiếp tuyến (T) tại $M(x_o; y_o)$ là :

$(T) : y = f'(x_o)(x - x_o) + f(x_o) = \left(12x_o^2 - 3\right)x - 8x_o^3$

$$(T) \text{ qua } A(1; -1) \quad \Leftrightarrow \quad -1 = 12x_o^2 - 3 - 8x_o^3$$

$$\Leftrightarrow \quad 4x_o^3 - 6x_o^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x_o - \frac{1}{2}\right)\left(4x_o^2 - 4x_o - 2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x_o = \frac{1}{2} \quad \text{hay} \quad x_o = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \qquad f'\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) = 3(4 + 2\sqrt{3}) - 3 = 3(3 + 2\sqrt{3})$$

$$f'\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) = 3(4 - 2\sqrt{3}) - 3 = 3(3 - 2\sqrt{3})$$

Vậy $k = 0$ hay $k = 3\sqrt{3}(\sqrt{3} + 2)$ hay $k = 3\sqrt{3}(\sqrt{3} - 2)$.

**Đề 32** Cho hàm số : $y = \dfrac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}$.

**1.** Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

**2.** Biện luận theo m số nghiệm của phương trình :

$$x^2 + (3 - m)x + 3 - 2m = 0 \qquad (1)$$

**3.** Tùy theo m, so sánh các nghiệm của (1) với các số −3 và −1.

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

*Giải*

$$y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2} \quad \Leftrightarrow \quad y = x + 1 + \frac{1}{x + 2} \quad (C)$$

**1.** $D = R \setminus \{-2\}$

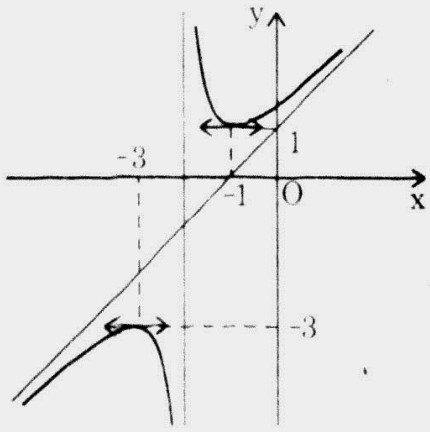
$$y' = \frac{x^2 + 4x + 3}{(x + 2)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -3 \text{ hay } x = -1$$

$x = -2$ là tiệm cận đứng

$y = x + 1$ là tiệm cận xiên

| x | $-\infty$ | | $-3$ | | $-2$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | 0 | − | ‖ | − | 0 | + | |
| y | $-\infty$ | ↗ | $-3$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | 1 | ↗ | $+\infty$ |

Đồ thị (hình 63).




*Hình 63*

**2.** $x^2 + (3 - m)x + 3 - 2m = 0$ (1)

$\Leftrightarrow \quad x^2 + 3x + 3 = m(x + 2) \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{x^2 + 3x + 3}{x + 2} = m \quad (x \neq -2)$ (2)

Số nghiệm của (2) là số giao điểm của (C) và (d) : $y = m$

- $m > 1$ hay $m < -3$ : (1) có hai nghiệm.
- $m = 1$ hay $m = -3$ : (1) có một nghiệm kép.
- $-3 < m < 1$ : (1) vô nghiệm.

**3.**
- $-3 < m < 1$ : (1) vô nghiệm.
- $m = 1$ : (1) có nghiệm $x = -1$
- $m = -3$ : (1) có nghiệm $x = -3$
- $m > 1$ : (1) có 2 nghiệm : $-2 < x_1 < -1 < x_2$
- $m < -3$ : (1) có 2 nghiệm : $x_1 < -3 < x_2 < -2 < -1$.



www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

**Đề 33** Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{3 - x}{2x - 1}$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2. Biện luận theo k số nghiệm của phương trình :

$$2x^2 - 2kx - 2x + k + 3 = 0.$$

3. Lập phương trình tiếp tuyến với (C) song song với đường phân giác thứ hai.

***Giải***

**1.** $y = f(x) = \dfrac{3 - x}{2x - 1}$ (C)

$D = R \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

$y' = \dfrac{-5}{(2x - 1)^2} < 0 \quad \forall x \in D$

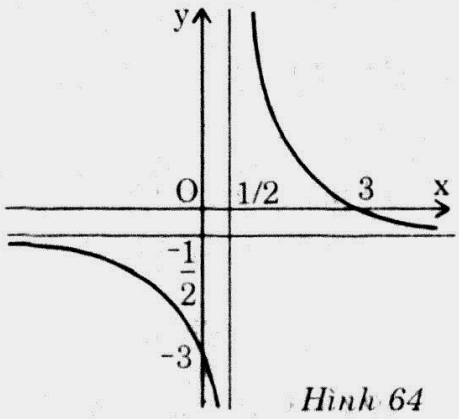
$x = \dfrac{1}{2}$ là tiệm cận đứng

$y = -\dfrac{1}{2}$ là tiệm cận ngang

| x | $-\infty$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y' | | − | ‖ | − | |
| y | $-\frac{1}{2}$ ↘ | $-\infty$ | ‖ | $+\infty$ ↘ | $-\frac{1}{2}$ |

$x = 3 \Leftrightarrow y = 0$ $\qquad$ $x = 0 \Leftrightarrow y = -3$

Đồ thị (hình 64).



*Hình 64*

**2.** $2x^2 - 2kx - 2x + k + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k - x = \dfrac{3 - x}{2x - 1}$ (1)

Hai tiếp tuyến song song với (d) : $y = -x$ là : $d_1 : y = -x + \sqrt{5}$

$d_2 : y = -x - \sqrt{5}$

- $-\sqrt{5} < k < \sqrt{5}$ : $\Delta : y = -x + k$ không có điểm chung với (C) $\Leftrightarrow$ (1) vô nghiệm
- $k = \sqrt{5}$ hay $k = -\sqrt{5}$ : $\Delta$ tiếp xúc (C) tại 1 điểm $\Leftrightarrow$ (1) có 1 nghiệm kép
- $k > \sqrt{5}$ hay $k < -\sqrt{5}$ : $\Delta$ cắt (C) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt.

www.pisethsok.wordpress.com gplus.google.com/+PisethSok_SPS

**Đề 34** Cho hàm số : $y = f(x) = x^3 - 3x$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2. Tìm tất cả các điểm trên Ox sao cho từ đó có thể kẻ ba tiếp tuyến khác nhau đến (C).
3. Biện luận theo m số nghiệm của phương trình :

$$x^3 - x(m + 3) + m - 2 = 0.$$

***Giải***

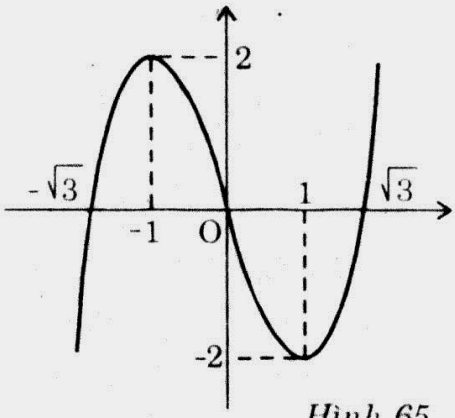
$y = f(x) = x^3 - 3x$ (C)

**1.** • $D = R$

• $y' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

• $y'' = 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow D(0; 0)$ là điểm uốn

| x | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | 0 | − | 0 | + | |
| y | $-\infty$ | ↗ | 2 | ↘ | $-2$ | ↗ | $+\infty$ |




*Hình 65*

Đồ thị (hình 65).

**2.** $M(a; 0) \in Ox$

Phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm có hoành độ $x_0$

$$(T) : \ y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = \left(3x_0^2 - 3\right)x - 2x_0^3$$

$$(T) \text{ qua } M(a; 0) \Leftrightarrow 2x_0^3 - 3ax_0^2 + 3a = 0 \qquad (1)$$

**BỔ ĐỀ :** Ta chứng minh số tiếp tuyến với (C) bằng số tiếp điểm (nghĩa là không tồn tại đường thẳng tiếp xúc (C) tại hai điểm phân biệt).

Thật vậy : Giả sử $\Delta : y = kx + b$ tiếp xúc (C) tại $M(x_0; y_0)$

$\Leftrightarrow$ Phương trình hoành độ giao điểm có dạng : $(x - x_0)^2 (x - x_1) = 0$

• $x_1 = x_0 \Leftrightarrow \Delta$ tiếp (C) tại 1 điểm.

• $x_1 \neq x_0 \Leftrightarrow \Delta$ tiếp xúc (C) tại 1 điểm và cắt (C) tại 1 điểm.

Vậy bổ đề chứng minh xong.

Đặt $g(x) = 2x_0^3 - 3ax_0^2 + 3a$.

Từ M kẻ được 3 tiếp tuyến với (C) $\Leftrightarrow$ (1) có 3 nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g' = 6x_0^2 - 6ax_0 \text{ có hai nghiệm phân biệt } x_1, x_2 \\ g(x_1).g(x_2) = 3a.(3a - a^3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow a < -\sqrt{3} \text{ hay } a > \sqrt{3}.$$


www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SK

**3.** $x^3 - (m+3)x + m - 2 = 0$ (1) $\Leftrightarrow$ $x^3 - 3x = m(x-1) + 2$

(d) : $y = m(x-1) + 2$ luôn qua A(1; 2)

Tiếp tuyến với (C) tại điểm có hoành độ $x_o$ là (T) : $y = (3x_o^2 - 3)x - 2x_o^3$

(T) qua A(1; 2) $\Leftrightarrow$ $2 = 3x_o^2 - 3 - 2x_o^3$

$\Leftrightarrow$ $(x_o + 1)(2x_o^2 - 5x_o + 5) = 0$ $\Leftrightarrow$ $x_o = -1$

$f'(-1) = 0$

- $m = 0$ : (d) tiếp xúc (C) tại 1 điểm và cắt (C) tại 1 điểm $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm.
- $m < 0$ : (d) cắt (C) tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có 3 nghiệm.
- $m > 0$ : (d) cắt (C) tại 1 điểm $\Leftrightarrow$ (1) có 1 nghiệm.

**Đề 35** Cho hàm số : $y = (x+1)^2(x-1)^2$.

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

**2.** Biện luận theo m số nghiệm của phương trình : $(x^2 - 1)^2 - 2m + 1 = 0$.

**3.** Tìm b để (C) tiếp xúc với (P) : $y = 2x^2 + b$.

***Giải***

$y = (x+1)^2(x-1)^2$ $\Leftrightarrow$ $y = (x^2 - 1)^2$ (C)

**1.** D = R

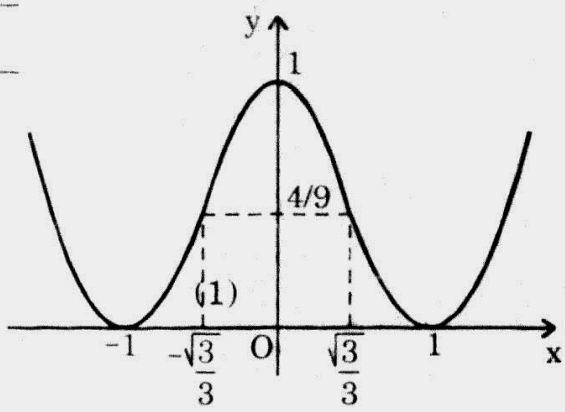
$y' = 4x(x^2 - 1) = 0$ $\Leftrightarrow$ $x = \pm 1 \vee x = 0$

$y'' = 4(3x^2 - 1) = 0$ $\Leftrightarrow$ $x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\Leftrightarrow$ $I_1\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{4}{9}\right)$ và $I_2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{4}{9}\right)$ là điểm uốn

| x | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |
| y | $+\infty$ | ↘ | 0 | ↗ | 1 | ↘ | 0 | ↗ | $+\infty$ |

Đồ thị (hình 66).




*Hình 66*

**2.** $(x^2 - 1)^2 - 2m + 1 = 0$

$\Leftrightarrow$ $(x^2 - 1)^2 = 2m - 1$

Số nghiệm của phương trình (1) là số giao điểm của (C) và ($\Delta$) : $y = 2m - 1$

- $2m - 1 > 1$ $\Leftrightarrow$ $m > 1$ : có 2 giao điểm $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm.
- $2m - 1 = 1$ $\Leftrightarrow$ $m = 1$ : có 1 tiếp điểm và 2 giao điểm $\Rightarrow$ (1) có 3 nghiệm.

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

- $0 < 2m - 1 < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < m < 1$ : có 4 giao điểm $\Rightarrow$ (1) có 4 nghiệm.
- $2m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$ : có hai tiếp điểm $\Rightarrow$ (1) có 2 nghiệm.
- $2m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}$ : $(\Delta)$ không cắt (C) $\Leftrightarrow$ (1) vô nghiệm.

**3.** (P) : $y = 2x^2 + b$

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (C) :

$(x^2 - 1)^2 = 2x^2 + b \Leftrightarrow x^4 - 4x^2 + 1 - b = 0$ (2)

(P) tiếp xúc (C) $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm kép.

$\Leftrightarrow$ $g(t) = t^2 - 4t + 1 - b = 0$ có nghiệm kép dương hay có nghiệm là $t = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4 + b - 1 = b + 3 = 0 \\ 2 > 0 \quad \text{hay} \quad b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow b = -3$ hay $b = 1$.

**Đề 36** Cho hàm số : $y = f(x) = \dfrac{x^2 + mx + 2m - 1}{mx + 1}$ $(C_m)$.

1. Xác định m sao cho hàm số có cực trị và đường tiệm cận xiên của $(C_m)$ đi qua gốc tọa độ.
2. Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số với m = 1.
3. Biện luận theo m số nghiệm của phương trình :

$$\begin{cases} \cos 2x + 2(1 - m)\cos x + 3 - 2m = 0 \\ -\pi < x < \pi \end{cases}$$

***Giải***

$$y = f(x) = \frac{x^2 + mx + 2m - 1}{mx + 1} \quad (C_m)$$

**1.** $m = 0 \Rightarrow y = x^2 - 1$, không có tiệm cận xiên.

$m \neq 0 \Rightarrow y = \dfrac{1}{m}x + \dfrac{m^2 - 1}{m^2} + \dfrac{2m - 1 - \dfrac{m^2 - 1}{m^2}}{mx + 1}$

Tiệm cận xiên qua O $\Leftrightarrow m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$

- $m = 1 \Leftrightarrow y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1} \Rightarrow y' = \dfrac{x^2 + 2x}{(x + 1)^2}$

  y' có 2 nghiệm $\Rightarrow$ y có cực trị.

- $m = -1 \Leftrightarrow y = \dfrac{x^2 - x - 3}{-x + 1} \Rightarrow y' = \dfrac{-x^2 + 2x - 4}{(x - 1)^2} = -\dfrac{(x - 1)^2 + 3}{(x - 1)^2} < 0$

Tóm lại m = 1 là giá trị cần tìm.


www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

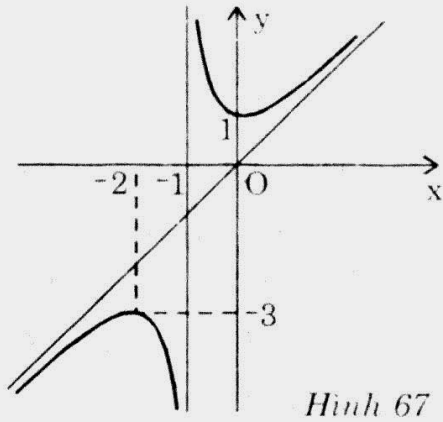
**2.** $m = 1 \Leftrightarrow \quad y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1}$ (C)

$D = R \setminus \{-1\}$

$y' = \dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee x = -2$

$x = -1$ là tiệm **cận đứng**

$y = x$ là tiệm **cận xiên.**




*Hình 67*

| x | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | 0 | − | ‖ | − | 0 | + | |
| y | $-\infty$ | ↗ | $-3$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | 1 | ↗ | $+\infty$ |

Đồ thị (hình 67).

**3.** $\begin{cases} \cos 2x + 2(1 - m)\cos x + 3 - 2m = 0 \\ -\pi < x < \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\pi < x < \pi \\ \cos^2 x + (1 - m)\cos x + 1 - m = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -\pi < x < \pi \\ \cos^2 x + \cos x + 1 = m(\cos x + 1) \end{cases} \Leftrightarrow$ (I) $\begin{cases} \dfrac{\cos^2 x + \cos x + 1}{\cos x + 1} = m \\ -\pi < x < \pi \end{cases}$

Đặt $t = \cos x \quad \Leftrightarrow \quad -1 < t < 1$

$f(t) = \dfrac{t^2 + t + 1}{t + 1}$ $(C_M)$ miền khảo sát $M = (-1; 1)$

$(\Delta) : y = m$

- $m < 1$ : $(C_M) \cap (\Delta) = \varnothing$ (I) vô nghiệm.
- $m = 1$ : $(C_M) \cap (\Delta) = \{A(0, 1)\} \Leftrightarrow$ (I) có 1 nghiệm $x = \pm\dfrac{\pi}{2}$
- $m = \dfrac{3}{2}$ : $(C_M)$ **cắt** $(\Delta)$ tại 2 điểm có hoành độ $x_1 = 1$ và hoành độ

  $-1 < x_2 < 1 \Leftrightarrow$ **(I) có 3 nghiệm** x thỏa mãn : $\begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = x_2 \quad (-1 < x_2 < x_1) \\ -\pi < x < \pi \end{cases}$
- $1 < m < \dfrac{3}{2}$ : $(C_M)$ **cắt** $(\Delta)$ tại 2 điểm có hoành độ $-1 < x_1, x_2 < 1$

  $\Leftrightarrow$ **(I) có 4 nghiệm.**
- $m > \dfrac{3}{2}$ : $(C_M)$ **cắt** $(\Delta)$ tại duy nhất 1 điểm có hoành độ thỏa mãn

  $-1 < x_0 < 1 \Leftrightarrow$ (I) có hai nghiệm.

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

# 8- TÌM TẬP HỢP ĐIỂM

## I- NHỮNG VẤN ĐỀ CƠ BẢN

***Để tìm tập hợp (L) các điểm M thỏa mãn các điều kiện cho trước, ta thực hiện các việc :***

– *Xác định tọa độ của điểm M theo tham số của bài toán*

$$\begin{cases} x = g(m) \\ y = h(m) \end{cases}$$

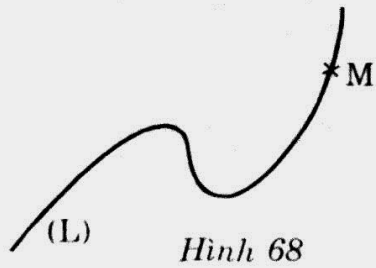
– *Khử tham số m, ta được hệ thức độc lập giữa x và y :*

$$f(x; y) = 0 \qquad (1)$$

– *Từ điều kiện tồn tại m, ta xét miền giá trị của g(m) hay h(m) và kết hợp với (1) ta được phương trình của tập hợp (L)*

$$M \begin{cases} x = g(m) \\ y = h(m) \end{cases}$$

$$(L) : \ f(x; y) = 0.$$




*Hình 68*

## II- BÀI TOÁN MINH HỌA

**Đề 37** Cho hàm số : $y = f(x) = (4 - x)(x - 1)^2$

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

**2.** A là giao điểm của (C) với Oy, Δ là đường thẳng đi qua A có hệ số góc là m.

Tìm m để Δ cắt (C) tại 3 điểm phân biệt A, B, C.

**3.** Tìm tập hợp trung điểm M của BC.

***Giải***

$y = f(x) = (4 - x)(x - 1)^2 = -x^3 + 6x^2 - 9x + 4$

**1.** D = R

$y' = 3(-x^2 + 4x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$

$y'' = -6(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow$ I(2; 2) là điểm uốn

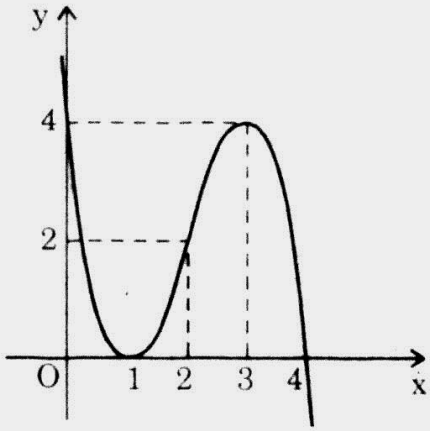
| x | $-\infty$ | | 1 | | 3 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | – | 0 | + | 0 | – | |
| y | $+\infty$ | ↘ | 0 | ↗ | 4 | ↘ | $-\infty$ |

$f(1) = f(4) = 0$ ; $f(0) = 4$



www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

Đồ thị (hình 69).




*Hình 69*

**2.** A(0; 4) là giao điểm của (C) và Oy

$(\Delta) : y = mx + 4$ là đường thẳng qua A

- $m = 0$ : $(\Delta)$ tiếp xúc (C) tại B(3; 4)
- Tiếp tuyến với (C) tại A là $y = -9x + 4$

  Vậy $m = -9$ không nhận.
- Để $(\Delta)$ cắt (C) tại ba điểm phân biệt A, B, C thì $-9 < m < 0$.

**3.** Trung điểm M của B, C có tọa độ :

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_B + x_C}{2} = 3 \quad (\text{vì } x_B, x_C \text{ là nghiệm của } x^2 - 6x + 9 = 0) \\ y_M = \dfrac{y_B + y_C}{2} = \dfrac{(mx_B + 4)(mx_C + 4)}{2} = mx_M + 4 = 3m + 4 \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad -23 < y_M < 4.$

Vậy quỹ tích M là đoạn thẳng KL với K(3; 4), L(3; –23) và bỏ hai điểm K, L.

**Đề 38** Cho hàm số : $y = f(x) = \dfrac{x + 3m - 1}{(m + 2)x + 4m}$ $(H_m)$.

**1.** Biện luận theo m chiều biến thiên của $(H_m)$.

**2.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số với $m = 0$.

**3.** Tìm tập hợp các tâm đối xứng của $(H_m)$.

***Giải***

$$y = f(x) = \frac{x + 3m - 1}{(m + 2)x + 4m} \quad (H_m)$$

**1.** * $m = -2 \Rightarrow \quad y = -\dfrac{1}{8}(x - 7)$ tăng trên R

* $m \neq -2 \Rightarrow$ y là hàm số $\Leftrightarrow \quad -\dfrac{4m}{(m + 2)} + 3m - 1 \neq 0$

$\Leftrightarrow \quad m \neq -1$ và $m \neq \dfrac{2}{3}$

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

với $m \neq -1$ và $m \neq \frac{2}{3}$

$$y' = \frac{-3m^2 - m + 2}{[(m+2)x + 4m]^2}$$

• $m > \frac{2}{3}$ hay $m < -1 \Rightarrow y' < 0 \Rightarrow$ y giảm trên từng khoảng xác định

• $-1 < m < \frac{2}{3}$ $\Rightarrow y' > 0 \Rightarrow$ y tăng trên từng khoảng xác định M

**2.** $m = 0 \Rightarrow \quad y = \frac{x-1}{2x}$

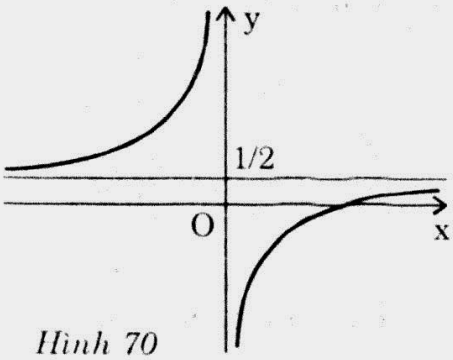
$D = R \setminus \{0\}$

$y' = \frac{2}{4x^2} > 0 \quad \forall x \in D$

$x = 0$ là tiệm cận đứng

$y = \frac{1}{2}$ là tiệm cận ngang

| x | $-\infty$ | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | ‖ | + | |
| y | $\frac{1}{2}$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $\frac{1}{2}$ |




*Hình 70*

$x = 1 \Rightarrow \quad y = 0$

Đồ thị (hình 70).

**3.** Tâm đối xứng là giao điểm hai tiệm cận $I\left(\frac{-4m}{m+2}, \frac{1}{m+2}\right)$ với $\begin{cases} m \neq -2 \\ m \neq -1 \\ m \neq \frac{2}{3} \end{cases}$

Thật vậy, chuyển trục $\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$

Hàm y $\Leftrightarrow$ hàm $Y = \frac{X + x_0 + 3m - 1}{(m+2)(X + x_0) + 4m} - y_0$

$$Y = \frac{[1 - (m+2)y_0]X - (m+2)x_0y_0 - 4my_0 + x_0 + 3m - 1}{(m+2)X + (m+2)x_0 + 4m}$$

$$Y = \frac{AX + B}{CX + D}$$



www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

$I(x_0; y_0)$ là tâm đối xứng $\Leftrightarrow$ Y là hàm lẻ

$$\Leftrightarrow \quad \frac{AX + B}{CX + D} = \frac{A(-X) + B}{C(-X) + D}; \ \forall X$$

$$\Leftrightarrow \quad ACX^2 - BD = 0; \quad \forall X \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} AC = 0 \\ BD = 0 \end{cases}$$

Vậy $\begin{cases} (m + 2)[1 - y_0(m + 2)] = 0 \\ [(m + 2)x_0 + 4m]B = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y_0 = \dfrac{1}{m + 2} \\ x_0 = \dfrac{-4m}{m + 2} \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} y_0 = \dfrac{1}{m + 2} \\ -x_0 - \dfrac{-4m}{m + 2} + x_0 + 3m - 1 = 0 \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad y_0 = \frac{x_0}{8} + \frac{1}{2} \quad \text{với} \quad x_0 \neq 4, \quad x_0 \neq -1 \quad (\text{vì } m \neq -1 \text{ và } m \neq \frac{2}{3})$$

Đây là phương trình quỹ tích tâm đối xứng.

**Đề 39** Cho hàm số : $y = f(x) = \dfrac{x^2 + mx - 2m - 4}{x + 2}$ $(C_m)$.

**1.** Với giá trị nào của m thì $(C_m)$ có hai cực trị.

**2.** Tìm tập hợp các điểm cực trị của $(C_m)$.

**3.** Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số với $m = -1$.

**4.** Tiếp tuyến tại điểm M tùy ý của (C) cắt hai đường tiệm cận của (C) tại P và Q. Chứng minh rằng MP = MQ.

***Giải***

$$y = f(x) = \frac{x^2 + mx - 2m - 4}{x + 2} \quad (C_m)$$

MXĐ : $D = R \setminus \{-2\}$

**1.** $y' = \dfrac{x^2 + 4x + 4m + 4}{(x + 2)^2}$

$(C_m)$ có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} y \text{ là hàm số} \\ y' \text{ có 2 nghiệm phân biệt khác } -2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4 - 2m - 2m - 4 \neq 0 \\ 4 - 8 + 4m + 4 \neq 0 \\ \Delta' = 4 - 4m - 4 > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad m < 0$$

**2.** Với $x_0$ là cực trị thì : $f(x_0) = 2x_0 + m = y_0$

vì $x_0$ là nghiệm của $y'$ $\Rightarrow$ $m = -\dfrac{x_0^2 + 4x_0 + 4}{4} < 0$

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

Vậy $y = -\frac{x^2}{4} + x - 1$ $(x \neq -2)$ là phương trình quỹ tích điểm cực trị.

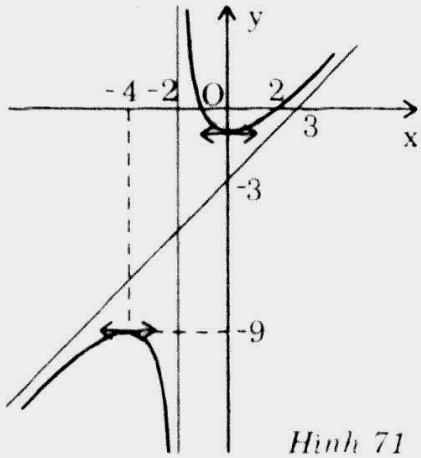
**3.** $m = -1 \Rightarrow y = \frac{x^2 - x - 2}{x + 2} = x - 3 + \frac{4}{x + 2}$ (C)

- $D = R\backslash\{-2\}$
- $y' = \frac{x^2 + 4x}{(x + 2)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = 0 \end{cases}$
- $x = -2$ là tiệm cận đứng
- $y = x - 3$ là tiệm cận xiên

| x | $-\infty$ | | $-4$ | | $-2$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | 0 | − | ‖ | − | 0 | + | |
| y | $-\infty$ | ↗ | $-9$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $+\infty$ |

$x = -1$ hay $x = 2 \Rightarrow y = 0$

Đồ thị (hình 71).




*Hình 71*

**4.** $\Delta$ : $y = kx + b$

Phương trình hoành độ giao điểm của $(\Delta)$ và (C) :

$$(k - 1)x^2 + (2k + b + 1)x + 2b + 2 = 0 \qquad (1)$$

Giả sử $(\Delta)$ tiếp xúc (C) $\Rightarrow$ (1) có nghiệm kép $x_o = \frac{2k + b + 1}{2(1 - k)}$

$(\Delta)$ cắt tiệm cận đứng và tiệm cận xiên tại hai điểm có hoành độ lần lượt $x_P = -2$ và $x_Q = \frac{b + 3}{1 - k}$.

*Nhận xét* : $\frac{x_P + x_Q}{2} = \frac{1}{2}\left(-2 + \frac{b + 3}{1 - k}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2k + b + 1}{1 - k}\right) = x_o$

ba điểm M, P, Q thẳng hàng ($x_o$ là hoành độ của M). Vậy MP = MQ.



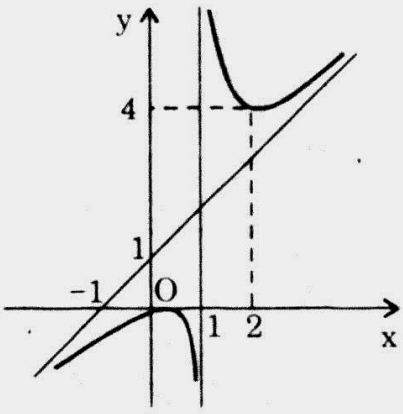
www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

**Đề 40** Cho hàm số : $y = f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.

1. Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2. Gọi (d) là đường thẳng có phương trình y = m. Biện luận bằng phép tính và kiểm lại bằng đồ thị số giao điểm của (C) và (d).
3. Trong trường hợp (d) cắt (C) tại 2 điểm P và Q. Tìm tập hợp trung điểm M của P và Q.

## *Giải*

**1.** $y = f(x) = \dfrac{x^2}{x-1} \Leftrightarrow y = x + 1 + \dfrac{1}{x-1}$ (C)




*Hình 72*

- D = R \ {1} ;

  x = 1 là tiệm cận đứng

  y = x + 1 là tiệm cận xiên

- $y' = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$

| x | $-\infty$ | | 0 | | 1 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | 0 | − | ‖ | − | 0 | + | |
| y | $-\infty$ | ↗ | 0 | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | 4 | ↗ | $+\infty$ |

Đồ thị (hình 72).

**2.** Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (C)

$$\frac{x^2}{x-1} = m \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x^2 - mx + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 - mx + m = 0$$

$\Delta = m^2 - 4m$

- $0 < m < 4 \Rightarrow$ (1) vô nghiệm $\Rightarrow$ d không có điểm chung với (C)
- $m > 4$ hay $m < 0 \Rightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt $\Rightarrow$ d cắt (C) tại 2 điểm.
- $m = 0$ hay $m = 4 \Rightarrow$ (1) có nghiệm kép $\Rightarrow$ d tiếp xúc (C) tại 1 điểm.

Kiểm tra bằng đồ thị cho kết quả đúng như trên.

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

**3.** (C) cắt d tại 2 điểm P, Q $\Leftrightarrow$ $m > 4$ hay $m < 0$

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_P + x_Q}{2} = \dfrac{m}{2} \text{ (vì } x_P, x_Q \text{ là nghiệm của } x^2 - mx + m = 0) \\ y_M = m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_M = 2x_M \\ x_M > 2 \text{ hay } x_M < 0 \end{cases}$$

Vậy quỹ tích M là đường thẳng $y = 2x$ với $x > 2$ **hay** $x < 0$.

**Đề 41** Cho Parabol (P) : $y = x^2 - 2x - 3$.

Tìm tập hợp các điểm M trên mặt phẳng tọa độ sao cho từ M ta kẻ được đến (P) hai tiếp tuyến vuông góc với nhau.

***Giải***

(P) : $y = x^2 - 2x - 3$.

Đường thẳng $x = x_0$ luôn cắt (P).

Đường thẳng $\Delta$ qua $M(x_0; y_0)$ có hệ số góc k là $(\Delta) : y = kx - kx_0 + y_0$

Phương trình hoành độ giao điểm ($\Delta$) và (P) :

$$kx - kx_0 + y_0 = x^2 - 2x - 3$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - (2 - k)x - 3 - y_0 + kx_0 = 0 \qquad (1)$$

($\Delta$) tiếp xúc (C) $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \quad \Delta = (2 - k)^2 - 4(kx_0 - 3 - y_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad k^2 - 4(1 + x_0)k + 16 + 4y_0 = 0 \qquad (2)$$

Từ M kẻ được 2 tiếp tuyến đến (P) và vuông góc nhau

$\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm phân biệt $k_1$, $k_2$ thỏa mãn $k_1k_2 = -1$

$$\Leftrightarrow \quad 16 + 4y_0 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad y_0 = -\frac{17}{4}.$$



www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

# 9- BIỆN LUẬN SỐ ĐƯỜNG CỦA MỘT HỌ CÁC ĐƯỜNG ĐI QUA MỘT ĐIỂM

## I- NHỮNG VẤN ĐỀ CƠ BẢN

**1.** *Cho họ các đường $(C_m)$ có phương trình $y = f(x; m)$ ;*

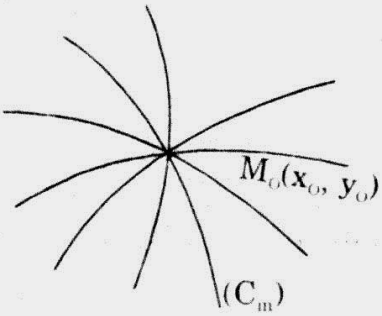
$$A(x_o; y_o) \in (C_m) \quad \Leftrightarrow \quad y_o = f(x_o; m) \qquad (1)$$

**2.** *Xem phương trình (1) là phương trình theo ẩn số m.*

*(1) vô nghiệm ⇔ không có đường nào của họ đi qua điểm A.*

*(1) có n nghiệm m ⇔ có n đường của họ đi qua điểm A.*

*(1) nghiệm đúng ∀m ⇔ tất cả các đường cong của họ đều đi qua A ⇔ A là điểm cố định của họ $(C_m)$.*




*Hình 73*

## II- BÀI TOÁN MINH HỌA

**Đề 42** Cho hàm số : $y = f(x) = (2m + 1)x^3 - mx - m + 1$.

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi $m = -1$.

**2.** Tìm tọa độ của điểm trên (C) tại đó tiếp tuyến với (C) có hệ số góc lớn nhất.

**3.** Tìm điểm cố định mà $(C_m)$ luôn đi qua ∀m.

**4.** Tìm các điểm trên mặt phẳng tọa độ mà ∀m $(C_m)$ không đi qua.

***Giải***

$$y = f(x) = (2m + 1)x^3 - mx - m + 1 \quad (C_m)$$

**1.** $m = -1 \Rightarrow y = -x^3 + x + 2 \quad (C)$

$D = R$

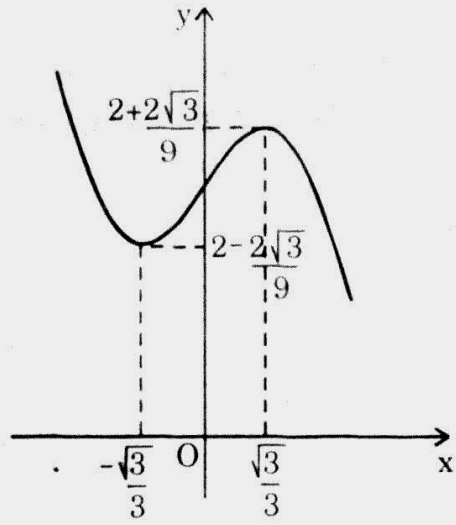
$y' = -3x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$y'' = -6x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow I(0; 2)$ là điểm uốn

| x | $-\infty$ | | $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ | | $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | − | 0 | + | 0 | − | |
| y | $-\infty$ | ↘ | $2 - \dfrac{2\sqrt{3}}{9}$ | ↗ | $2 + \dfrac{2\sqrt{3}}{9}$ | ↘ | $-\infty$ |

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

Đồ thị (hình 74).




*Hình 74*

**2.** Phương trình tiếp tuyến với (C) tại $M(x_o; y_o)$ là :

$$y = f'(x_o)(x - x_o) + f(x_o)$$

$$f'(x_o) = -3x_o^2 + 1 \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_o = 0$$

Tiếp tuyến có hệ số góc lớn nhất là (T) : $y = x + 2 \quad \Rightarrow M(0; 2)$

**3.** $M(x_o; y_o)$ là điểm cố định của $(C_m)$

$$\Leftrightarrow \quad y_o = (2m + 1)x_o^3 - mx_o - m + 1 \quad \forall m$$

$$\Leftrightarrow \quad (2x_o^3 - x_o - 1)m + x_o^3 + 1 - y_o = 0 \quad \forall m$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x_o^3 - x_o - 1 = 0 \\ x_o^3 + 1 - y_o = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_o = 1 \\ y_o = 2 \end{cases}$$

**4.** $M(x_o; y_o)$ là điểm $(C_m)$ không qua $\forall m$

$$\Leftrightarrow \quad (2x_o^3 - x_o - 1)m + x_o^3 + 1 - y_o = 0 \quad \text{vô nghiệm } \forall m \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_o = 1 \\ y_o \ne 2. \end{cases}$$

**Đề 43** Cho hàm số : $y = f(x) = m + 1 - mx^2 - \frac{x^4}{2}$.

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số với $m = -1$.

**2.** Chứng minh rằng $(C_m)$ luôn đi qua 2 điểm cố định.

**3.** Biện luận theo k số nghiệm của phương trình : $x^4 - 2x^2 + 2k = 0$.

***Giải***

$$y = f(x) = m + 1 - mx^2 - \frac{x^4}{2}$$

**1.** $m = -1 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{x^4}{2} + x^2 \quad (C)$



Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

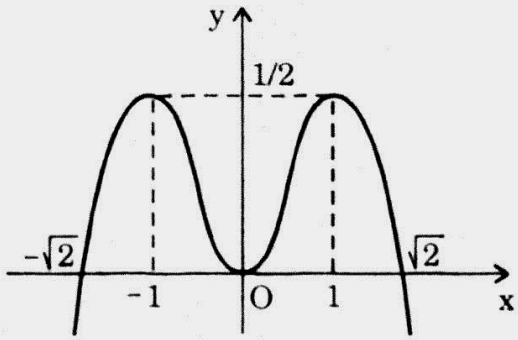
D = R

$y' = -2x^3 + 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$ hay $x = \pm 1$

| x | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | 0 | − | 0 | + | 0 | − | |
| y | $-\infty$ | ↗ | $\frac{1}{2}$ | ↘ | 0 | ↗ | $\frac{1}{2}$ | ↘ | $-\infty$ |

$x = 0$ hay $x = \pm\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad y = 0$

Đồ thị (hình 75).




*Hình 75*

**2.** $M(x_o; y_o)$ là điểm cố định của $(C_m)$

$$\Leftrightarrow \quad y_o = m + 1 - m x_o^2 - \frac{x_o^4}{2} \quad \forall m$$

$$\Leftrightarrow \quad (1 - x_o^2)m + 1 - \frac{x_o^4}{2} - y_o = 0 \quad \forall m$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (1 - x_o^2) = 0 \\ y_o = 1 - \dfrac{x_o^4}{2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_o = 1 \\ y_o = \dfrac{1}{2} \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x_o = -1 \\ y_o = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

**3.** $$x^4 - 2x^2 + 2k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-x^4}{2} + x^2 = k \qquad (1)$$

Số nghiệm (1) bằng số giao điểm của (C) và $\Delta : y = k$

- $k > \frac{1}{2}$ : (1) vô nghiệm
- $k = \frac{1}{2}$ : (1) có 1 nghiệm kép
- $0 < k < \frac{1}{2}$ : (1) có 4 nghiệm
- $k = 0$ : (1) có 1 nghiệm kép và 2 nghiệm đơn
- $k < 0$ : (1) có 2 nghiệm.

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

**Đề 44** Cho hàm số : $y = f(x) = \dfrac{mx + 4}{x + m}$ $(H_m)$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số với m = 1.
2. Chứng minh rằng $(H_m)$ luôn đi qua hai điểm cố định khi m thay đổi ngoại trừ một vài giá trị của m mà ta xác định được.
3. Hãy xác định m để các tiếp tuyến với $(H_m)$ tại hai điểm cố định là song song với nhau.

## *Giải*

$$y = f(x) = \frac{mx + 4}{x + m} \quad (H_m)$$

**1.** $m = 1 \Rightarrow y = \dfrac{x + 4}{x + 1}$

$D = R \setminus \{-1\}$

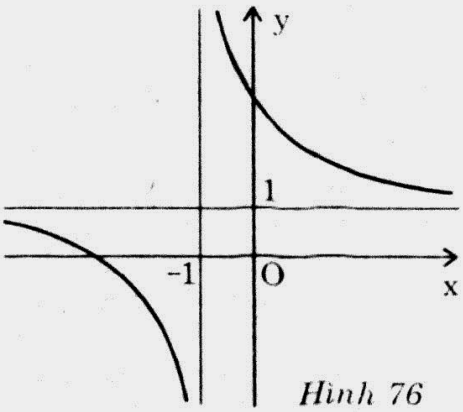
$y' = \dfrac{-3}{(x + 1)^2} < 0 \ ; \forall x \in D$

$x = -1$ là tiệm cận đứng

$y = 1$ là tiệm cận ngang

| x | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y' | | $-$ | ‖ | $-$ | |
| y | 1 ↘ | | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | 1 |

$x = -4 \Rightarrow y = 0$ $\qquad$ $x = 0 \Rightarrow y = 4$



*Hình 76*

Đồ thị (hình 76).

**2.** $M(x_o; y_o)$ là điểm cố định $(H_m)$ đi qua

$$\Leftrightarrow \quad y_o = \frac{mx_o + 4}{x_o + m} \quad \forall m \quad \Leftrightarrow \quad (x_o - y_o)m + 4 - x_oy_o = 0 \quad \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_o = y_o \\ x_oy_o = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_o = y_o = 2 \\ x_o = y_o = -2 \end{array}\right.$$

Đồ thị $(H_m)$ luôn qua $M_1(2; 2)$ và $M_2(-2; -2)$.

**3.** Tiếp tuyến tại $M_1$ $(\Delta_1) : y = y'(2)(x - 2) + y(2)$

Tiếp tuyến tại $M_2$ $(\Delta_2) : y = y'(-2)(x + 2) + y(-2)$

$$\Delta_1 \,//\, \Delta_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} m \neq \pm 2 \ \text{(y là hàm số)} \\ y'(2) = y'(-2) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad m = 0.$$


www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

**Đề 45** Cho hàm số : $y = f(x) = \dfrac{x^2 + mx - 2}{mx - 1}$ $(C_m)$.

1. Với giá trị nào của m thì f(x) có cực trị.
2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số ứng với m = 1.
3. Chứng minh rằng $(C_m)$ luôn đi qua 3 điểm cố định.

***Giải***

$$y = f(x) = \frac{x^2 + mx - 2}{mx - 1} \ (C_m)$$

**1.** $y' = \dfrac{mx^2 - 2x + m}{(mx - 1)^2}$

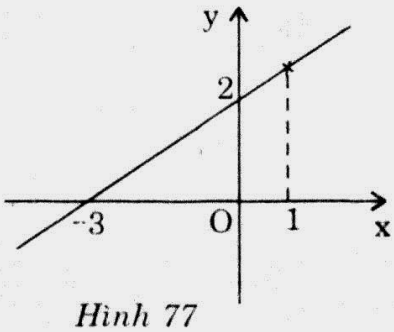
f(x) có cực trị $\Leftrightarrow \begin{cases} y \text{ là hàm số} \\ mx^2 - 2x + m = 0 \text{ có nghiệm } x_o \text{ thỏa mãn } mx_o - 1 \neq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \quad m = 0 \quad \text{hay} \quad \begin{cases} m \neq 0 \\ m\left(\dfrac{1}{m}\right)^2 + m\left(\dfrac{1}{m}\right) - 2 \neq 0 \\ \Delta' = 1 - m^2 \geq 0 \end{cases}$$

$mx_o - 1 = \pm\sqrt{1 - m^2} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < m < 1$

**2.** $m = 1 \Rightarrow \quad y = \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \begin{cases} \propto \text{ nếu } x = 1 \\ x + 2 \text{ nếu } x \neq 1 \end{cases}$

Đồ thị (hình 77).



*Hình 77*

**3.** $M(x_o; y_o)$ là điểm cố định của hàm số

$$\Leftrightarrow \quad y_o = \frac{x_o^2 + mx_o - 2}{mx_o - 1} \quad \forall m$$

$$\Leftrightarrow \quad x_o(y_o - 1)m - y_o - x_o^2 + 2 = 0 \ \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_o(y_o - 1) = 0 \\ x_o^2 + y_o - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_o = 0 \\ y_o = 2 \end{cases} \text{hay} \begin{cases} x_o = 1 \\ y_o = 1 \end{cases} \text{hay} \begin{cases} x_o = -1 \\ y_o = 1. \end{cases}$$

**Đề 46** Cho hàm số : $y = f(x) = \dfrac{(m + 1)(x^2 - 3x) + 2(2m + 1)}{mx - m}$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số ứng với m = 1.
2. Tìm trên (C) những điểm có tọa độ là số nguyên.
3. Chứng minh rằng $\forall m \neq 0$ đồ thị $(C_m)$ có một tiệm cận cố định còn tiệm cận thứ hai luôn đi qua một điểm cố định.

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

## *Giải*

$$y = \frac{(m+1)(x^2 - 3x) + 2(2m+1)}{mx - m}$$

**1.** $m = 1 \Rightarrow \quad y = \dfrac{2(x^2 - 3x) + 6}{x - 1} = 2\left(x - 2 + \dfrac{1}{x-1}\right) \quad (C)$

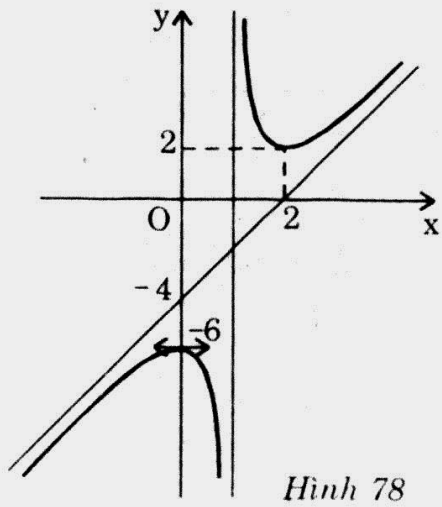
$D = R \setminus \{1\}$

$y' = \dfrac{2(x^2 - 2x)}{(x-1)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

$x = 1$ là tiệm cận đứng

$y = 2x - 4$ là tiệm cận xiên

| x | $-\infty$ | | 0 | | 1 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | 0 | − | ‖ | − | 0 | + | |
| y | $-\infty$ | ↗ | −6 | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | 2 | ↗ | $+\infty$ |




*Hình 78*

Đồ thị (hình 78).

**2.** M(x; y) trên (C) có tọa độ nguyên

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \in Z \\ y = 2x - 4 + \dfrac{2}{x-1} \in Z \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x - 1 = \pm 1 \\ x - 1 = \pm 2 \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow \quad x \in (-1; 0; 2; 3)$ ta có 4 điểm trên (C) có tọa độ nguyên là

$M_1(-1; -7)$, $M_2(0; -6)$, $M_3(2; 2)$, $M_4(3; 3)$.

**3.** $\forall m \neq 0$ nghiệm của mẫu khác nghiệm của tử do đó y là hàm số

$\Rightarrow \quad \lim\limits_{x \to 1} = \infty.$

Vậy $x = 1$ là tiệm cận đứng cố định.

$$y = \frac{(m+1)(x^2 - 3x) + 2(2m+1)}{mx - m} = \frac{m+1}{m}x - \frac{2(m+1)}{m} + \frac{2m}{mx - m}$$

$\Rightarrow \quad y = \dfrac{m+1}{m}x - \dfrac{2(m+1)}{m}$ là phương trình tiệm cận xiên

$M(x_o; y_o)$ là điểm cố định của tiệm cận xiên

$\Leftrightarrow \quad y_o = \dfrac{m+1}{m}x_o - \dfrac{2(m+1)}{m} \quad \forall m$

$\Leftrightarrow \quad (y_o + 2 - x_o)m + 2 - x_o = 0 \quad \forall m$

$\Leftrightarrow \quad M(2; 0)$ là điểm cố định của tiệm cận xiên.



www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

# 10- VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ MANG DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

## I- NHỮNG VẤN ĐỀ CƠ BẢN

**1. *Xét các đồ thị :*** $(C) : y = f(x)$

$(C_1) : y = |f(x)|$

$(C_2) : y = f(|x|)$

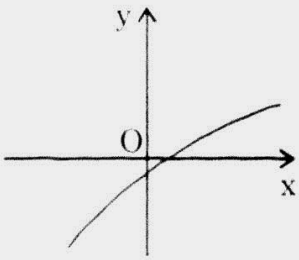
$(C_3) : y = |f(|x|)|$

$(C_1)$ : *Cách vẽ $(C_1)$ suy ra từ đồ thị của $(C)$.*

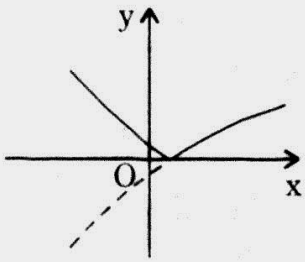
$(C_1)$ : *Giữ nguyên phần của $(C)$ ứng với $y \geq 0$ lấy đối xứng của phần của $(C)$ có $y < 0$ qua $Ox$.*

$(C_2)$ : *Giữ nguyên phần của $(C)$ ứng với $x \geq 0$ rồi lấy đối xứng của chính phần được giữ nguyên đó qua $Oy$ : $(C_2)$ là đồ thị của hàm số chẵn.*

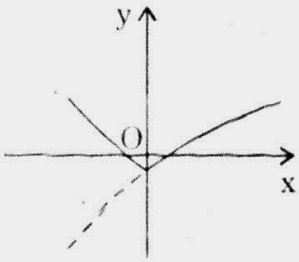
$(C_3)$ : *Áp dụng quy tắc để vẽ $(C_1)$ cho $(C_2)$.*



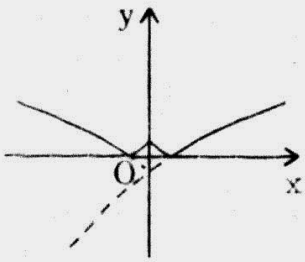

*Hình 79*




*Hình 80*




*Hình 81*




*Hình 82*

**2. *Để vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x, |g(x)|)$ ta thực hiện các việc :***

– *Xét dấu $g(x)$. Ví dụ :*

| $x$ | $-\infty$ | | $a$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

– *Phân tích :* $y = f(x, |g(x)|) = \begin{cases} f(x, -g(x)) & (x \leq a) \quad (C) \\ f(x, g(x)) & (x \geq a) \quad (C') \end{cases}$

– *Vẽ $(C)$ và $(C')$ rồi hợp lại.*

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

## II- TOÁN MINH HỌA

**Đề 47** Cho hàm số : $y = f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 6}{x + 2}$.

**1.** Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

**2.** Từ đồ thị (C) suy ra đồ thị của hàm số :

$$y = |f(x)| = \left|\frac{x^2 + 3x + 6}{x + 2}\right| \qquad (C_1)$$

$$y = f(|x|) = \frac{x^2 + 3|x| + 6}{|x| + 2} \qquad (C_2)$$

$$y = |f(|x|)| = \frac{x^2 + 3|x| + 6}{|x| + 2} \qquad (C_3)$$

*Giải*

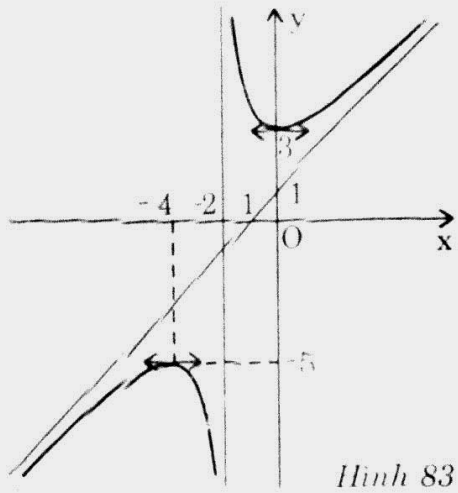
**1.** $y = f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 6}{x + 2} = x + 1 + \dfrac{4}{x + 2}$

$D = R \setminus \{-2\}$

$y' = \dfrac{x^2 + 4x}{(x + 2)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -4 \vee x = 0$

| x | $-\infty$ | | $-4$ | | $-2$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | 0 | − | ‖ | − | 0 | + | |
| y | $-\infty$ | ↗ | $-5$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | 3 | ↗ | $+\infty$ |

Đồ thị (hình 83).



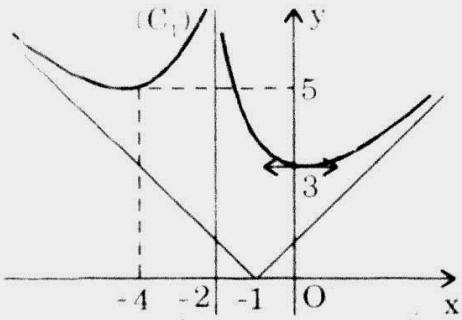

*Hình 83*

**2.** $y = f(x) = \left|\dfrac{x^2 + 3x + 6}{x + 2}\right| = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 3x + 6}{x + 2} & \text{nếu } x > -2 \\ -\dfrac{x^2 + 3x + 6}{x + 2} & \text{nếu } x < -2 \end{cases} \qquad (C_1)$



www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

Suy ra đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ (hình 84).

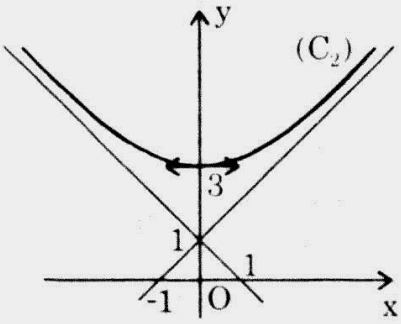



*Hình 84*

* Hàm $y = f(|x|) = \dfrac{x^2 + 3|x| + 6}{|x| + 2}$ $(C_2)$

y là hàm chẵn nên đồ thị đối xứng qua Oy

$\Rightarrow$ Đồ thị $(C_2)$ (hình 85).




*Hình 85*

* Hàm $y = |f(|x|)| = \dfrac{x^2 + 3|x| + 6}{|x| + 2}$ $(C_3)$

$= f(|x|)$ $\forall x \in D$

$\Rightarrow$ Đồ thị $(C_3)$ của hàm số $y = |f(|x|)|$ giống $(C_2)$.

**Đề 48** Cho hàm số : $y = f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 3}$

**1.** Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

**2.** Từ đồ thị (C) suy ra đồ thị của các hàm số sau :

$$y = |f(x)| = \left|\frac{x^2 - x - 2}{x - 3}\right| \qquad (C_1).$$

$$y = f(|x|) = \frac{x^2 - |x| - 2}{|x| - 3} \qquad (C_2).$$

$$y = |f(|x|)| = \left|\frac{x^2 - |x| - 2}{|x| - 3}\right| \qquad (C_3).$$

***Giải***

**1.** $y = f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 3} = x + 2 + \dfrac{4}{x - 3}$

$D = R \setminus \{3\}$

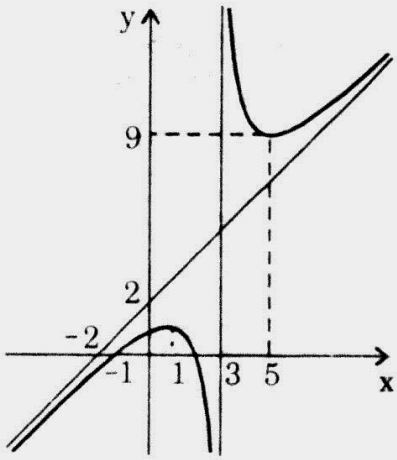
$y' = \dfrac{x^2 - 6x + 5}{(x - 3)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \vee x = 5$

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

| x | $-\infty$ | | 1 | | 3 | | 5 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | 0 | − | ‖ | − | 0 | + | |
| y | $-\infty$ | ↗ | 1 | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | 9 | ↗ | $+\infty$ |

$f(-1) = f(2) = 0$

Đồ thị (hình 86).

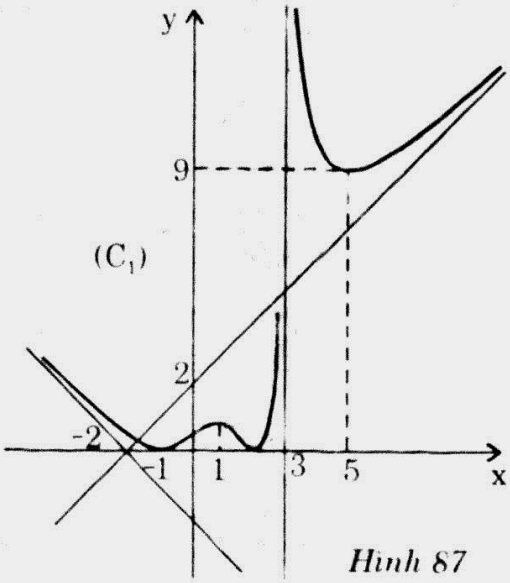



*Hình 86*

**2.** * $y = |f(x)| = \left|\dfrac{x^2 - x - 2}{x - 3}\right|$ $(C_1)$

$$= \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 3} & \text{nếu } x > 3 \vee -1 \le x \le 2 \\ -\dfrac{x^2 - x - 2}{x - 3} & \text{nếu } 2 < x < 3 \text{ hay } x < -1 \end{cases}$$

Suy ra đồ thị $(C_1)$ (hình 87).



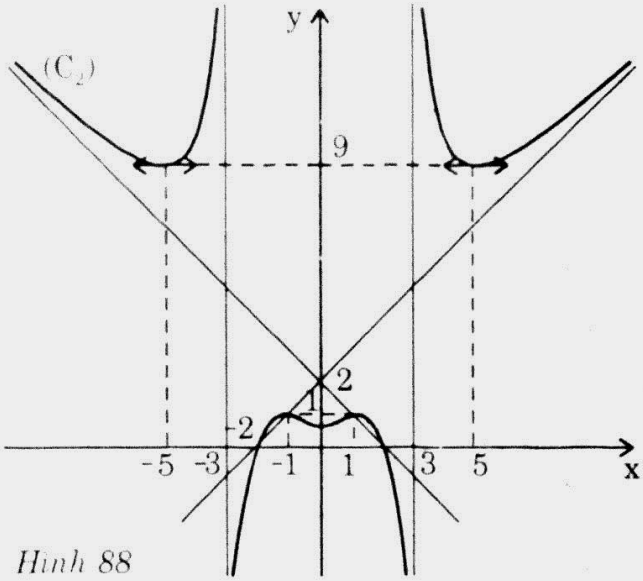

*Hình 87*



www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

* $y = f(|x|) = \dfrac{x^2 - |x| - 2}{|x| - 3}$ $(C_2)$

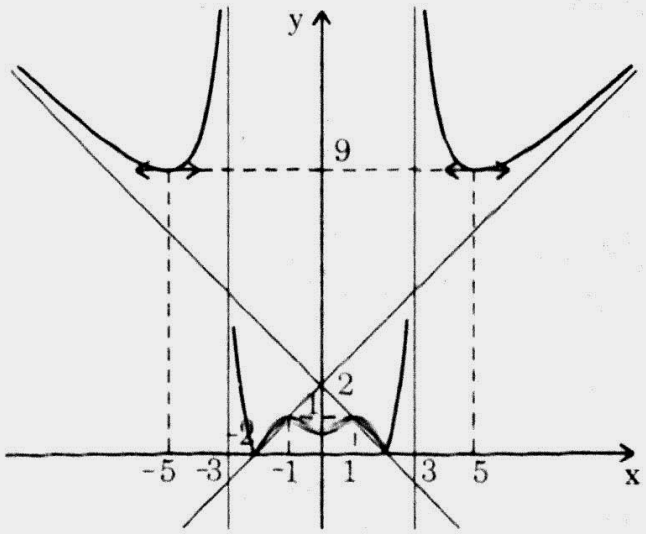
$\Rightarrow$ y là hàm chẵn $\Rightarrow$ $(C_2)$ đối xứng qua Oy (hình 88).




*Hình 88*

* $y = |f(|x|)| = \left|\dfrac{x^2 - |x| - 2}{|x| - 3}\right| = \begin{cases} f(|x|) & \text{nếu } |x| > 3 \text{ hay } |x| < 2 \\ -f(|x|) & \text{nếu } 2 < |x| < 3 \end{cases}$ $(C_3)$

Suy ra đồ thị (hình 89).




*Hình 89*

**Đề 49** Cho hàm số : $y = f(x) = \dfrac{-x^2 - 4x + 3}{|x + 6|}$.

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số trên.

**2.** Dùng đồ thị biện luận số nghiệm của phương trình :

$$x^2 + 4x + (\log_{\frac{1}{2}} m)\,|x + 6| - 3 = 0.$$

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SP5

*Giải*

$$y = f(x) = \frac{-x^2 - 4x + 3}{|x + 6|} \quad (C)$$

Xét hàm $h = \dfrac{x^2 + 4x - 3}{x + 6} = x - 2 + \dfrac{9}{x + 6}$

$D = R \setminus \{-6\}$

$h' = \dfrac{x^2 + 12x + 27}{(x + 6)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -3 \vee x = -9$

$x = -6$ là tiệm cận đứng

$y = x - 2$ là tiệm cận xiên

$$y = f(x) = \begin{cases} h & \text{nếu } x < -6 \\ -h & \text{nếu } x > -6 \end{cases}$$

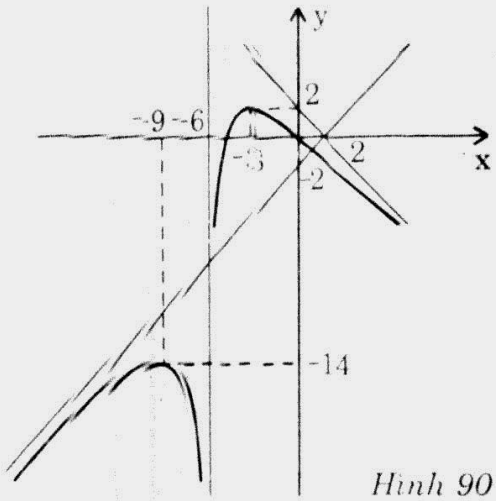
Do đó :

| x | $-\infty$ | | $-9$ | | $-6$ | | $-3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| h' | | + | 0 | − | ‖ | − | 0 | + | |
| h | $-\infty$ | ↗ | $-14$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $-2$ | ↗ | $+\infty$ |

Suy ra

| x | $-\infty$ | | $-9$ | | $-6$ | | $-3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | 0 | − | ‖ | + | 0 | − | |
| y | $-\infty$ | ↗ | $-14$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $-2$ | ↘ | $-\infty$ |

Đồ thị (hình 90).




*Hình 90*

**2.** $x^2 + 4x + (\log_{\frac{1}{2}} m)\,|x + 6| - 3 = 0$ (1)



www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

$$\Leftrightarrow \quad \log_{\frac{1}{2}} m = \frac{-x^2 - 4x + 3}{x + 6}$$

Số nghiệm của (1) là số giao điểm của $(\Delta): y = \log_{\frac{1}{2}} m$ với (C)

* $\log_{\frac{1}{2}} m > 2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < m < \frac{1}{4}$ : (1) vô nghiệm

* $\log_{\frac{1}{2}} m = 2 \quad \Leftrightarrow \quad m = \frac{1}{4}$ : (1) có 1 nghiệm kép

* $-14 < \log_{\frac{1}{2}} m < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{4} < m < 2^{14}$ : (1) có 2 nghiệm

* $\log_{\frac{1}{2}} m = -14 \quad \Leftrightarrow \quad m = 2^{14}$ : (1) có 3 nghiệm (2 nghiệm đơn và 1 nghiệm kép)

* $\log_{\frac{1}{2}} m < -14 \quad \Leftrightarrow \quad m > 2^{14}$ : (1) có 4 nghiệm.

**Đề 50** Cho hàm số : $y = \dfrac{x}{1 + |x|}$.

1. Dùng định nghĩa của đạo hàm tính $f'(0)$.
2. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số.
3. Tìm số a lớn nhất sao cho với mọi x : $\dfrac{x}{1 + |x|} \geq ax^2 + x$.

***Giải***

$$y = f(x) = \frac{x}{1 + |x|} \qquad (C)$$

**1.** $$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{1 + |x|} = 1$$

**2.** $$y = f(x) = \begin{cases} h(x) = \dfrac{x}{1 + x} & (C_1) \text{ nếu } x \geq 0 \\ g(x) = \dfrac{x}{1 - x} & (C_2) \text{ nếu } x < 0 \end{cases}$$

$D = R$

$$h'(x) = \frac{1}{(1 + x)^2} > 0 \qquad \forall x \geq 0$$

$$g'(x) = \frac{1}{(1 - x)^2} > 0 \qquad \forall x < 0$$

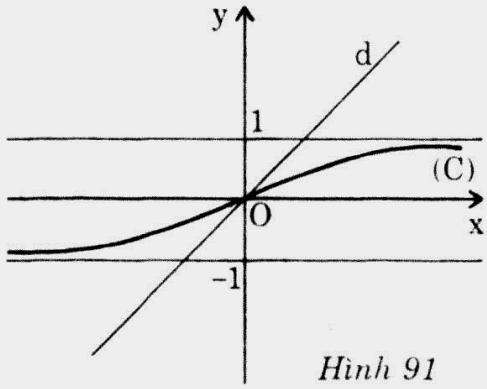
www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

$\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad y = 1$ là tiệm cận ngang của $(C_1)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -1 \quad \Rightarrow \quad y = -1$ là tiệm cận ngang của $(C_2)$

| x | $-\infty$ | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| h' | | | 1 | + | |
| g' | | + | 1 | | |
| y | $-1$ | ↗ | 0 | ↗ | 1 |

**Đồ thị (chú ý tiếp tuyến tại O là d : y = x) (hình 91).**




*Hình 91*

**3.** CÁCH 1 : $y = ax^2 + x$ (P)

* $a = 0$ không thỏa mãn bài toán

* $a > 0 \quad \Rightarrow \quad y' = 2ax + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\dfrac{1}{2a}$

$\Rightarrow$ $a > 0$ không thỏa mãn bài toán

| x | $-\infty$ | | $-\dfrac{1}{2a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y' | | − | 0 | + | |
| y | $+\infty$ | ↘ | $-\dfrac{1}{4a}$ | ↗ | $+\infty$ |

* $a < 0$

| x | $-\infty$ | | $-\dfrac{1}{2a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | 0 | − | |
| y | $-\infty$ | ↗ | $-\dfrac{1}{4a}$ | ↘ | $-\infty$ |



www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

(P) tiếp xúc (C) $\Leftrightarrow$ $ax^2 + x = \dfrac{x}{1+|x|}$ (1) có nghiệm kép

$\Leftrightarrow$ $x^2(a|x| + a + \text{sgn}(x)) = 0$ có nghiệm kép

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{nếu } x < 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \\ 1 & \text{nếu } x > 0 \end{cases}$$

Xét $a|x| + a + \text{sgn}(x) = \begin{cases} ax + 1 + a & \text{nếu } x < 0 \\ a < 0 & \text{nếu } x = 0 \\ -ax + a - 1 & \text{nếu } x > 0 \end{cases}$

* Nếu $-1 < a < 0$ : (1) có nghiệm kép $x = 0$ và 1 nghiệm đơn $x = -\dfrac{1+a}{a} > 0$

$\Rightarrow$ (P) cắt (C).

Trường hợp này $\dfrac{x}{1+|x|} < ax^2 + x$, $0 < \forall x < -\dfrac{1+a}{a}$ không thỏa mãn bài toán.

* Nếu $a \le -1$ thì (1) chỉ có nghiệm kép $x = 0$ $\Rightarrow$ (P) chỉ tiếp xúc (C) tại 0 mà không cắt (C) $\Rightarrow$ $\dfrac{x}{1+|x|} \ge ax^2 + x \quad \forall x$ (*)

Giá trị lớn nhất của a thỏa mãn (*) là $a = -1$.

*CÁCH 2 :* $\dfrac{x}{1+|x|} \ge ax^2 + x \quad \forall x$

$\Leftrightarrow$ $x^2(a|x| + a + \text{sgn}(x)) \le 0 \quad \forall x$

$\Leftrightarrow$ $a|x| + a + \text{sgn}(x) \le 0 \quad \forall x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a(1+x) + 1 \le 0 & \forall x > 0 \\ a \le 0 & \text{với } x = 0 \\ a(1-x) - 1 \le 0 & \forall x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \le -\dfrac{1}{1+x} & \forall x > 0 \\ a \le 0 & \text{với } x = 0 \quad (1) \\ a \le \dfrac{1}{1-x} & \forall x < 0 \end{cases}$$

Vì $\forall x > 0$, ta có $-\dfrac{1}{1+x} > -1$

$\forall x < 0$, $\dfrac{1}{1-x} > 0$

Vậy I $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} a \le -1 \\ a \le 0 \\ a < 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $a \le -1$

Giá trị lớn nhất của a thỏa mãn bài toán là $a = -1$.

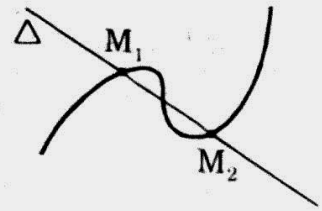
www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

# 11- ĐƯỜNG THẲNG ĐI QUA CÁC ĐIỂM ĐẶC BIỆT CỦA ĐỒ THỊ

## I- NHỮNG VẤN ĐỀ CƠ BẢN

**1.** *Để lập phương trình của đường thẳng Δ đi qua các điểm đặc biệt của đồ thị (C) : y = f(x) ta thực hiện các việc :*

- *Gọi M(x; y) là điểm đặc biệt*
- *Lập hệ các phương trình mà tọa độ **M phải** thỏa mãn.*
- *Từ hệ phương trình trên rút ra một **phương trình hệ quả bậc 1** :* $y = ax + b$
- *Phương trình Δ là :* $y = ax + b$



*Hình 92*

**2.** *Các trường hợp thường gặp :*

- *Lập phương trình đường thẳng đi qua 2 **điểm** cực trị của hàm bậc 3 (C) : y = f(x)*

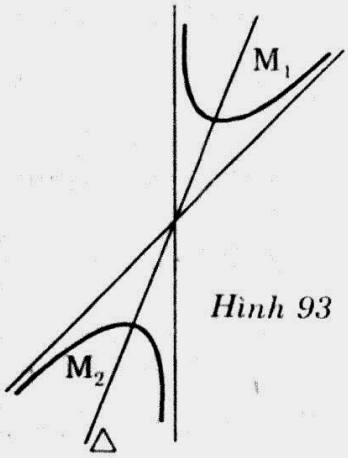
  * *Tính f '(x)*

  * *Chia đa thức* $f(x) = f'(x)\,q(x) + ax + b$

  * *M(x; y) là điểm cực trị*

  $$\Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ y = f(x) = f'(x)q(x) + r(x) \end{cases} \Rightarrow \quad y = ax + b$$

  * *Kết luận* $\Delta : y = ax + b.$



*Hình 93*

- *Lập phương trình đường thẳng đi qua 2 **điểm** cực trị của hàm* $y = \dfrac{u(x)}{v(x)}$

  * *M(x; y) là điểm cực trị* $\Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{u(x)}{v(x)} \\ y = \dfrac{u'(x)}{v'(x)} \end{cases} \Rightarrow \quad y = ax + b$

  * *Kết luận* $\Delta : y = ax + b.$

## II- BÀI TOÁN MINH HỌA

**Đề 51** Chứng tỏ rằng các hàm số sau luôn có **hai cực trị** và viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị **của hàm số** :

**1.** $y = f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + m.$

**2.** $y = f(x) = -2x^3 - mx^2 + x + m + 1.$


www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

*Giải*

**1.** $y = x^3 - 3x^2 - 9x + m$

$y' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3)$

$\Delta' = 9 + 27 = 36 > 0$

Vậy y' luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Rightarrow$ y luôn có hai cực trị

$$y = f(x) = (x-1)(x^2 - 2x - 3) - 8x + m - 3$$

$$= \frac{(x-1)y'}{3} - 8x + m - 3$$

$f(x_1) = -8x_1 + m - 3$ ; $f(x_2) = -8x_2 + m - 3$ ;

$\Rightarrow$ Đường thẳng qua hai điểm cực trị là d : $y = -8x + m - 3$.

**2.** $y = f(x) = -2x^3 - mx^2 + x + m + 1$

$y' = -6x^2 - 2mx + 1$

$\Delta' = m^2 + 6 > 0 \quad \Rightarrow \quad$ y có hai cực trị

$$y = \frac{1}{3}\left(x + \frac{m}{6}\right)y' + \frac{1}{3}\left(2 + \frac{m^2}{3}\right)x + \frac{17m}{18} + 1$$

Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là d : $y = \frac{1}{3}\left(2 + \frac{m^2}{3}\right)x + \frac{17m}{18} + 1$.

**Đề 52** Cho họ đường cong $(C_m)$ : $y = f(x) = \dfrac{x^2 + mx - 6}{x - m}$.

1. Tìm những điểm trong mặt phẳng mà $\forall m$ $(C_m)$ đều không đi qua.
2. Tìm m để $(C_m)$ có hai cực trị. Chứng tỏ rằng lúc đó giá trị hai cực trị là cùng dấu. Lập phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị.
3. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số với m = 2.

*Giải*

$$y = \frac{x^2 + mx - 6}{x - m} \qquad (C_m)$$

**1.** $M(x_o; y_o) \notin (C_m)$ $\forall m \quad \Leftrightarrow \quad y_o = \dfrac{x_o^2 + mx_o - 6}{x_o - m}$ vô nghiệm m

$\Leftrightarrow \quad (x_o + y_o)m + x_o^2 - 6 - x_oy = 0$ vô nghiệm m

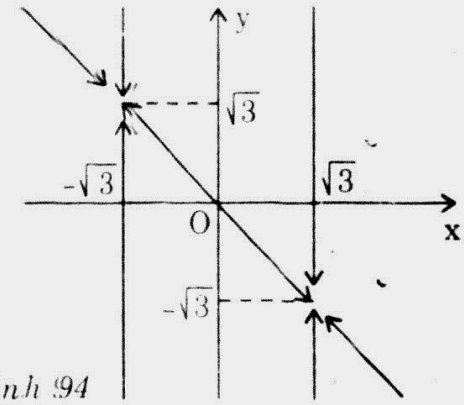
hay có nghiệm $m = x_o$ với $y_o \neq \dfrac{x_o^2 + mx_o - 6}{x_o - m}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_o = -y_o \\ 2x_o^2 \neq 6 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} (x_o + y_o)x_o + x_o^2 - 6 - x_oy_o = 0 \\ y_o \neq \dfrac{x_o^2 + mx_o - 6}{x_o - m} \end{cases}$$

Facebook.com/TeacherSokPiseth www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_o = -y_o \\ x_o \neq \pm\sqrt{3} \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x_o = \sqrt{3} \text{ và } \forall y_o \neq -\sqrt{3} \\ x_o = -\sqrt{3} \text{ và } \forall y_o \neq \sqrt{3} \end{cases}$$

Minh họa tập hợp các điểm $M(x_o; y_o) \in (C_m)$ $\forall m$ trên đồ thị (hình 94).




*Hình 94*

**2.** $y' = \dfrac{x^2 - 2mx + 6 - m^2}{(x - m)^2}$

$(C_m)$ có hai cực trị $\Leftrightarrow \begin{cases} y \text{ là hàm số} \\ x^2 - 2mx + 6 - m^2 = 0 \\ \text{có 2 nghiệm phân biệt khác m} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m.m - 6 \neq 0 \\ \Delta' = m^2 - 6 + m^2 > 0 \\ m^2 - 2m.m + 6 - m^2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad m < -\sqrt{3} \text{ hay } m > \sqrt{3}$$

$x_1$, $x_2$ là hai nghiệm của $y'$

$y(x_1).y(x_2) = (2x_1 + m)(2x_2 + m) = 4x_1x_2 + 2m(x_1 + x_2) + m^2 = m^2 + 24 > 0$

$\Rightarrow$ $y(x_1)$ cùng dấu $y(x_2)$

**3.** $m = 2 \Rightarrow \quad y = \dfrac{x^2 + 2x - 6}{x - 2} = x + 4 + \dfrac{2}{x - 2}$

$D = R \setminus \{2\}$

$y' = \dfrac{x^2 - 4x + 2}{(x - 2)^2}$

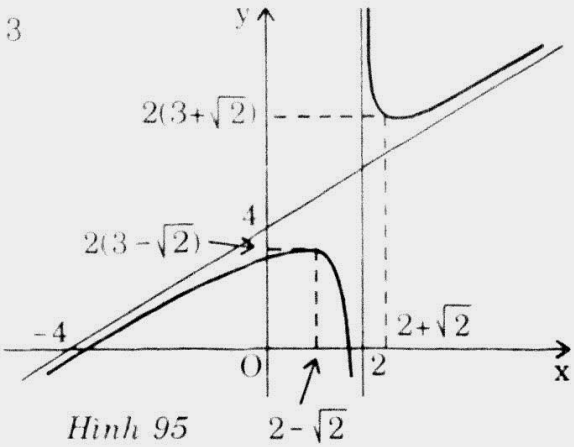
| x | $-\infty$ | | $2-\sqrt{2}$ | | 1 | | $2+\sqrt{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | 0 | − | ‖ | − | 0 | + | |
| y | $-\infty$ | ↗ | $2(3-\sqrt{2})$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $2(3+\sqrt{2})$ | ↗ | $+\infty$ |



www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

$x = 0 \Rightarrow y = 3$

Đồ thị hình 95).




*Hình 95*

**Đề 53** Cho hàm số : $y = f(x) = \dfrac{x^2 + x + m}{x^2 - 1}$.

**1.** Tìm m để hàm số có cực đại và cực tiểu.

**2.** Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số với $m = \dfrac{1}{4}$.

**3.** Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị.

***Giải***

**1.** $y = f(x) = \dfrac{x^2 + x + m}{x^2 - 1}$

$$y' = \frac{-x^2 - 2(m+1)x - 1}{(x^2-1)^2};$$

Hàm y có cực đại, cực tiểu nghĩa là :

$$\begin{cases} \text{y là hàm số} \\ x^2 + 2(m+1)x + 1 = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt} \\ x_1, x_2 \neq \pm 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 1 + m \neq 0 \\ 1 + 1 + m \neq 0 \\ 1 + 2(m+1) + 1 \neq 0 \\ 1 - 2(m+1) + 1 \neq 0 \\ \Delta' = (m+1)^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \text{ và } m \neq -2 \\ m^2 + 2m > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m < -2 \text{ hay } m > 0.$$

**2.** $m = \dfrac{1}{4} \Rightarrow f(x) = \dfrac{x^2 + x + \frac{1}{4}}{x^2 - 1}$

$D = R \setminus \{-1; 1\}$

$$y' = -\frac{\left(x^2 + \frac{5}{2}x + 1\right)}{(x^2-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

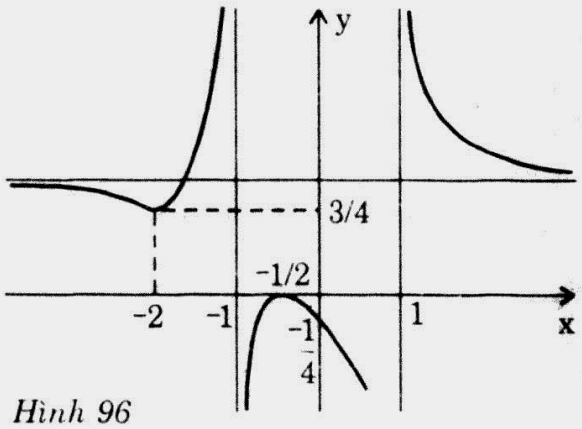
$\lim\limits_{x \to 1} y = \infty$ và $\lim\limits_{x \to -1} y = \infty \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$ là 2 tiệm cận đứng

$\lim\limits_{x \to \infty} y = 1 \Rightarrow y = 1$ là tiệm cận ngang

| x | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | |
| y | $1$ ↘ | | $\frac{3}{4}$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $0$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $1$ |

$x = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{4}$

Đồ thị (hình 96).




*Hình 96*

**3.** $x_o$ là điểm cực trị $\Rightarrow y(x_o) = 1 + \frac{1}{2x_o}$

Đường thẳng $\Delta$ qua hai điểm cực trị $A\left(x_1, 1 + \frac{1}{2x_1}\right)$; $B\left(x_2, 1 + \frac{1}{2x_2}\right)$ có hệ số góc k.

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{1}{2x_2} - \frac{1}{2x_1}}{x_2 - x_1} = \frac{1}{2}\frac{x_1 - x_2}{(x_2 - x_1)x_1x_2} = -\frac{1}{2}$$

($x_1$, $x_2$ là nghiệm của y')

$$\Rightarrow \quad \Delta : y = -\frac{1}{2}x + b$$

$$y_1 + y_2 = -\frac{1}{2}(x_1 + x_2) + 2b$$

$$2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} + \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = 2b \quad \Rightarrow \quad b = -m$$

$$\Rightarrow \quad \Delta : y = -\frac{1}{2}x - m$$



www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

**Đề 54** Cho hàm số : $y = f(x) = \dfrac{x + m}{x^2 + 1}$ $(C_m)$.

1. Chứng minh 3 điểm uốn nếu có của $(C_m)$ luôn thẳng hàng.
2. Lập phương trình đường thẳng đi qua 3 điểm uốn.

***Giải***

**1.** $y = f(x) = \dfrac{x + m}{x^2 + 1}$ ;

$$y' = \frac{-x^2 - 2mx + 1}{(x^2 + 1)^2}$$

$$y'' = \frac{2(x^3 + 3mx^2 - 3x - m)}{(x^2 + 1)^3} = \frac{(x + 3m)(x^2 + 1) - 4(x + m)}{(x^2 + 1)^3}$$

$M(x_0; y_0)$ là điểm uốn $\Rightarrow$ $x_0$ là nghiệm của : $\Rightarrow$ $x_0 + 1 = \dfrac{4(x_0 + m)}{x_0 + 3m}$

Vậy $y_0 = \dfrac{x_0 + m}{x_0^2 + 1} = \dfrac{x_0 + 3}{4}$

$\Rightarrow$ M nằm trên $(\Delta)$ : $y = \dfrac{x}{4} + \dfrac{3}{4}$

$\Rightarrow$ 3 điểm uốn của đồ thị (nếu có) thẳng hàng.

**Đề 55** Cho hàm số : $y = f(x) = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3$ với m là tham số.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi m = 1.
2. Chứng minh rằng hàm số luôn luôn có cực đại và cực tiểu. Lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị.
3. Xác định m để hàm số tăng trên khoảng (0; 2).

***Giải***

$$y = f(x) = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3$$

**1.** m = 1 $\Rightarrow$ $y = x^3 - 3x - 1$

$D = R$

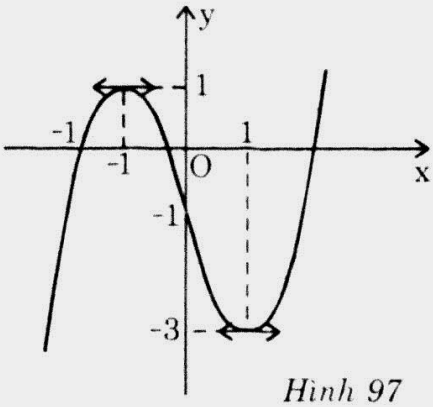
$y' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

$y'' = 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow$ I(0; –1) là điểm uốn.

| x | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | 0 | – | 0 | + | |
| y | $-\infty$ | ↗ | 1 | ↘ | –3 | ↗ | $+\infty$ |

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

Đồ thị (hình 97).




*Hình 97*

**2.** $y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1) = 3(x^2 - 2mx + m^2 - 1)$

$\Delta' = 1 > 0 \Rightarrow$ y luôn có cực đại và cực tiểu

$$y = \frac{y'}{3}(x - m) - (2x + m)$$

$x_0$ là cực trị thì $y_0 = -2x_0 - m$

Đường thẳng qua hai cực trị là $y = -2x - m$.

**3.** y tăng trên (0; 2)

$\Leftrightarrow \quad x^2 - 2mx + m^2 - 1 \geq 0 \quad \forall x \in (0; 2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 1 > 0 \\ y'(0) = m^2 - 1 \geq 0 \\ 0 > \dfrac{S}{2} = m \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} \Delta' = 1 > 0 \\ y'(2) = m^2 - 4m + 3 \geq 0 \\ 2 < \dfrac{S}{2} = m \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \quad m < -1$ hay $m \geq 3$.



www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

# 12- MỘT HỌ CÁC ĐỒ THỊ TIẾP XÚC VỚI MỘT ĐƯỜNG CỐ ĐỊNH

## I- NHỮNG VẤN ĐỀ CƠ BẢN

*Để chứng minh họ đồ thị $(C_m)$ : $y = f(x; m)$ luôn tiếp xúc với một đường cố định (L) ta thực hiện các việc :*

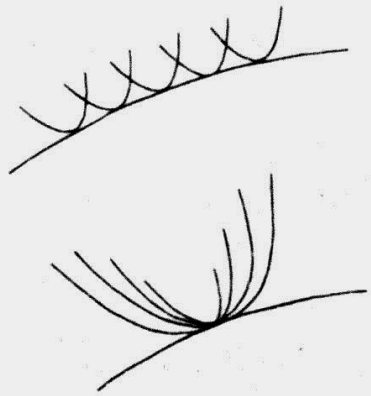
**1.** *Nếu đã biết dạng của (L).*

*Ví dụ : (L) : $y = g(x)$*

*a) Lập phương trình hoành độ giao điểm của $(C_m)$ và (L) :*

$$f(x; m) = g(x) \qquad (1)$$

*b) Từ điều kiện phương trình (1) phải có nghiệm kép $\forall m$ ta xác định được $g(x)$.*



*Hình 98*

**2.** *Nếu chưa biết dạng của (L)*

*a) Phân tích $f(x; m) = [a(m).x + b(m)]^2 + g(x)$ trong đó $g(x)$ độc lập với m.*

*b) Xét đường cố định (L) : $y = g(x)$*

*c) Do phương trình hoành độ giao điểm của $(C_m)$ và (L) :*

$$[a(m)x + b(m)^2] + g(x) = g(x)$$

*luôn có nghiệm kép $\forall m$ vậy $(C_m)$ luôn tiếp xúc với (L).*

## II- BÀI TOÁN MINH HỌA

**Đề 56** Chứng minh rằng các đường sau luôn tiếp xúc với một đường cố định :

**1.** $y = f(x) = 5x^2 - (4m + 3)x + m^2 + 2$

**2.** $y = f(x) = -2mx - m^2 + 1$ **3.** $y = f(x) = \dfrac{2x^2 + mx - 1}{-3mx + 3}$.

### *Giải*

**1.** $y = f(x) = 5x^2 - (4m + 3)x + m^2 + 2 \quad (C_m)$

$= (4x^2 - 4mx + m^2) + x^2 - 3x + 2 = (m - 2x)^2 + x^2 - 3x + 2$

$g(x) = x^2 - 3x + 2 \quad (P)$

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và $(C_m)$

$(m - 2x)^2 = 0$ có nghiệm kép.

Vậy $(C_m)$ luôn tiếp xúc (P) $\forall m$.

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

**2.** $y = f(x) = -2mx - m^2 + 1 \quad (C_m)$

$= -(m^2 + 2mx + x^2) + x^2 + 1$

Tương tự (C) : $y = x^2 + 1$ luôn tiếp xúc $(C_m) \quad \forall m$

**3.** $y = f(x) = \dfrac{2x^2 + mx - 1}{-3mx + 3} = -\dfrac{1}{3} - \dfrac{2x^2}{3(mx - 1)} \quad (C_m)$

$(C_m)$ tiếp xúc với (d) : $y = -\dfrac{1}{3}$ cố định.

**Đề 57** Cho hàm số : $y = f(x) = x^3 - 2x^2 + mx + \dfrac{1 - m^2}{4}$ có đồ thị là $(C_m)$.

**1.** Khảo sát và vẽ đồ thị (C) với m = 1.

**2.** Dùng đồ thị xét dấu các nghiệm của phương trình : $x^3 - 2x^2 - m = 0$.

**3.** Chứng minh rằng $(C_m)$ luôn tiếp xúc với một đường cong cố định.

***Giải***

**1.** $$y = f(x) = x^3 - 2x^2 + mx + \frac{1 - m^2}{4}$$

$m = 1 \Rightarrow \quad y = x^3 - 2x^2 + x$

$D = R$

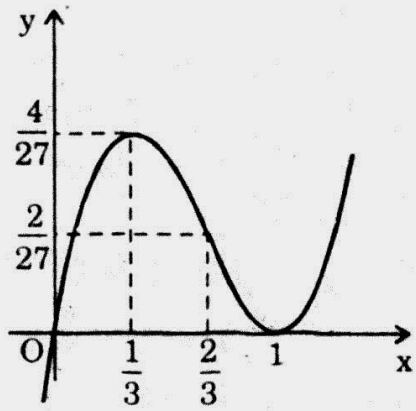
$y' = 3x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow \quad x = 1 \vee x = \dfrac{1}{3}$

$y'' = 6x - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{2}{3} \quad \Rightarrow$ điểm uốn $I\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{27}\right)$

| x | $-\infty$ | | $\frac{1}{3}$ | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | 0 | − | 0 | + | |
| y | $-\infty$ | ↗ | $\frac{4}{27}$ | ↘ | 0 | ↗ | $+\infty$ |

$x = 0 \vee x = 1 \Rightarrow y = 0$

Đồ thị (hình 99.1).




*Hình 99.1*

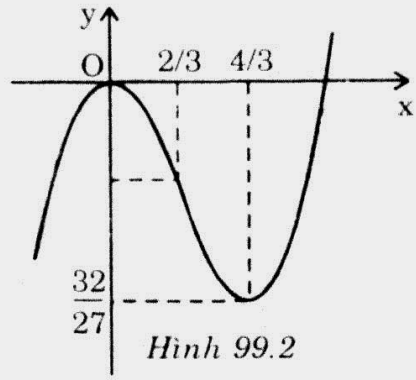
**2.** $x^3 - 2x^2 - m = 0 \quad (1) \quad \Leftrightarrow \quad y = x^3 - 2x^2 = m$

$y' = 3x^2 - 4x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee x = \dfrac{4}{3}$



www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok-SPS

| x | $-\infty$ | | 0 | | $\frac{4}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | 0 | − | 0 | + | |
| y | $-\infty$ | ↗ | 0 | ↘ | $-\frac{32}{27}$ | ↗ | $+\infty$ |



*Hình 99.2*

Đồ thị của $y = x^3 - 2x^2$ (hình 99.2).

* $m < -\frac{32}{27}$ : (1) có nghiệm âm.

* $m = -\frac{32}{27}$ : (1) có 1 nghiệm đơn âm và 1 nghiệm kép $x = \frac{4}{3}$.

* $-\frac{32}{27} < m < 0$ : (1) có 2 nghiệm dương và 1 nghiệm âm.

* $m = 0$ : (1) có 1 nghiệm kép $x = 0$ và 1 nghiệm dương.

* $m > 0$ : (1) có 1 nghiệm dương.

**3.** $y = \frac{1}{4}(-m^2 + 4mx - 4x^2) + x^3 - x^2 + \frac{1}{4}$ $(C_m)$

$= -\frac{1}{4}(2x - m)^2 + x^3 - x^2 + \frac{1}{4}$

Vậy $(C_m)$ luôn tiếp xúc (C) : $y = x^3 - x^2 + \frac{1}{4}$ cố định.

**Đề 58** Chứng minh rằng tiệm cận xiên của đồ thị hàm số :

$$(C_m) = y = \frac{(m+1)x^2 - 2mx - m^3 + m^2 + 2}{x - m}$$

luôn tiếp xúc với một đường cố định.

***Giải***

$$(C_m) = y = \frac{(m+1)x^2 - 2mx - m^3 + m^2 + 2}{x - m} = (m+1)x + m(m-1) + \frac{2}{x - m}$$

(d) : $y = (m+1)x + m(m-1)$ (là tiệm cận xiên)

$= m^2 + m(x-1) + x = m^2 + m(x-1) + \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{4} + x$

$= \left(\frac{x}{2} + \frac{2m-1}{2}\right)^2 - \frac{x^2 - 6x + 1}{4}$

Vậy $(C_m)$ tiếp xúc (C) : $y = \frac{x^2 - 6x + 1}{4}$.

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

**Đề 59** Cho hàm số : $y = f(x) = \dfrac{2mx^2 - m(m+2)x + m^2 + 1}{x - 1}$.

1. Tìm các tiệm cận của đồ thị. Chứng minh rằng khi m thay đổi, tiệm cận xiên của đồ thị tiếp xúc với một parabol cố định.
2. Tìm tập hợp các tâm đối xứng của đồ thị.
3. Xác định m để hàm số đạt cực trị tại các điểm $x_1$, $x_2$ thỏa mãn điều kiện : $2x_1 + x_2 - 1 = 0$.

***Giải***

$$y = f(x) = \frac{2mx^2 - m(m+2)x + m^2 - 1}{x - 1}$$

**1.** $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \infty \Rightarrow$ $x = 1$ là tiệm cận đứng

$y = 2mx - m^2 + \dfrac{1}{x-1} \Rightarrow$ (d) : $y = 2mx - m^2$ là tiệm cận xiên

(d) : $y = 2mx - m^2 = x^2 - (x - m)^2 \Rightarrow$ (d) tiếp xúc với (P) : $y = x^2$ cố định.

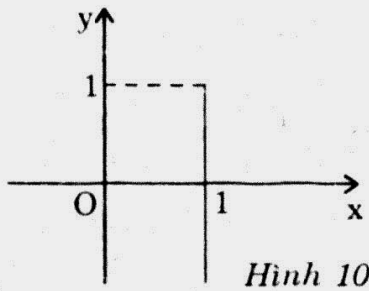
**2.** $2m - m^2$) là giao điểm hai tiệm cận của đồ thị

$\Rightarrow$ I là tâm đối xứng, có hoành độ $x = 1$

tung độ $y = 2m - m^2 = 1 - (1 - m)^2 \le 1$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ $m = 1$.

Tập hợp của $I(1, 2m - m^2)$ là đường thẳng trên đồ thị (hình 100).



*Hình 100*

**3.** $y' = \dfrac{2mx^2 - 4mx + 2m - 1}{(x-1)^2}$

y đạt cực trị tại $x_1$, $x_2$ thỏa mãn : $2x_1 + x_2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow$ $2mx^2 - 4mx + 2m - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1$, $x_2$ thỏa mãn $2x_1 + x_2 - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4m^2 - 2m(2m-1) = 2m > 0 \\ x_1 = 1 - (x_1 + x_2) = 1 - 2 = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 2m(-1)^2 - 4m(-1) + 2m - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{1}{8}.$$

**Đề 60** Cho hàm số : $y = f(x) = \dfrac{(m-2)x - (m^2 - 2m + 4)}{x - m}$

1. Chứng minh rằng hàm số luôn luôn tăng trên các khoảng mà nó xác định.


Facebook.com/TeacherSokPiseth www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

2. Chứng tỏ rằng đồ thị của hàm số luôn tiếp xúc với hai đường thẳng cố định.

3. Tìm các điểm trong mặt phẳng mà đồ thị không thể đi qua dù m lấy bất kì giá trị nào.

***Giải***

$$y = f(x) = \frac{(m-2)x - (m^2 - 2m + 4)}{x - m} \quad (C_m)$$

**1.** $y' = \dfrac{4}{(x-m)^2} > 0 \Rightarrow$ y tăng trên từng khoảng xác định.

**2.** Đường thẳng $x = a$ không tiếp xúc $(C_m)$

$(d) : y = kx + b$ tiếp xúc $(C_m)$

$\Leftrightarrow \quad kx + b = \dfrac{(m-2)x - (m^2 - 2m + 4)}{x - m}$ có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \begin{cases} kx^2 + [b + 2 - (k+1)m]x + m^2 - (b+2)m + 4 = 0 \\ x \neq m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ \Delta = (k-1)^2 m^2 + 2(b+2)(k-1)m + (b+2)^2 - 16k = 0 \quad \forall m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ (b+2)^2 = 16k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ b = 2 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} k = 1 \\ b = -6 \end{cases}$$

Vậy $d_1 : \quad y = x + 2$

$d_2 : \quad y = x - 6$ đều tiếp xúc $(C_m)$ $\forall m$.

**3.** $M(x_o, y_o) \notin (C_m)\ \forall m \Leftrightarrow y_o = \dfrac{(m-2)x_o - (m^2 - 2m + 4)}{x_o - m}$ vô nghiệm m

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_o \neq m \\ m^2 - (y_o + x_o + 2)m + x_o y_o + 2x_o + 4 = 0 \end{cases} \text{ vô nghiệm m}$$

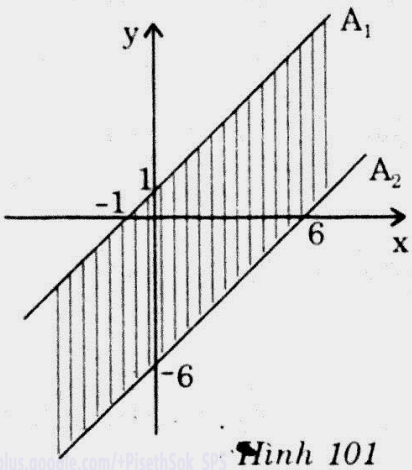
$\Leftrightarrow \quad m^2 - (y_o + x_o + 2)m + x_o y_o + 2x_o + 4 = 0$ vô nghiệm m

$\Leftrightarrow \quad \Delta = (x_o + y_o + 2)^2 - 4(x_o y_o + 2x_o + 4)$

$\qquad = (x_o - y_o - 6)(x_o - y_o + 2) < 0$

$\Leftrightarrow \quad x_o - 6 < y_o < x_o + 2$

Mô tả tập hợp các điểm M trên đồ thị như sau : M trong phần gạch chéo giữa $\Delta_1$ và $\Delta_2$ không thuộc $\Delta_1$, $\Delta_2$.




*Hình 101*

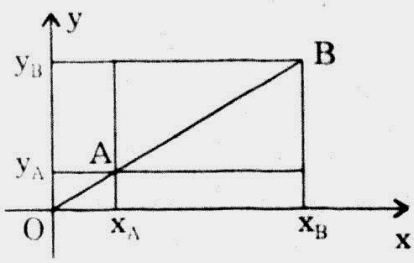
www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok

# 13- KHOẢNG CÁCH

## I- NHỮNG VẤN ĐỀ CƠ BẢN

**1.** *Khoảng cách giữa 2 điểm $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$*

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$



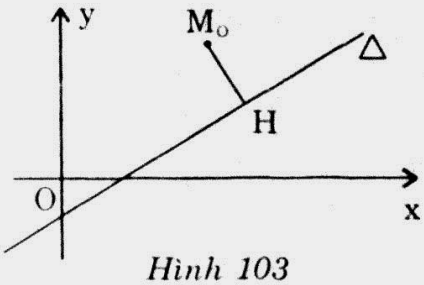

*Hình 102*

**2.** *Khoảng cách từ một điểm $M_o$ đến một đường thẳng $\Delta$*

$M_o(x_o, y_o)$ ;

$\Delta : Ax + By + C = 0$

$$d(M_o, \Delta) = \frac{|Ax_o + By_o + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$




*Hình 103*

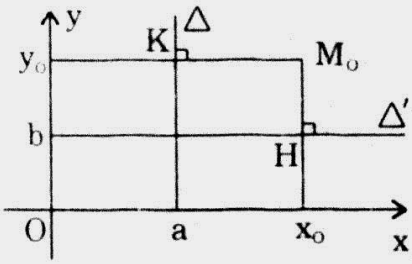
**3.** *Trường hợp đặc biệt :*

$\Delta : x = a$

$d(M_o, \Delta) = |x_o - a|$

$\Delta' : y = b$

$d(M_o, \Delta') = |y_o - b|$.




*Hình 104*

## II- BÀI TOÁN MINH HỌA

**Đề 61** Cho hàm số : $y = f(x) = \dfrac{x^2 - mx + m}{x - 1}$.

**1.** Định m để A(1, 2) là tâm đối xứng của đồ thị.

**2.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số với m vừa tìm được.

**3.** Xác định k sao cho đường thẳng y = k cắt đồ thị (C) tại hai điểm với khoảng cách giữa hai giao điểm bằng $\sqrt{5}$.

***Giải***

$$y = f(x) = \frac{x^2 - mx + m}{x - 1}$$

**1.** Chuyển trục $\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y + 2 \end{cases}$

$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad Y = \dfrac{X^2 - mX + 1}{X}$ ; I(1, 2) là tâm đối xứng

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

$\Leftrightarrow$ Y là hàm lẻ

$\Leftrightarrow$ $X^2 - mX + 1 = X^2 - m(-X) + 1 \quad \forall X$

$\Leftrightarrow$ $m = 0$.

**2.** $m = 0$

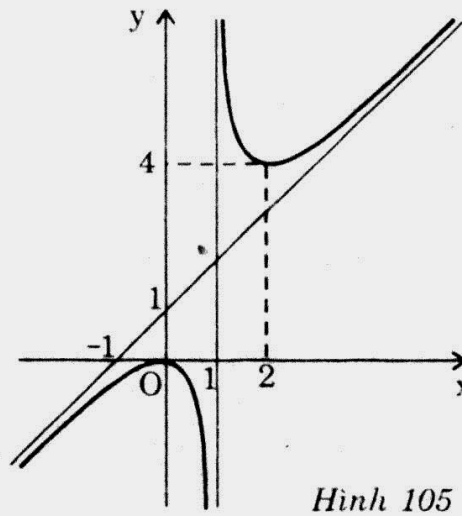
$$y = \frac{x^2}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1} \quad (C)$$

$D = R \setminus \{1\}$

$$y' = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

$x = 1$ là tiệm cận đứng

$y = x + 1$ là tiệm cận xiên




*Hình 105*

| x | $-\infty$ | | 0 | | 1 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | 0 | − | ‖ | − | 0 | + | |
| y | $-\infty$ | ↗ | 0 | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | 4 | ↗ | $+\infty$ |

Đồ thị (hình 105).

**3.** $\Delta$ : $y = k$ cắt (C) tại A, B sao cho $AB = \sqrt{5}$

$\Leftrightarrow$ $x^2 - kx + k = 0$ có hai nghiệm $x_1$, $x_2$ thỏa mãn :

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = k^2 - 4k > 0 \\ (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 + \left[x_1 - x_2 + \left(\dfrac{x_2 - x_1}{x_1x_2 - (x_2 + x_1) + 1}\right)\right]^2 = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k > 4 \text{ hay } k < 0 \\ k^2 - 4k + \left[x_1 - x_2 + \left(\dfrac{x_2 - x_1}{k - k + 1}\right)\right]^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow k = -1 \text{ hay } k = 5$$

**Đề 62** Cho hàm số : $y = \dfrac{x^2 + x - 5}{x - 2}$.

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C).

**2.** Tìm trên hai nhánh phân biệt của (C) hai điểm A, B sao cho khoảng cách AB ngắn nhất.

**3.** Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ một điểm bất kì trên (C) đến hai tiệm cận luôn bằng một hằng số.

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

## *Giải*

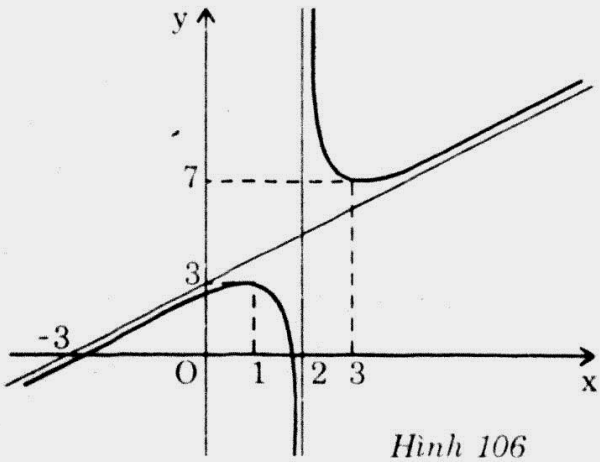
$$y = \frac{x^2 + x - 5}{x - 2} = x + 3 + \frac{1}{x - 2} \qquad (C)$$

**1.** $D = R \setminus \{2\}$

$$y' = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \vee x = 3$$

| x | $-\infty$ | | 1 | | 2 | | 3 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | 0 | − | ‖ | − | | + | |
| y | $-\infty$ | ↗ | 3 | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | 7 | ↗ | $+\infty$ |

Đồ thị (hình 106).




*Hình 106*

**2.** A, B là hai điểm trên hai nhánh của đồ thị có hoành độ

$\begin{cases} x_1 = 2 - a \\ x_2 = 2 + b \end{cases}$ a, b khoảng cách của chúng đến tiệm cận

a, b > 0

$$AB^2 = (x_1 - x_2)^2 + \left(x_1 - x_2 + \frac{1}{x_1 - 2} - \frac{1}{x_2 - 2}\right)^2$$

$$= (a + b)^2 + (a + b)^2\left(\frac{1}{ab} + 1\right)^2 = (a + b)^2\left(2 + \frac{2}{ab} + \frac{1}{a^2b^2}\right)$$

$$\geq 4ab\left(2\frac{\sqrt{2}}{ab} + \frac{2}{ab}\right) \geq 8\left(\sqrt{2} + 1\right)$$

AB nhỏ nhất là $8\left(\sqrt{2} + 1\right)$ khi đó $a = b = \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$.


www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

**3.** $M(x_o, y_o) \in (C)$

Khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng $d_1 = |x_o - 2|$, đến tiệm cận xiên

$$d_2 = \frac{|x_o + 3 - y_o|}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{1}{|x_o - 2|}}{\sqrt{2}} \Rightarrow d_1 d_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \text{const}.$$

**Đề 63** Cho hàm số : $y = f(x) = \dfrac{(m-1)x + m}{x + m}$ $(H_m)$.

1. Khảo sát và vẽ đồ thị (H) với m = 1.
2. Tìm trên (H) những điểm có tổng khoảng cách đến hai tiệm cận nhỏ nhất.
3. Chứng minh rằng $\forall m \neq 0$. Đồ thị hàm số luôn luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định.

***Giải***

**1.** $y = f(x) = \dfrac{(m-1)x + m}{x + m}$ $(H_m)$

$m = 1 \Rightarrow y = \dfrac{1}{x+1}$ (H)

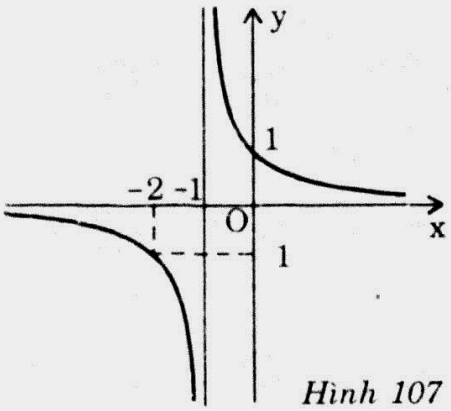
$D = R \setminus \{-1\}$

$y' = -\dfrac{1}{(x+1)^2} < 0 \quad \forall x \in D$

x = –1 là tiệm cận đứng

y = 0 là tiệm cận ngang

| x | $-\infty$ | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y' | | – | ‖ | – | |
| y | 2 ↘ | $-\infty$ | ‖ | $+\infty$ ↘ | 2 |



*Hình 107*

$x = 0 \Rightarrow y = 1$

Đồ thị (hình 107).

**2.** $M(x_o; y_o) \in C$

Khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng $d_1 = |x_o + 1|$

Khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang $d_2 = |y_o| = \dfrac{1}{|1 + x_o|}$

$$\Rightarrow d_1 d_2 \geq 2\sqrt{d_1 d_2} = 2$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x_o = 0 \vee x_o = -2 \Rightarrow (d_1 + d_2)_{min} = 2$

Ta có 2 điểm cần tìm : $M_1(0; 1)$, $M_2(-2; -1)$.

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

**3.** $y = \dfrac{(m-1)x+m}{x+m} = \dfrac{x^2+mx-x-m-x^2}{x+m} = x-1-\dfrac{x^2}{m+x}$

$\Rightarrow$ $(H_m)$ luôn tiếp xúc $\Delta : y = x - 1$.

**Đề 64** Cho hàm số : $y = \dfrac{x^2\cos\alpha + 2x\sin\alpha + 1}{x-2}$.

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $\alpha = \pi$.

**2.** Trong trường hợp tổng quát, xác định phương trình tiệm cận xiên của đồ thị. Tính khoảng cách từ gốc tọa độ đến tiệm cận xiên.

**3.** Tìm $\alpha$ để khoảng cách ấy lớn nhất.

***Giải***

$$y = \frac{x^2\cos\alpha + 2x\sin\alpha + 1}{x-2}$$

**1.** $\alpha = \pi \Rightarrow y = \dfrac{-x^2+1}{x-2} = -x-2-\dfrac{3}{x-2}$ (H)

$D = R \setminus \{2\}$

$y' = \dfrac{-x^2+4x-1}{(x-2)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{3}$

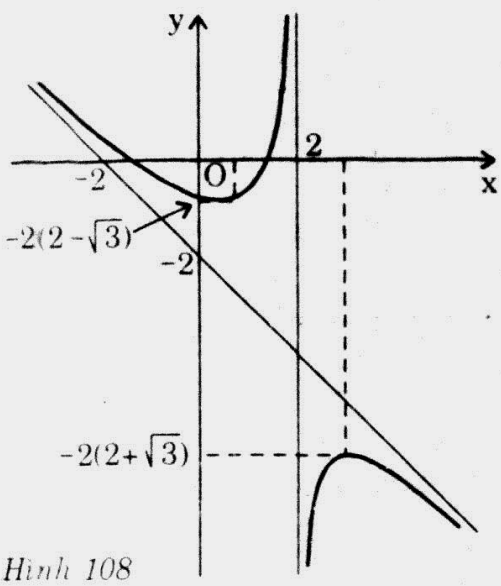
$x = 2$ là tiệm cận đứng

$y = -x - 2$ là tiệm cận xiên

| x | $-\infty$ | | $2-\sqrt{3}$ | | 2 | | $2+\sqrt{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | − | 0 | + | ‖ | + | 0 | − | |
| y | $+\infty$ | ↘ | $-2(2-\sqrt{3})$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $-2(2+\sqrt{3})$ | ↘ | $-\infty$ |

$x = \pm 1 \Rightarrow y = 0$

**Đồ thị (hình 108).**




*Hình 108*



www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

**2.** $$y = \frac{x^2\cos\alpha + 2x\sin\alpha + 1}{x - 2}$$

$$= x.\cos\alpha + 2(\sin\alpha + \cos\alpha) + \frac{1 + 4(\sin\alpha + \cos\alpha)}{x - 2}$$

Phương trình tiệm cận xiên $y = x.\cos\alpha + 2(\sin\alpha + \cos\alpha)$

Khoảng cách từ O đến tiệm cận là :

$$d = \frac{2|\sin\alpha + \cos\alpha|}{\sqrt{1 + \cos^2\alpha}} = \frac{2|\sin\alpha + \cos\alpha|}{\sqrt{2\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}}$$

**3.** Bất đẳng thức B.C.S

$$d \le \frac{\sqrt{4(\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha)\left(1 + \frac{1}{2}\right)}}{\sqrt{(2\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)}} = \sqrt{6}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ $\sin\alpha = 2\cos\alpha$

$\Leftrightarrow$ $\alpha = \text{arctg}2 + k2\pi$ là giá trị cần tìm.

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

# 14- HÀM SỐ CÓ CHỨA DẤU CĂN

## I- NHỮNG VẤN ĐỀ CƠ BẢN

**1.** *Hàm số* $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ *có tiệm cận xiên* $\Leftrightarrow a > 0$.

**2.** $f(x) = \sqrt{a}\left|x + \dfrac{b}{2a}\right| = \varepsilon(x)$

$\lim\limits_{x\to\infty} \varepsilon(x) = 0$

*Khi* $x \to +\infty$ : *Tiệm cận xiên bên phải* $y = \sqrt{a}\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)$

*Khi* $x \to -\infty$ : *Tiệm cận xiên bên trái* $y = -\sqrt{a}\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)$.

## II- BÀI TOÁN MINH HỌA

**Đề 65** Cho hàm số : $y = f(x) = x + \sqrt{2x^2 + 1}$.

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

**2.** Biện luận theo m số nghiệm của phương trình : $x + \sqrt{2x^2 + 1} = m$.

**3.** Viết phương trình của đường thẳng tiếp xúc với (C) tại điểm c
hoành độ là 2.

**4.** Tìm tập hợp các điểm trên Oy mà từ đó có thể kẻ được ít nhất mộ
đường thẳng tiếp xúc với (C).

***Giải***

$y = f(x) = x + \sqrt{2x^2 + 1}$ (C)

**1.** $D = R$

$$y' = 1 + \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 1}} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

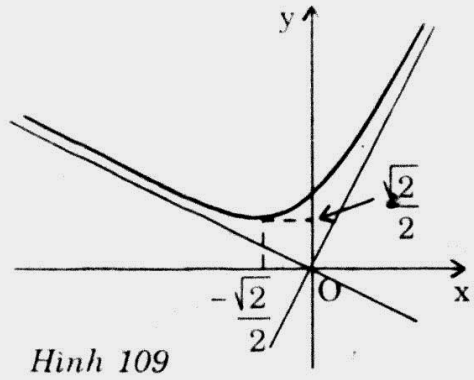
$$y = x + \sqrt{2}\,|x|\sqrt{1 + \frac{1}{2x^2}}$$

$$= \begin{cases} \left(1 + \sqrt{2}\right)x + Q(x) \text{ khi } x \to +\infty \text{ và } \lim\limits_{x\to\infty} Q(x) = 0 \\ \left(1 - \sqrt{2}\right)x + Q(x) \text{ khi } x \to -\infty \text{ và } \lim\limits_{x\to\infty} Q(x) = 0 \end{cases}$$

Ta có hai tiệm cận xiên $y = \left(1 + \sqrt{2}\right)x$; $y = \left(1 - \sqrt{2}\right)x$

Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

| x | $-\infty$ | | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y' | | $-$ | 0 | $+$ | |
| y | $+\infty$ | $\searrow$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |



*Hình 109*

$x = 0 \Rightarrow y = 1$

Đồ thị (hình 109).

**2.** $x + \sqrt{2x^2 + 1} = m$ (1)

Dựa vào đồ thị, ta có :

* $m < \frac{\sqrt{2}}{2}$ : (1) vô nghiệm.

* $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$ : (1) có nghiệm kép $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

* $m > \frac{\sqrt{2}}{2}$ : (1) có 2 nghiệm phân biệt.

**3.** Phương trình tiếp tuyến tại $M(x_o; y_o) \in (C)$

$$(T) : \ y = \left(1 + \frac{2x_o}{\sqrt{2x_o^2 + 1}}\right)(x - x_o) + x_o + \sqrt{2x_o^2 + 1}$$

Với $x_o = 2$ thì $(T) : y = \frac{7}{3}x + \frac{1}{3}$.

**4.** $\Delta : y = kx + b$ qua $M(0; b) \in Oy$, có phương trình hoành độ giao điểm với (C)

$$\sqrt{2x^2 + 1} = (k - 1)x + b$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (k-1)x + b > 0 & (1) \\ [(k-1)^2 - 2]x^2 + 2b(k-1)x + b^2 - 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

$\Delta$ tiếp xúc (C) $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm kép thỏa mãn (1)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (k-1)^2 - 2 \neq 0 \\ \Delta' = b^2(k-1)^2 - [(k-1)^2 - 2](b^2 - 1) = 0 \\ (k-1)\dfrac{b(1-k)}{(k-1)^2 - 2} + b > 0 \end{cases}$$

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (k-1)^2 \neq 2 \\ (k-1)^2 + 2b^2 - 2 = 0 \\ \dfrac{b}{(k-1)^2 - 2}(-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \neq 0 \\ (k-1)^2 - 2 = -2b^2 \\ \dfrac{b}{(k-1)^2 - 2}(-2) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad (I) \begin{cases} b > 0 \\ (k-1)^2 = 2(1-b^2) \end{cases}$$

Từ M kẻ được ít nhất 1 tiếp tuyến đến (C) $\Leftrightarrow$ hệ (I) có nghiệm k

$\Leftrightarrow$ $0 < b \leq 1$.

**Đề 66** Cho hàm số : $y = f(x) = \sqrt{2x(4-x)}$ (C)

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số.

**2.** Dùng đồ thị biện luận theo m số nghiệm của phương trình :

$$\sqrt{2x(4-x)} = mx + 2\sqrt{2} - 5m .$$

**3.** Gọi (C') là hình đối xứng của (C) qua Ox. Chứng minh rằng (C) và (C') hợp thành đường (E) mà ta viết được phương trình.

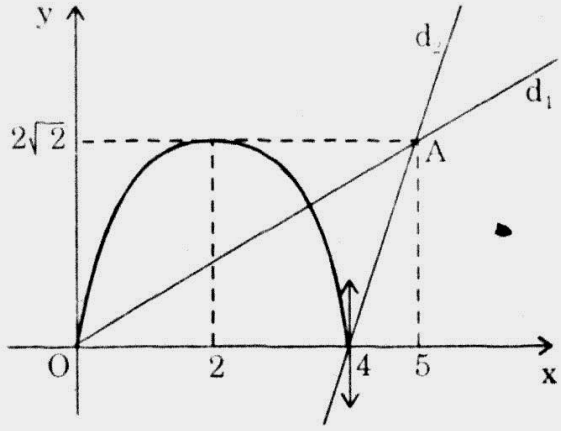
***Giải***

$y = \sqrt{2x(4-x)}$ (C)

**1.** $D = [0; 4]$

$$y' = \frac{-2x+4}{\sqrt{2x(4-x)}}$$

| x | $-\infty$ | 0 | | 2 | | 4 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | | + | 0 | − | | |
| y | | 0 | ↗ | $2\sqrt{2}$ | ↘ | 0 | |




*Hình 110*

Đồ thị (chú ý : tiếp tuyến tại A(0; 0) và B(4; 0) đứng).

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

**2.** $\sqrt{2x(4-x)} = mx + 2\sqrt{2} - 5m \iff \sqrt{2x(4-x)} = m(x-5) + 2\sqrt{2}$ (1)

Số nghiệm của (1) là số giao điểm của đường thẳng (d) :

$y = m(x-5) + 2\sqrt{2}$ với (C) ((d) luôn qua $A(5, 2\sqrt{2})$)

Trên đồ thị, chú ý 2 đường $d_1 : y = \dfrac{2\sqrt{2}}{5}x$

$d_2 : y = 2\sqrt{2}x - 8\sqrt{2}$

* $m < 0$ : (d) không cắt (C) $\Rightarrow$ (1) vô nghiệm.

* $m = 0$ : (1) có nghiệm kép $x = 2$.

* $0 < m \le \dfrac{2\sqrt{2}}{5}$ : (1) có 2 nghiệm.

* $\dfrac{2\sqrt{2}}{5} < m \le 2\sqrt{2}$ : (1) có 1 nghiệm.

* $m > 2\sqrt{2}$ : (1) vô nghiệm.

**3.** Ta có $y = \sqrt{2x(4-x)}$ (C)

$y = -\sqrt{2x(4-x)}$ (C')

(C) và (C') hợp thành đường (E) có phương trình (E) : $y^2 = 2x(4-x)$

$$\Leftrightarrow \quad (E) : \frac{y^2}{8} + \frac{(x-2)^2}{4} = 1$$

(E) là Elip.

**Đề 67** Cho hàm số : $y = f(x) = -2x + k\sqrt{x^2+1}$.

1. Với $k = 3$, hãy lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số.
2. Tìm k để hàm số có cực tiểu.

***Giải***

$$y = f(x) = -2x + k\sqrt{x^2+1}$$

**1.** $k = 3 \Rightarrow y = -2x + 3\sqrt{x^2+1}$

$D = R$

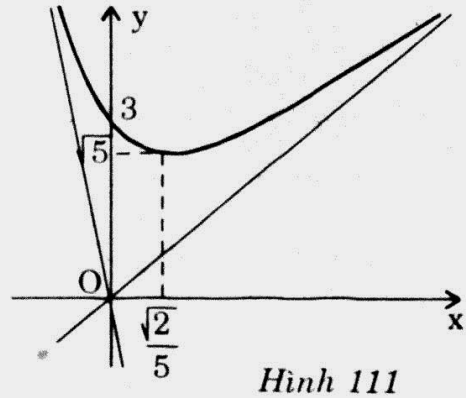
$$y' = -2 + \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}} = 0 \iff x = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$y = -2x + 3|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \begin{cases} x + Q(x) & \text{khi } x \to +\infty,\ \lim\limits_{x\to\infty} Q(x) = 0 \\ -5 + Q(x) & \text{khi } x \to -\infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty} Q(x) = 0 \end{cases}$$

Ta có 2 tiệm cận xiên $\begin{cases} d_1 : y = x \\ d_2 : y = -5x \end{cases}$

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{2}{\sqrt{5}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $\sqrt{5}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |




*Hình 111*

$x = 0 \Rightarrow y = 3$

Đồ thị (hình 111).

**2.** $y' = -2 + \dfrac{kx}{\sqrt{x^2+1}}$

$y' = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+1} = kx \Leftrightarrow \begin{cases} kx > 0 \\ (k^2-4)x^2 = 4 \quad (1) \end{cases}$

* $k^2 \le 4 \Rightarrow y' = 0$ vô nghiệm

$y'$ liên tục nên có dấu không đổi $\Rightarrow$ $y$ không có cực trị

* $k^2 > 4 \Rightarrow$ (1) có hai nghiệm $x = \dfrac{\pm 2}{\sqrt{k^2-4}}$

$k > 2$ thì :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{2}{\sqrt{k^2-4}}$ | | $0$ | | $\frac{2}{\sqrt{k^2-4}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $-$ | ¦ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | | $\searrow$ | $k$ | $\searrow$ | $\sqrt{k^2-4}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Khi đó y có cực tiểu $x = \dfrac{2}{\sqrt{k^2-4}}$

$k < -2$ thì :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{2}{\sqrt{k^2-4}}$ | | $0$ | | $\frac{2}{\sqrt{k^2-4}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ¦ | $-$ | | | |
| $y$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\searrow$ | | $\searrow$ | |

$y'$ không có cực tiểu

*Kết luận* : $k > 2$ thì y có cực tiểu.



www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

**Đề 68** Cho hàm số : $y = f(x) = mx^2 + ax + b$ $(m \neq 0)$ có đồ thị là một parabol đỉnh $S(2; 2)$.

1. Chứng minh rằng $ab \leq 1$.
2. Xác định m để $g(x) = m\cos 2x + 2a\cos x + m + 2b \geq 0$ với mọi giá trị của x.
3. Xác định m để đồ thị hàm số $h(x) = \sqrt{f(x)}$ có tiệm cận, xác định các đường tiệm cận này.

***Giải***

$$y = f(x) = mx^2 + ax + b \qquad (m \neq 0)$$

**1.** Đồ thị là parabol đỉnh S(2; 2)

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 = -\dfrac{a}{2m} \\ 4m + 2a + b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4m = -a & (1) \\ 2 = a + b & (2) \end{cases}$$

* $a \leq 0 \overset{(2)}{\Rightarrow} b > 0$ Vậy $ab \leq 0 < 1$

$b \leq 0 \overset{(2)}{\Rightarrow} a > 0$ Vậy $ab \leq 0 < 1$

* $a > 0,\ b > 0$

$(2) \Rightarrow 2 = a + b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow ab \leq 1.$

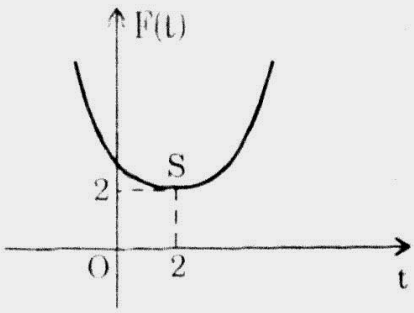
**2.** $g(x) = m\cos 2x + 2a\cos x + m + 2b = 2m\cos^2 x + 2a\cos x + 2b$

$= 2(mt^2 + at + b) = 2f(t)$ với $\cos x = t \in [-1; 1]$

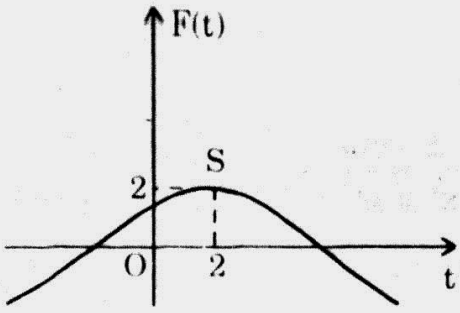
$g(x) \geq 0\ \forall x \Leftrightarrow f(t) \geq 0\ \forall t \in [-1; 1]$

$$\Leftrightarrow m > 0 \text{ hay } \begin{cases} m < 0 \\ f(-1) \geq 0 \end{cases} \qquad (I)$$

*Chú thích :*




m > 0




m < 0

*Hình 112*

$$(I) \Leftrightarrow m > 0 \text{ hay } \begin{cases} m < 0 \\ m - a + b \geq 0 \end{cases}$$



www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

$$\Leftrightarrow \quad m > 0 \quad \text{hay} \quad \begin{cases} m < 0 \\ m - 2a + (a + b) = 9m + 2 \geq 0 \end{cases}$$

(do (1) và (2))

$$\Leftrightarrow \quad m \geq -\frac{2}{9} \quad \text{và} \quad m \neq 0$$

**3.** (C) : $y = h(x) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{mx^2 + ax + b}$

* $m < 0$ : (C) không có tiệm cận

* $m > 0 \Rightarrow \quad f(x) \geq 2 > 0 \ \forall x$ (xem chú thích) do đó miền xác định của $h(x)$ là $D = R$.

$$h(x) = \sqrt{m}\left|x + \frac{a}{2m}\right|\sqrt{1 - \frac{a^2 - 4bm}{(2mx + a)^2}}$$

$$= \sqrt{m}\left(\left|x + \frac{a}{2m}\right|\right) + Q(x) \qquad \text{với} \quad \lim_{x \to \infty} Q(x) = 0$$

Vậy tiệm cận xiên là : $\quad d_1 : \quad y = \sqrt{m}x + \dfrac{a}{2\sqrt{m}} \quad$ khi $x \to +\infty$

$d_2 : \quad y = -\sqrt{m}x - \dfrac{a}{2\sqrt{m}} \quad$ khi $x \to -\infty$.

**Đề 69** Cho hàm số : $y = f(x) = \dfrac{x + m}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

**1.** Tùy theo các giá trị khác nhau của m, lập bảng biến thiên của **f(x)**.

**2.** Biện luận theo m số nghiệm của phương trình : $x + m = m\sqrt{x^2 + 1}$.

***Giải***

$$y = \frac{x + m}{\sqrt{x^2 + 1}} \qquad (C)$$

**1.** $D = R$

$$y' = \frac{1 - mx}{(x^2 + 1)^{3/2}}$$

* $m = 0$

| x | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| y' | | + | |
| y | $-1$ | $\nearrow$ | $1$ |



www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

* $m > 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1}{m}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $y$ | $-1$ | $\nearrow$ | $m^2 + 1$ | $\searrow$ | $1$ |

* $m < 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1}{m}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $-1$ | $\searrow$ | $-(1 + m^2)$ | $\nearrow$ | $1$ |

**2.** $x + m = m\sqrt{x^2 + 1}$ (1) $\Leftrightarrow$ $m = \dfrac{x + m}{\sqrt{x^2 + 1}}$

Số nghiệm của (1) bằng số giao điểm của d : y = m với (C)

* $m = 0$ : (1) có 1 nghiệm $x = 0$

* $m > 0$ : • $m \le 1$ : (1) có 1 nghiệm, • $m > 1$ : (1) có 2 nghiệm.

* $m < 0$ : • $m \ge -1$ : (1) có 1 nghiệm, • $m < -1$ : (1) có 2 nghiệm.

*Kết luận* : $|m| \le 1$ : (1) có 1 nghiệm,

$|m| > 1$ : (1) có 2 nghiệm.

**Đề 70** Cho hàm số : $y = f(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$

Tính đạo hàm y' và xác định dấu của nó, từ đó lập bảng biến thiên của hàm số y và xác định cực đại, cực tiểu (nếu có) của hàm số ấy.

***Giải***

$$y = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$$

$$y' = \frac{-3(x - 1)}{2\sqrt{(x^2 - x + 1)^3}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$$

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $y$ | $-1$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $1$ |

$x = 1$ là cực đại, y không có cực tiểu.



www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok-SPS

**Đề 71** Biện luận theo m miền xác định và tiệm cận của hàm số :

$$y = f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{x - m}.$$

***Giải***

$$y = \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{x - m}$$

$m = 2$ hay $m = 1$ : hàm suy biến

$m \in (1; 2)$ : Miền xác định $D = (-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$, **không có tiệm cận**

$m \notin [1; 2]$ : Miền xác định $D = (-\infty; 1] \cup [2; +\infty) \setminus \{m\}$

$x = m$ là tiệm cận đứng.

**Đề 72** Cho hàm số : $y = mx + m^2 + \sqrt{x^2 + 1}$.

1. Chứng minh rằng tiệm cận xiên bên phải của đồ thị luôn tiếp xúc với một parabol cố định.
2. Khi $m = 1$. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
3. Tìm quỹ tích các điểm trên trục tung mà từ đó có thể kẻ được ít nhất một tiếp tuyến tiếp xúc với đồ thị (C) của hàm số.
4. Với giá trị nào của a thì phương trình sau có nghiệm :

$$x + 1 + \sqrt{x^2 + 1} = a.$$

***Giải***

1. $y = mx + m^2 + \sqrt{x^2 + 1}$ $\quad (C_m)$

$$= mx + m^2 + |x|\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = mx + m^2 + |x| + Q(x) \quad \text{với } \lim_{x \to \infty} Q(x) = 0$$

Vậy tiệm cận xiên bên phải là : $d : y = (m + 1)x + m^2$ (do $x \geq 0$)

$$\Leftrightarrow \quad d : y = \left(\frac{x}{2} + m\right)^2 - \frac{x^2}{4} + x$$

Vậy d luôn tiếp xúc với (P) : $y = -\frac{x^2}{4} + x$.

2. $m = 1 \Rightarrow$ $y = x + 1 + \sqrt{x^2 + 1}$ (C)

$D = R$

$$y' = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} > 0 \quad \forall x \in D$$

vì $\sqrt{x^2 + 1} + x > |x| + x \geq 0 \quad \forall x$

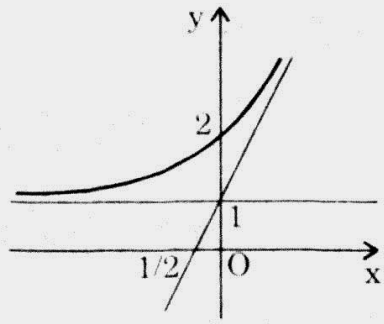


www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

$y = 2x + 1$ là tiệm cận xiên bên phải

$y = 1$ là tiệm cận ngang (phía trái)

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | |
| $y$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |




*Hình 113*

$x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 2$

Đồ thị (hình 113).

**3.** $\Delta : y = kx + b$ qua $M(0; b) \in Oy$ có phương trình hoành độ giao điểm với (C)

$$\sqrt{x^2 + 1} = (k - 1)x + b - 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (k-1)x + b - 1 \geq 0 & (1) \\ [(k-1)^2 - 1]x^2 + 2(k-1)(b-1)x + (b-1)^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

(2) $\Delta$ tiếp xúc (C) $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm kép thỏa mãn (1)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (k-1)^2 + (b-1)^2 - 1 = 0 \\ (k-1)^2 - 1 \neq 0 \\ (k-1)\left[\dfrac{-(k-1)(b-1)}{(k-1)^2 - 1}\right] + b - 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b \neq 1 \\ (k-1)^2 = -(b-1)^2 + 1 \\ (k-1)\left[\dfrac{(k-1)(b-1)}{(b-1)^2}\right] + b - 1 \geq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b > 1 \\ (k-1)^2 = -(b-1)^2 + 1 \quad (3) \end{cases}$$

Từ M kẻ được ít nhất 1 tiếp tuyến đến (C)

$$\Leftrightarrow \text{ (3) có nghiệm k (với } b > 1) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b > 1 \\ (b-1)^2 \leq 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad 1 < b \leq 2.$$

**4.** $$x + 1 + \sqrt{x^2 + 1} = a \qquad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 + \sqrt{x^2 + 1} & (C) \\ y = a & (\Delta a) \end{cases}$$

(1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ $\Delta a$ cắt (C) $\Leftrightarrow$ $a > 1$.



www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

Phần II

# CÁC ĐỀ KHẢO SÁT HÀM SỐ THI VÀO CÁC TRƯỜNG ĐẠI HỌC

## NĂM 2002

### 1. TUYỂN SINH ĐH, CĐ 2002 – KHỐI A

Cho hàm số : $y = -x^3 + 3mx^2 + 3(1 - m^2)x + m^3 - m^2$ (1)

(m là tham số).

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi m = 1.

**2.** Tìm k để phương trình : $-x^3 + 3x^2 + k^3 - 3k^2 = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

**3.** Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (1).

**Giải**

**1.** $m = 1 \Rightarrow y = -x^3 + 3x^2$

Tập xác định $\forall x \in R$,

$$y' = -3x^2 + 6x = -3x(x - 2), \qquad y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{array}\right.$$

$$y'' = -6x + 6 = 0, \qquad y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

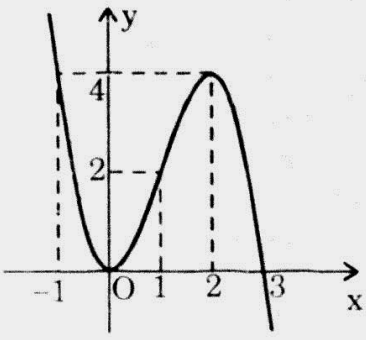
Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | 0 | | 1 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | − | 0 | | + | | 0 | − | |
| y'' | | | + | | 0 | | − | | |
| y | $+\infty$ | ↘ | lõm<br>CT<br>0 | ↗ | U<br>2 | ↗ | 4<br>CĐ<br>lồi | ↘ | $-\infty$ |

$$y = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array}\right.;$$

$$y(-1) = 4$$

Đồ thị : hình bên.






www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

**2. *Cách 1 :***

Ta có : $-x^3 + 3x^2 + k^3 - 3k^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x^3 + 3x = -k^3 + 3k^2$.

Đặt $a = -k^3 + 3k^2$.

Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình : $-3x^3 + 3x^2 = a$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \quad 0 < a < 4$

$$\Leftrightarrow \quad 0 < -k^3 + 3k^2 < 4 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 0 \neq k < 3 \\ (k+1)(k^2 - 4k + 4) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 0 \neq k < 3 \\ (k+1)(k-2)^2 > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -1 < k < 3 \\ k \neq 0 \wedge k \neq 2. \end{cases}$$

***Cách 2 :***

Ta có : $-x^3 + 3x^2 + k^3 - 3k^2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad (x - k)[x^2 + (k-3)x + k^2 - 3k] = 0$ có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \quad f(x) = x^2 + (k-3)x + k^2 - 3k = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác k

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \Delta = -3k^2 + 6k + 9 > 0 \\ k^2 + k^2 - 3k + k^2 - 3k \neq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -1 < k < 3 \\ k \neq 0 \wedge k \neq 2. \end{cases}$$

**3. *Cách 1 :*** $y' = -3x^2 + 6mx + 3(1 - m^2) = -3(x - m)^2 + 3$

$$y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x_1 = m - 1 \\ x_2 = m + 1 \end{array}\right.$$

Ta thấy $x_1 \neq x_2$ và $y'$ đổi dấu khi qua $x_1$ và $x_2 \Rightarrow$ hàm số đạt cực trị tại $x_1$ và $x_2$.

$$y_1 = y(x_1) = -m^2 + 3m - 2 \quad \text{và} \quad y_2 = y(x_2) = -m^2 + 3m + 2$$

Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị

$M_1(m - 1; -m^2 + 3m - 2)$ và $M_2(m + 1; -m^2 + 3m + 2)$ là :

$$\frac{x - m + 1}{2} = \frac{y + m^2 - 3m + 2}{4} \quad \Leftrightarrow \quad y = 2x - m^2 + m.$$

***Cách 2 :*** $y' = -3x^2 + 6mx + 3(1 - m^2) = -3(x - m)^2 + 3$.

Ta thấy : $\Delta' = 9m^2 + 9(1 - m^2) = 9 > 0 \Rightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm $x_1 \neq x_2$ và $y'$ đổi dấu khi qua $x_1$ và $x_2$.

Ta có : $\quad y = -x^3 + 3mx^2 + 3(1 - m^2)x + m^3 - m^2$

$$= \left(\frac{1}{3}x - \frac{m}{3}\right)(-3x^2 + 6mx + 3 - 3m^2) + 2x - m^2 + m$$

Từ đây ta có : $\quad y_1 = 2x_1 - m^2 + m \quad$ và $\quad y_2 = 2x_2 - m^2 + m$.

Vậy phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là : $y = 2x - m^2 + m$.

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

## 2. TUYỂN SINH ĐH, CĐ 2002 – KHỐI B

Cho hàm số : $y = mx^4 + (m^2 - 9)x^2 + 10$ (1) (m là tham số).

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi m = 1.

**2.** Tìm m để hàm số (1) có ba điểm cực trị.

### Giải

**1.** Với m = 1 ta có : $y = x^4 - 8x^2 + 10$ là hàm chẵn ⇒ đồ thị đối xứng qua Oy.

Tập xác định $\forall x \in R$

$$y' = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4), \qquad y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 0 \\ x = \pm 2 \end{array}\right.$$

$$y'' = 12x^2 - 16 = 12\left(x^2 - \frac{4}{3}\right), \qquad y'' = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | $-2$ | | $\frac{-2}{\sqrt{3}}$ | | $0$ | | $\frac{2}{\sqrt{3}}$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | – | 0 | | + | | 0 | | – | | 0 | + | |
| y'' | | | + | | 0 | | – | | 0 | | + | | |
| y | $+\infty$ | ↘ | lõm CT $-6$ | ↗ | U | ↗ | 10 CĐ lồi | ↘ | U | ↘ | lõm CT $-6$ | ↗ | $+\infty$ |

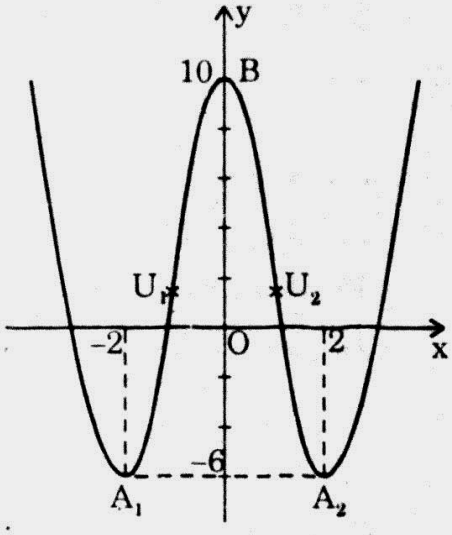
Hai điểm cực tiểu : $A_1(-2; -6)$

và $A_2(2; -6)$

Một điểm cực đại : B(0; 10)

Hai điểm uốn : $U_1\left(\frac{-2}{\sqrt{3}} ; \frac{10}{9}\right)$

và $U_2\left(\frac{2}{\sqrt{3}} ; \frac{10}{9}\right)$




Giao điểm của đồ thị với trục tung là :

B(0; 10)

Đồ thị cắt trục hoành tại 4 điểm có hoành độ :

$$x = \pm\sqrt{4 + \sqrt{6}} \quad \text{và} \quad x = \pm\sqrt{4 - \sqrt{6}}.$$

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

**2.** $y' = 4mx^3 + 2(m^2 - 9)x = 2x(2mx^2 + m^2 - 9)$,

$$y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2mx^2 + m^2 - 9 = 0 \end{array}\right.$$

Hàm số có ba **điểm cực trị** $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt (khi đó $y'$ đổi dấu khi qua các nghiệm) $\Leftrightarrow$ phương trình $2mx^2 + m^2 - 9 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 0.

$$2mx^2 + m^2 - 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} m \neq 0 \\ x^2 = \dfrac{9 - m^2}{2m} \end{cases}$$

Phương trình : $2mx^2 + m^2 - 9 = 0$ có hai nghiệm khác 0 $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -3 \\ 0 < m < 3. \end{array}\right.$

Vậy hàm số có **ba điểm cực trị** $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -3 \\ 0 < m < 3. \end{array}\right.$

## 3. TUYỂN SINH ĐH, CĐ 2002 – KHỐI D

Cho hàm số : $y = \dfrac{(2m - 1)x - m^2}{x - 1}$ (1) (m là tham số)

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1) ứng với $m = -1$.

**2.** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong (C) và hai trục tọa độ.

**3.** Tìm m để đồ thị của hàm số (1) tiếp xúc với đường thẳng $y = x$.

### Giải

**1.** Khi $m = -1$, ta có : $y = \dfrac{-3x - 1}{x - 1} = -3 - \dfrac{4}{x - 1}$

– TXĐ : $x \neq 1$

– CBT : $y' = \dfrac{4}{(x - 1)^2} > 0, \quad \forall x \neq 1 \Rightarrow$ hàm số không có cực trị.

$$\lim_{x \to \infty} y = -3 \; ; \quad \lim_{x \to 1^-} y = +\infty \; ; \quad \lim_{x \to 1^+} = -\infty$$

– BBT :

| x | $-\infty$ | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | ‖ | + | |
| y | $-3$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $-3$ |

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

– TC : $x = 1$ là tiệm cận đứng vì $\lim\limits_{x \to 1} y = \infty$

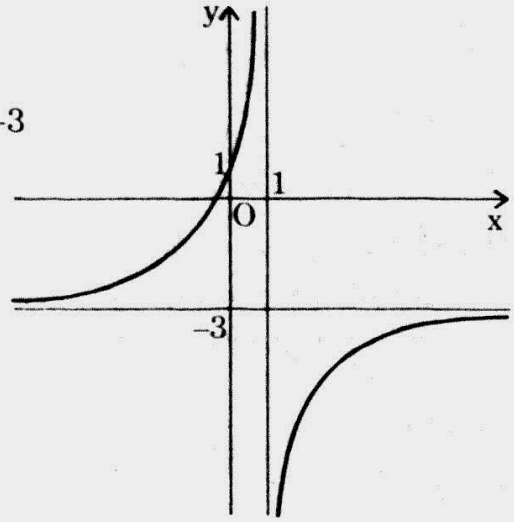
$y = -3$ là tiệm cận ngang vì $\lim\limits_{x \to \infty} y = -3$

– Giao với các trục :

$x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 1;$

$y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\dfrac{1}{3}$

– Đồ thị : hình bên




**2.** Diện tích cần tính là :

$$S = \int_{-\frac{1}{3}}^{0} \left( \frac{-3x - 1}{x - 1} \right) dx = -3 \int_{-\frac{1}{3}}^{0} dx - 4 \int_{-\frac{1}{3}}^{0} \frac{dx}{x - 1}$$

$$= -3.\frac{1}{3} - 4\ln|x - 1| \Big|_{-\frac{1}{3}}^{0} = -1 + 4\ln\frac{4}{3} \text{ (đvdt).}$$

**3.** Kí hiệu $f(x) = \dfrac{(2m - 1)x - m^2}{x - 1}$. Yêu cầu bài toán tương đương với tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm : (H) $\begin{cases} f(x) = x \\ f'(x) = (x)' \end{cases}$

Ta có : (H) $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-(x - m)^2}{x - 1} = 0 \\ \left( \dfrac{-(x - m)^2}{x - 1} \right)' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-(x - m)^2}{x - 1} = 0 \\ \dfrac{-2(x - m)(x - 1) + (x - m)^2}{(x - 1)^2} = 0 \end{cases}$

Ta thấy với $\forall m \neq 1$; $x = m$ luôn thỏa mãn hệ (H). Vì vậy $\forall m \neq 1$. (H) luôn có nghiệm, đồng thời khi $m = 1$ thì hệ (H) vô nghiệm. Do đó đồ thị hàm số (1) tiếp xúc với đường thẳng $y = x$ khi và chỉ khi $m \neq 1$.

*ĐS :* $m \neq 1$.

# NĂM 2001

## 4. ĐH QUỐC GIA TPHCM – KHỐI A

Cho hàm số : $y = 2x^3 + 3(m - 3)x^2 + 11 - 3m \quad (C_m)$.

**1.** Cho m = 2. Tìm phương trình các đường thẳng qua $A\left(\dfrac{19}{12}, 4\right)$ và tiếp xúc với đồ thị $(C_2)$ của hàm số.

**2.** Tìm m để hàm số có hai cực trị. Gọi $M_1$ và $M_2$ là các điểm cực trị, tìm m để các điểm $M_1$, $M_2$ và $B(0; -1)$ thẳng hàng.


www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

**Giải**

$$y = f(x) = 2x^3 + 3(m-3)x^2 + 11 - 3m \qquad (C_m)$$

**1.** $m = 2$ : $\quad f(x) = 2x^2 - 3x^2 + 5 \qquad (C_2)$

Phương trình đường thẳng (d) qua $A\left(\frac{19}{12}, 4\right)$ và có hệ số góc k là :

$$y - 4 = k\left(x - \frac{19}{12}\right) \quad \Rightarrow \quad y = k\left(x - \frac{19}{12}\right) + 4 = g(x)$$

(d) tiếp xúc với $(C_2)$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$ có nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - 3x^2 + 5 = k\left(x - \frac{19}{12}\right) + 4 \\ 6x^2 - 6x = k \end{cases} \text{ có nghiệm}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x^3 - 3x^2 + 5 = (6x^2 - 6x)\left(x - \frac{19}{12}\right) + 4 \quad \text{có nghiệm} \qquad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \quad 8x^3 - 25x^2 + 19x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(8x^2 - 17x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ 8x^2 - 17x + 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \\ x = \frac{1}{8} \end{array}\right.$$

- *TH 1* : $x_1 = 1 \Rightarrow k_1 = 0 \Rightarrow (d_1) : y = 4$
- *TH 2* : $x_1 = 2 \Rightarrow k_2 = 12 \Rightarrow (d_2) : y = 12x - 15$
- *TH 3* : $x_3 = \frac{1}{8} \Rightarrow k_3 = -\frac{21}{32} \Rightarrow (d_3) : y = -\frac{21}{32}x + \frac{645}{128}$

Vậy qua A có 3 đường thẳng $(d_1)$, $(d_2)$, $(d_3)$ tiếp xúc với đồ thị $(C_2)$.

**2.** $f'(x) = 6x^2 + 6(m-3)x$.

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 - m \end{array}\right.$$

f(x) có 2 cực trị $\Leftrightarrow$ $3 - m \neq 0$ $\Leftrightarrow$ $m \neq 3$

Ta có : $\quad f(x) = f'(x)\left[\frac{1}{3}x + \frac{m-3}{6}\right] + [-(m-3)^2x + 11 - 3m]$

Phương trình đường thẳng $M_1M_2$ : $y = -(m-3)^2x + 11 - 3m$

$M_1$, $M_2$, B thẳng hàng $\Leftrightarrow$ $B \in M_1M_2$

$\Leftrightarrow$ $-1 = 11 - 3m$ $\Leftrightarrow$ $m = 4$.

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

## 5. ĐH QUỐC GIA TPHCM – KHỐI B

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số : $y = 3x - 4x^3$.

### Giải

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số : $y = f(x) = 3x - 4x^3$.

Miền xác định D = R

$$f'(x) = -12x^2 + 3$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{1}{2}.$$

Bảng biến thiên :

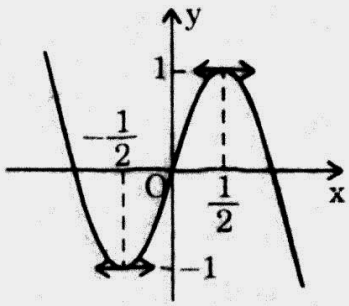
| x | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f ' | | − | 0 | + | 0 | − | |
| f | $+\infty$ | ↘ | $-1$ | ↗ | 1 | ↘ | $-\infty$ |

$$f''(x) = -24x$$

$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

Bảng xét tính lồi lõm :

| x | $-\infty$ | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f ' | | + | 0 | − | |
| f | lõm | | Đ uốn (0, 0) | | lồi |




Đồ thị : hình bên.

## 6. ĐH QUỐC GIA TPHCM – KHỐI A, B

Cho hàm số : $y = \dfrac{x+2}{x-1}$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2. Cho điểm A(0, a). Xác định a để từ A kẻ được hai tiếp tuyến đến (C) sa cho hai tiếp điểm tương ứng nằm về hai phía đối với trục Ox.

### Giải

$$y = f(x) = \frac{x+2}{x-1} \qquad (C)$$

1. Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

Miền xác định : D = R\{1}


www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

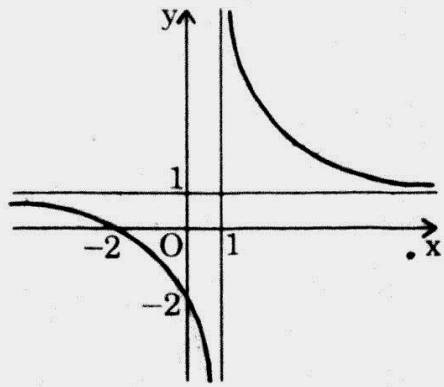
$$f'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2} < 0$$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1$ : Tiệm cận ngang : $y = 1$.

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \infty$ : Tiệm cận đứng : $x = 1$.

Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f ' | | − | ‖ | − | |
| f | 1 ↘ | $-\infty$ | ‖ | $+\infty$ ↘ | 1 |




Đồ thị : hình bên.

**2.** A(0; a)

Phương trình tiếp tuyến (Δ) với (C) tại $M_o(x_o; y_o)$ : $y - y_o = f'(x_o)(x - x_o)$

$$A \in (\Delta) \Leftrightarrow a - \left(\frac{x_o + 2}{x_o - 1}\right) = \frac{-3}{(x_o - 1)^2}(0 - x_o)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_o \neq 1 \\ (a-1)x_o^2 - 2(a+2)x_o + a + 2 = 0 \end{cases}$$

Đặt : $f(x_o) = (a-1)\,x_o^2 - 2(a+2)x_o + a + 2$

Qua A kẻ được 2 tiếp tuyến $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 1 \\ \Delta' > 0 \\ f(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -2 \\ a \neq 1 \end{cases}$

Khi đó gọi $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$ là 2 tiếp điểm ta có : $M_1$, $M_2$ nằm về hai phía đối với Ox.

$$\Leftrightarrow y_1y_2 < 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x_1+2}{x_1-1}\right)\left(\frac{x_2+2}{x_2-1}\right) < 0 \Leftrightarrow \frac{x_1x_2 + 2(x_1+x_2) + 4}{x_1x_2 - (x_1+x_2) + 1} < 0 \quad (1)$$

Theo Viét ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2(a+2)}{a-1} \\ x_1x_2 = \dfrac{a+2}{a-1} \end{cases}$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{a + 2 + 4(a+2) + 4(a-1)}{a + 2 - 2(a+2) + (a-1)} < 0 \Leftrightarrow \frac{9a+6}{-3} < 0 \Leftrightarrow a > -\frac{2}{3}$$

Vậy : $\begin{cases} a > -\dfrac{2}{3} \\ a \neq 1. \end{cases}$

Facebook.com/TeacherSokPiseth www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok SPS

## 7. ĐH KINH TẾ

Cho hàm số : $y = \dfrac{x^2 - 6x + 9}{-x + 2}$.

**a)** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số.

**b)** Tìm tất cả các điểm M trên trục tung sao cho từ M kẻ được tiếp tuyến với đồ thị, song song với đường thẳng $y = -\dfrac{3}{4}x$.

### Giải

$$y = f(x) = \frac{x^2 - 6x + 9}{-x + 2}$$

**a)** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số :

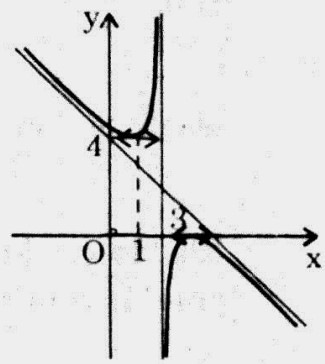
MXĐ : $D = R\backslash\{Z\}$

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 4x - 3}{(-x + 2)^2}; \qquad f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \vee x = 3.$$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \infty$ : Tiệm cận đứng : $x = 2$.

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ : Tiệm cận xiên : $y = -x + 4$.

| x | $-\infty$ | | 1 | | 2 | | 3 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f' | | − | 0 | + | ‖ | + | 0 | − | |
| f | $+\infty$ | ↘ | CT 4 | ↗ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | 0 CĐ | ↘ | $-\infty$ |




Đồ thị : hình bên.

**b)** Xét M(0, m) thuộc Oy.

Gọi (d) là đường thẳng qua M và có hệ số góc k.

Ta có phương trình của (d) là : $y - m = kx$.

$(d) // (\Delta) : y = -\dfrac{3}{4}x \quad \Rightarrow \quad k = -\dfrac{3}{4}$

Vậy (d) : $y = -\dfrac{3}{4}x + m$

$$(d) \text{ tiếp xúc với } (C) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2 - 6x + 9}{-x + 2} = -\dfrac{3}{4}x + m \\ \dfrac{-x^2 + 4x - 3}{(-x + 2)^2} = -\dfrac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ m = \dfrac{5}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ m = \dfrac{9}{2} \end{cases}$$

Vậy có 2 điểm M thỏa mãn đề bài : $M_1\left(0, \dfrac{9}{2}\right)$ và $M_2\left(0, \dfrac{5}{2}\right)$.

Facebook.com/TeacherSokPisoth www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

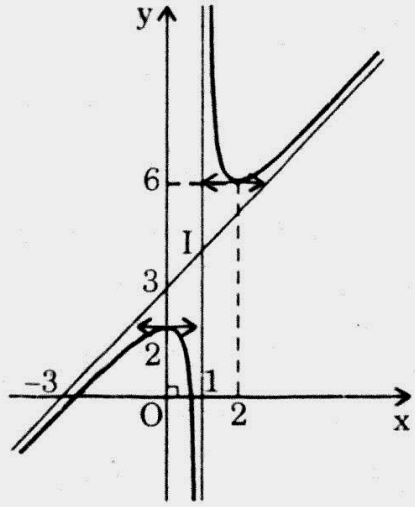
## 8. ĐH NGOẠI THƯƠNG TP.HCM – KHỐI A

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số : $y = \dfrac{x^2 + 2x - 2}{x - 1}$.

**2.** Tìm điểm M trên đồ thị của hàm số sao cho khoảng cách từ M đến giao điểm của hai đường tiệm cận là nhỏ nhất.

### Giải

$$y = f(x) = \frac{x^2 + 2x - 2}{x - 1}$$




**1.** Khảo sát hàm số

MXĐ : $D = R\backslash\{1\}$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2};$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | 0 | | 1 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f' | | + | 0 | − | ‖ | − | 0 | + | |
| f | $-\infty$ | ↗ | 2 | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | 6 | ↗ | $+\infty$ |

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

$$y = x + 3 + \left(\frac{1}{x-1}\right)$$

$\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{1}{x-1}\right) = 0$ : Tiệm cận xiên : $y = x + 3$.

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \infty$ : Tiệm cận đứng : $x = 1$.

Đồ thị : hình trên.

**2.** Xét điểm $M(x_M; y_M)$ trên đồ thị

Đặt : $x_M = 1 + a \quad (a > 0) \quad \Rightarrow \quad y_M = a + 4 + \dfrac{1}{a}$

Giao điểm của 2 tiệm cận : I(1; 4)

$$IM^2 = a^2 + \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = 2a^2 + \frac{1}{a^2} + 2$$

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

Theo Côsi : $IM^2 \geq 2\sqrt{2} + 2$

$IM \geq \sqrt{2\sqrt{2} + 2}$

IM đạt GTNN $\Leftrightarrow$ $IM = \sqrt{2\sqrt{2} + 2}$ $\Leftrightarrow$ $2a^2 = \dfrac{1}{a^2}$

$\Leftrightarrow$ $a^4 = \dfrac{1}{2}$ $\Leftrightarrow$ $a = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$

Do tính đối xứng của đồ thị nên có 2 điểm M thỏa mãn đề bài, đó là :

$$M_1 \begin{cases} x = 1 + \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} \\ y = 4 + \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} + \sqrt[4]{2} \end{cases}, \qquad M_2 \begin{cases} x = 1 - \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} \\ y = 4 - \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} - \sqrt[4]{2}. \end{cases}$$

## 9. ĐH Y DƯỢC TPHCM – KHỐI B

Cho hàm số : $y = \dfrac{mx^2 + (m^2 + 1)x + 4m^3 + m}{x + m}$ $(C_m)$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m = -1$.
2. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị $(C_m)$ có điểm cực trị thuộc góc phần tư thứ (II) và một điểm cực trị thuộc góc phần tư thứ (IV) của mặt phẳng tọa độ.

### Giải

$$y = f(x) = \frac{mx^2 + (m^2 + 1)x + 4m^3 + m}{x + m} \qquad (C_m)$$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m = -1$

$$f(x) = \frac{-x^2 + 2x - 5}{x - 1}$$

Miền xác định : $D = R\backslash\{1\}$

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 3}{(x - 1)^2}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \infty$ : Tiệm cận đứng : $x = 1$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

$y = -x + 1 + \dfrac{4}{x - 1}$ : Tiệm cận xiên : $y = -x + 1$

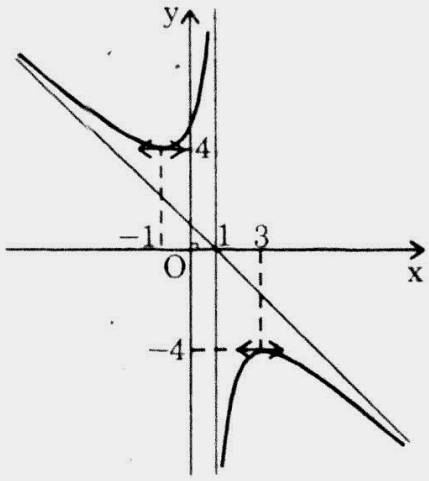


www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f' | | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| f | $+\infty$ | ↘ | $4$ CT | ↗ | $-\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | CĐ $-4$ | ↘ | $-\infty$ |

Đồ thị :




**2.** $$f(x) = \frac{mx^2 + (m^2+1)x + 4m^3 + m}{x+m} \quad (C_m)$$

$$f'(x) = \frac{mx^2 + 2m^2x - 3m^3}{(x+m)^2}$$

$$\Delta' = 4m^4$$

f(x) có 2 cực trị $\Leftrightarrow$ $m \neq 0$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-m^2 - 2m^2}{m} = -3m \\ x_2 = \dfrac{-m^2 + 2m^2}{m} = m \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y_1 = 1 - 5m^2 \\ y_2 = 1 + 3m^2 \end{array}\right.$$

Do $y_2 > 0$ nên để $M_2(x_2; y_2)$ thuộc góc phần tư thứ (II) của mặt phẳng tọa độ ta phải có : $x_2 < 0 \Leftrightarrow m < 0$ (1)

Khi đó : $x_1 = -3m > 0$

Để $M_1(x_1; y_1)$ thuộc góc phần tư (IV) của mặt phẳng tọa độ ta phải có :

$$y_1 < 0 \Leftrightarrow 1 - 5m^2 < 0 \Leftrightarrow m^2 > \frac{1}{5} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -\dfrac{\sqrt{5}}{5} \\ m > \dfrac{\sqrt{5}}{5} \end{array}\right. \quad (2)$$

(1) và (2) cho : $m < -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

## 10. TRUNG TÂM ĐÀO TẠO BỒI DƯỠNG CÁN BỘ Y TẾ TPHCM

Cho hàm số : $y = f(x) = x^3 - (m + 3)x^2 + 3x + 4$ (m là tham số).

**1.** Tìm m để đồ thị hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu. Khi đó viết phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị này.

**2.** Tìm m để $f(x) \geq 3x$ với mọi $x \geq 1$.

### Giải

$$y = f(x) = x^3 - (m + 3)x^2 + 3x + 4$$

**1.** $f'(x) = 3x^2 - 2(m + 3)x + 3$

$$\Delta' = (m + 3)^2 - 9 = m^2 + 6m$$

Hàm số có CĐ và CT $\Leftrightarrow$ $\Delta' > 0$ $\Leftrightarrow$ $m^2 + 6m > 0$

$\Leftrightarrow$ $m < -6 \vee m > 0$

Ta có : $f(x) = f'(x)\left(\frac{1}{3}x - \frac{m+3}{9}\right) + \left[2 - \frac{2(m+3)^2}{9}\right]x + \frac{m}{3} + 5$

$$f(x) = f'(x).q(x) + r(x)$$

M(x; y) là điểm cực trị $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} y = f(x) \\ f'(x) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ $y = f(x) = f'(x).q(x) + r(x)$ $\Rightarrow$ $y = r(x)$

Vậy phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là : $y = r(x)$

$$y = \left[2 - \frac{2(m+3)^2}{9}\right]x + \frac{m}{3} + 5.$$

**2.** $f(x) \geq 3x, \forall x \geq 1$ (1)

$\Leftrightarrow$ $x^3 - (m + 3)x^2 + 3x + 4 \geq 3x$ $\Leftrightarrow$ $x^3 - 3x + 4 \geq mx^2$

$\Leftrightarrow$ $\frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2} \geq m$ $\Leftrightarrow$ $x + \frac{4}{x^2} \geq 3 + m, \forall x \geq 1$

Đặt : $g(x) = x + \frac{4}{x^2}$ ; $g'(x) = 1 - \frac{8x}{x^4} = \frac{x(x^3 - 8)}{x^4}$

Bảng biến thiên của g(x) :

| x | 1 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| g' | | − | 0 | + | |
| g | 5 | ↘ | 3 | ↗ | 9 |

(1) $\Leftrightarrow$ $3 > 3 + m$ $\Leftrightarrow$ $0 \geq m$

Vậy : $0 \geq m$.



www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

## 11. ĐH NÔNG LÂM TPHCM

**a)** Khảo sát, vẽ đồ thị (C) của hàm số : $y = x^3 + 3x^2$.

**b)** Tìm tất cả các điểm trên trục hoành mà từ đó vẽ được đúng ba tiếp tuyến của đồ thị (C), trong đó có hai tiếp tuyến vuông góc với nhau.

### Giải

$$y = f(x) = x^3 + 3x^2$$

**a)** Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số

MXĐ : D = R

$$f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x + 2)$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên :

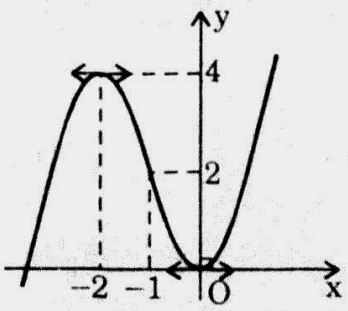
| x | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f ' | | + | 0 | − | 0 | + | |
| f | $-\infty$ | ↗ | 4 | ↘ | 0 | ↗ | $+\infty$ |

$$f''(x) = 6x + 6$$

$$f'' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1$$

Bảng xét tính lồi lõm :

| x | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f '' | | − | 0 | + | |
| f | lồi | | Đ uốn | | lõm |




Đồ thị : hình bên.

**b)** Xét điểm M(m; 0) trên Ox

Phương trình đường thẳng qua M và có hệ số góc k : (d) : $y = k(x - m)$

(d) tiếp xúc với (C) $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x^3 + 3x^2 = k(x - m) & (1) \\ 3x^2 + 6x = k & (2) \end{cases}$ có nghiệm.

Thay (2) vào (1) ta có : $2x^3 - (3m - 3)x^2 - 6mx = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{ll} x = 0 & \\ 2x^2 - (3m - 3)x - 6m = 0 & (3) \end{array}\right.$$

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 0$$

Ta thấy qua M có tiếp tuyến là Ox. Do (C) không thể có tiếp tuyến



www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

vuông góc với Ox nên ta chỉ cần xét phương trình (3). Gọi $x_1$ và $x_2$ là nghiệm của (3)

Theo Viét ta có : $\begin{cases} x_1x_2 = -3m \\ x_1 + x_2 = \dfrac{3m-3}{2} \end{cases}$

M thỏa mãn đề bài $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ (3) có 2 nghiệm $x_1$, $x_2$ thỏa mãn : $[3x_1^2 + 3x_1][3x_2^2 + 6x_2] = -1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (3m-3)^2 + 48 > 0 \\ 9(x_1x_2)^2 + 18x_1x_2(x_1 + x_2) + 36x_1x_2 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{27}$

Vậy có một điểm M thỏa mãn đề bài là : $M\left(\dfrac{1}{27}, 0\right)$.

## 12. ĐH SƯ PHẠM KỸ THUẬT TPHCM – KHỐI A

Cho hàm số : $y = \dfrac{2x^2 + mx - 2}{x - 1}$ với m là tham số.

1. Xác định m để tam giác tạo bởi 2 trục tọa độ và đường tiệm cận xiên của đồ thị của hàm số trên có diện tích bằng 4.
2. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số trên khi m = –3.

### Giải

1. $y = f(x) = \dfrac{2x^2 + mx - 2}{x - 1}$

$(C_m)$ có tiệm cận xiên (d) : $y = 2x + m + 2$

(d) cắt Ox, Oy tại : $A\left(\dfrac{-m-2}{2}, 0\right)$, $B(0; m + 2)$.

$S = dt(OAB) = \dfrac{1}{2}OA.OB = \dfrac{1}{4}(m+2)^2$

$S = 4 \Leftrightarrow \dfrac{1}{4}(m+2)^2 = 4 \Leftrightarrow (m+2)^2 = 16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -6 \\ m = 2 \end{array}\right.$

2. m = –3, ta có : $y = f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x - 1}$

MXĐ : $D = R\backslash\{1\}$

$f'(x) = \dfrac{2x^2 - 4x + 5}{(x-1)^2} > 0, \quad \forall x \neq 1$



www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f ' | | + | ‖ | + | |
| f | $-\infty$ ↗ | | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

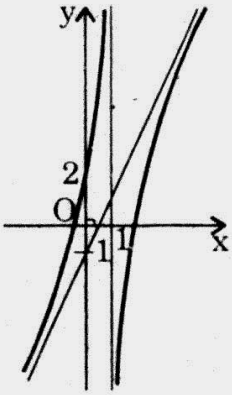
$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \infty$ : Tiệm cận đứng : $x = 1$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

$y = 2x - 1 - \dfrac{3}{x-1}$

Tiệm cận xiên : $y = 2x - 1$

Đồ thị : hình bên.




## 13. ĐH KIẾN TRÚC TPHCM

a) Khảo sát hàm số : $y = x^2 - 5x + 4$.

b) Cho hai parabol : $y = x^2 - 5x + 6$ và $y = -x^2 + 5x - 11$.

Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai parabol trên.

### Giải

a) Khảo sát hàm số : $y = f(x) = x^2 - 5x + 4$.

MXĐ : $D = R$

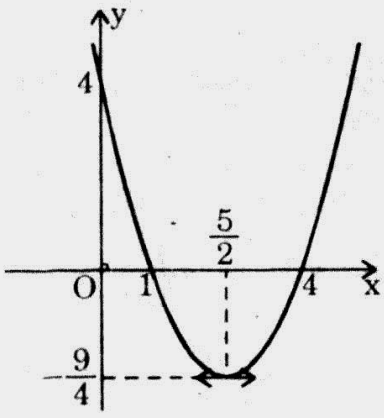
$f'(x) = 2x - 5$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{2}$

Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | $\frac{5}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f ' | | − | 0 | + | |
| f | $+\infty$ | ↘ | $-\frac{9}{4}$ | ↗ | $+\infty$ |

Đồ thị : hình bên.




$y = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 4 \end{array}\right.$ ;

$x = 0 \Rightarrow y = 4$



www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

**b)** $(P_1): y = x^2 - 5x + 6$

$(P_2): y = -x^2 + 5x - 11$

Gọi (d) : $y = ax + b$ là tiếp tuyến chung của $(P_1)$ và $(P_2)$.

Ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 = ax + b \\ -x^2 + 5x - 11 = ax + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - (5 + a)x + 6 - b = 0 & (1) \\ x^2 + (a - 5)x + b + 11 = 0 & (2) \end{cases}$$

(1) và (2) có nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1 = 0 \\ \Delta_2 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a + 5)^2 - 4(6 - b) = 0 & (3) \\ (a - 5)^2 - 4(b + 11) = 0 & (4) \end{cases}$$

Lấy (3) - (4) : $20a + 8b + 20 = 0 \Rightarrow 4b = -10(a + 1)$

(3) $\Rightarrow a^2 + 10a + 25 - 10(a + 1) - 24 = 0$

$\Rightarrow a^2 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} a = 3 & b = -10 \\ a = -3 & b = 5 \end{array}\right.$

Vậy có hai tiếp tuyến chung của $(P_1)$ và $(P_2)$ là (d) : $y = 3x - 10$

(d') : $y = -3x + 5$.

## 14. ĐH CẦN THƠ

Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x}$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2. Tìm trên đường thẳng $x = 1$ những điểm M sao cho từ M kẻ được 2 tiếp tuyến tới (C) và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau.

### Giải

$$y = f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x}$$

**1.** Khảo sát và vẽ đồ thị

MXĐ : $D = R\backslash\{0\}$

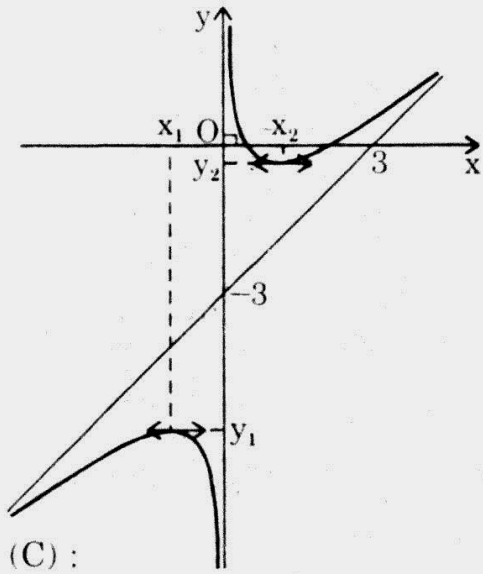
$f'(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$

Bảng biến thiên :



www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

| x | $-\infty$ | | $-\sqrt{2}$ | | 0 | | $\sqrt{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f' | | + | 0 | − | ‖ | − | 0 | + | |
| f | $-\infty$ | ↗ | $-(2\sqrt{2}+3)$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $2\sqrt{2}-3$ | ↗ | $+\infty$ |




Tiệm cận đứng : $x = 0$.

Tiệm cận xiên : $y = x - 3$.

Đồ thị : (hình vẽ).

**2.** Xét điểm $(1; m)$ trên đường thẳng $x = 1$

Xét đường thẳng (d) đi qua M và có hệ số góc k :

$$(d): \quad y - m = k(x - 1)$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (C) :

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x} = k(x - 1) + m \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = kx^2 - kx + mx$$

$$\Leftrightarrow (k - 1)x^2 + (3 + m - k)x - 2 = 0 \qquad (1)$$

(1) có nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 1 \\ \Delta = 0 \end{cases}$

$$\Delta = 0 \Rightarrow (3 + m - k)^2 + 8(k - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow k^2 - 2(3 + m)k + 8k + (3 + m)^2 - 8 = 0 \qquad (2)$$

Từ M kẻ được hai tiếp tuyến vuông góc đến (C)

$\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm $k_1, k_2$ thỏa mãn $k_1k_2 = -1 \Leftrightarrow \dfrac{c}{a} = -1$

$$\Leftrightarrow (3 + m)^2 - 8 = -1 \Leftrightarrow (3 + m)^2 = 7 \Leftrightarrow m = -3 \pm \sqrt{7}$$

Vậy có 2 điểm thỏa mãn đề bài là : $M(1; -3 \pm \sqrt{7})$.

## 15. ĐH ĐÀ NẴNG – KHỐI B – ĐỢT 1

Cho hàm số : $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x}$. Khảo sát hàm số trên.

### Giải

Khảo sát hàm số : $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x}$

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

MXĐ : $D = R\backslash\{0\}$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 1$$

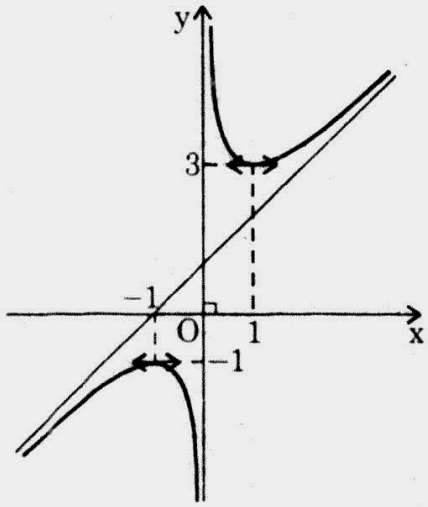
Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f' | | + | 0 | − | ‖ | − | 0 | + | |
| f | $-\infty$ | ↗ | CĐ $-1$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | 3 CT | ↗ | $+\infty$ |

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \infty$ : Tiệm cận đứng : $x = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \infty$ : Tiệm cận xiên : $y = x + 1$.

Đồ thị : hình bên.




## 16. ĐH ĐÀ NẴNG – KHỐI A – ĐỢT 2

Cho hàm số : $y = x^3 - (2m + 1)x^2 + (m^2 - 3m + 2)x + 4$.

**a)** Khảo sát hàm số khi $m = 1$.

**b)** Trong trường hợp tổng quát, hãy xác định tất cả các tham số m để đồ thị của hàm số đã cho có điểm cực đại và điểm cực tiểu ở về hai phía của trục tung.

### Giải

$$y = f(x) = x^3 - (2m + 1)x^2 + (m^2 - 3m + 2)x + 4$$

**a)** Khảo sát hàm số khi $m = 1$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$$

Miền xác định : $D = R$.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee x = 2$

Bảng biến thiên :

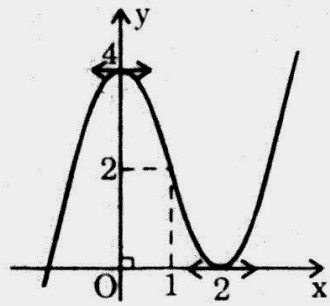
| x | $-\infty$ | | 0 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f' | | + | 0 | − | 0 | + | |
| f | $-\infty$ | ↗ | 4 | ↘ | 0 | ↗ | $+\infty$ |

$f''(x) = 6x - 6$

$\Rightarrow \quad f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$

Bảng xét tính lồi lõm :

| x | $-\infty$ | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f'' | | − | 0 | + | |
| f | lồi | | Đ uốn (1; 2) | | lõm |




Đồ thị : hình bên.

**b)** $f'(x) = 3x^2 - 2(2m + 1)x + m^2 - 3m + 2$

Đồ thị hàm số có điểm cực đại và cực tiểu ở về hai phía của Oy.

$\Leftrightarrow$ f'(x) có 2 nghiệm $x_1$, $x_2$ trái dấu

$\Leftrightarrow \quad ac < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3(m^2 - 3m + 2) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 < m < 2.$

# NĂM 2000

## 17. ĐH QUỐC GIA TPHCM – ĐỢT 1

Cho hàm số : $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$.

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số.

**2.** Tìm tất cả những điểm M trên đồ thị sao cho tổng các khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận là nhỏ nhất.

### Giải

$$y = f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} \qquad (C)$$

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị :

**a)** MXĐ : $D = R \setminus \{1\}$.

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

**b)** $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$ ; $\quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

**c)** $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ $\quad y = x + \dfrac{1}{x-1}$

$\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{1}{x-1}\right) = 0$ : Hàm số có tiệm cận **xiên** : **y = x**.

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \infty$ : Hàm số có tiệm cận **đứng** : **x = 1**.

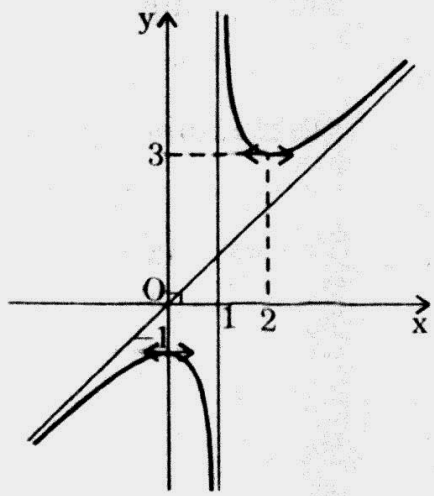
**d)** Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | 0 | | 1 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f' | | + | 0 | − | ‖ | − | 0 | + | |
| f | $-\infty$ | ↗ | CĐ $-1$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | CT 3 | ↗ | $+\infty$ |

CĐ : $f(0) = -1$;

CT : $f(2) = 3$.

**e)** Đồ thị : hình bên.




**2.** Xét điểm M(x; y)

$M \in (C) \Leftrightarrow y = x + \dfrac{1}{x-1}$.

Phương trình hai tiệm cận :

$\Delta_1$ : $y = x \Leftrightarrow x - y = 0$

$\Delta_2$ : $x = 1 \Leftrightarrow x - 1 = 0$

Đặt : $S = d(M; \Delta_1) + d(M; \Delta_2)$.

Ta có : $S = \dfrac{|x - y|}{\sqrt{2}} + |x - 1| = \dfrac{\left|x - \left(x + \dfrac{1}{x-1}\right)\right|}{\sqrt{2}} + |x - 1|$.

$S = \dfrac{1}{\sqrt{2}|x-1|} + |x - 1|$.

Theo BĐT Côsi : $a + b \geq 2\sqrt{ab}$.

Ta có : $S \geq 2\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{2}\,|x-1|} . |x - 1|}$

$S \geq \dfrac{2}{\sqrt[4]{2}}$.

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

S đạt GTNN $\Leftrightarrow$ $S = \frac{2}{\sqrt[4]{2}}$ $\Leftrightarrow$ $\frac{1}{\sqrt{2}|x-1|} = |x-1|$

$$\Leftrightarrow \quad (x-1)^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x-1 = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \\ x-1 = -\frac{1}{\sqrt[4]{2}} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 1 + \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \\ x = 1 - \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \end{array}\right.$$

Vậy có 2 điểm M thỏa mãn đề bài :

$$M_1 \begin{cases} x_1 = 1 + \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \\ y_1 = 1 + \frac{1}{\sqrt[4]{2}} + \sqrt[4]{2} \end{cases} ; \qquad M_2 \begin{cases} x_2 = 1 - \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \\ y_2 = 1 - \frac{1}{\sqrt[4]{2}} - \sqrt[4]{2} \end{cases}.$$

## 18. ĐH QUỐC GIA TPHCM – ĐỢT 2

Cho hàm số : $y = mx^3 - 3mx^2 + (2m+1)x + 3 - m$ $(C_m)$.

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị khi $m = 4$.

**2.** Tìm tất cả các giá trị của m sao cho hàm số có cực đại và cực tiểu. Chứng minh rằng khi đó đường thẳng nối hai điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị $(C_m)$ luôn đi qua một điểm cố định.

### Giải

$y = f(x) = mx^3 - 3mx^2 + (2m+1)x + 3 - m$ $(C_m)$

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 4$

$y = f(x) = 4x^3 - 12x^2 + 9x - 1$

**a)** MXĐ : $D = R$

**b)** $f'(x) = 12x^2 - 24x + 9$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2 - 8x + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{3}{2} \\ x = \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

**c)** Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | $\frac{1}{2}$ | | $\frac{3}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f' | | + | 0 | − | 0 | + | |
| f | $-\infty$ | ↗ | CĐ 1 | ↘ | CT −1 | ↗ | $+\infty$ |

CĐ : $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$; CT : $f\left(\frac{3}{2}\right) = -1$.

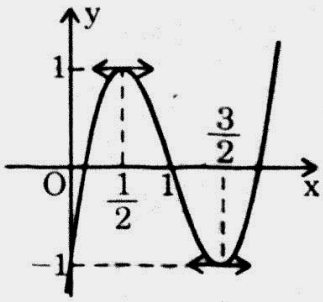
Facebook.com/TeacherSokPiseth www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

**d)** $f''(x) = 24x - 24$; $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

| x | $-\infty$ | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f'' | | − | 0 | + | |
| f | | lồi | 0 | lõm | |

Điểm uốn : I(1; 0), $x = 0 \Rightarrow y = -1$

**c)** Đồ thị : hình bên.




**2. a)** $f(x) = mx^3 - 3mx^2 + (2m + 1)x + 3 - m$

$f'(x) = 3mx^2 - 6mx + 2m + 1$

f(x) có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 9m^2 - 3m(2m + 1) > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 3m^2 - 3m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > 1 \end{array}\right..$$

**b)** Ta có : $y = f(x)$

$$y = \left(\frac{x-1}{3}\right) f'(x) + \frac{-2m+2}{3}x + \frac{10-m}{3}$$

Vậy đường thẳng d : $y = \frac{-2m+2}{3}x + \frac{10-m}{3}$ là đường thẳng đi qua các điểm cực trị.

**c)** Xét điểm cố định $M_o(x_o; y_o)$

$M_o \in (d)\ \forall m \Leftrightarrow y_o = \frac{-2m+2}{3}x_o + \frac{10-m}{3}, \quad \forall m$

$\Leftrightarrow m(2x_o + 1) + (3y_o - 2x_o - 10) = 0; \forall m$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_o + 1 = 0 \\ 3y_o - 2x_o - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_o = -\frac{1}{2} \\ y_o = 3 \end{cases}$

Vậy (d) luôn luôn đi qua điểm cố định $M_o\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$.

## 19. ĐH SƯ PHẠM TPHCM – KHỐI A, B

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số : $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$

**2.** Gọi I là tâm đối xứng của đồ thị (C) và M là một điểm trên (C). Tiếp tuyến tại M cắt hai đường tiệm cận tại A, B. Chứng minh rằng M là trung điểm của đoạn AB và diện tích tam giác IAB không phụ thuộc vào vị trí điểm M trên (C).



www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok 'SPS'

## Giải

$$y = f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$$

**1. a)** MXĐ : $D = R \setminus \{-1\}$.

**b)** $f'(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$ ; $\qquad f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right.$.

**c)** $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$; $\qquad y = x + 1 + \dfrac{1}{x+1}$.

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x+1} = 0$ : Tiệm cận xiên : $y = x + 1$.

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \infty$ : Tiệm cận đứng : $x = -1$.

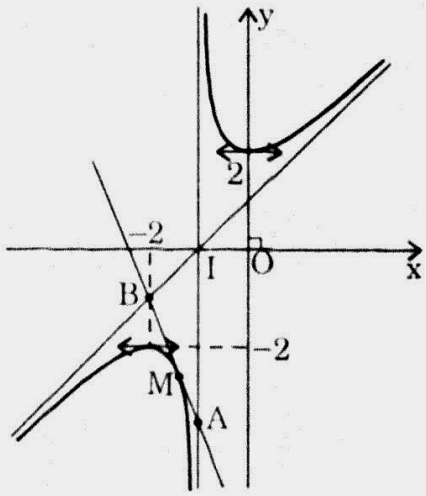
**d)** Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f ' | | + | 0 | − | ‖ | − | 0 | + | |
| f | $-\infty$ | ↗ | $-2$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | 2 | ↗ | $+\infty$ |

CĐ : $f(-1) = -2$ ;

CT : $f(0) = 2$.

**e)** Đồ thị :




**2.** Giao điểm hai tiệm cận : $I(-1; 0)$.

Xét điểm $M_0(x_0; y_0) \in (C)$.

Phương trình tiếp tuyến tại $M_0$ : $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ $\qquad$ (d)

$$(d) \cap TCĐ = \left\{A\left(-1, \frac{2}{x_0 + 1}\right)\right\}.$$

$$(d) \cap TCX = \{B(2x_0 + 1; 2x_0 + 2)\}.$$

**a)** Ta có : $\dfrac{x_A + x_B}{2} = x_0$ và A, B, M thẳng hàng $\Rightarrow$ M là trung điểm AB.

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

**b)** $S_{IAB} = \frac{1}{2}|(y_A - y_I)(x_B - x_I)| = \frac{1}{2}\left|\left(\frac{2}{x_0+1}\right)(2x_0+2)\right| = 2.$

Vậy : $S_{IAB} = 2$ đvdt.

## 20. ĐH SƯ PHẠM TPHCM – KHỐI D, E

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số : $y = \frac{x^2+3x+3}{x+1}$

**2.** Tại hai điểm A, B trên hai nhánh khác nhau của (C) cho độ dài đoạn AB ngắn nhất.

### Giải

$$y = f(x) = \frac{x^2+3x+3}{x+1}$$

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị :

**a)** Miền xác định : $D = R \setminus \{-1\}$.

**b)** $f'(x) = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$; $\quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right.$

**c)** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$; $\quad y = x + 2 + \frac{1}{x+1}$.

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x+1}\right) = 0$ : Tiệm cận xiên : $y = x + 2$.

$\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \infty$ : Tiệm cận đứng : $x = -1$.

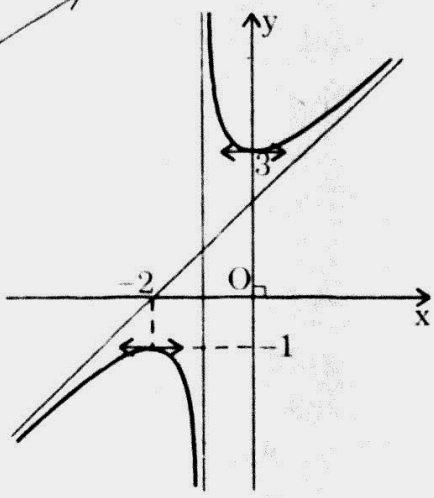
**d)** Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f' | | + | 0 | − | ‖ | − | 0 | + | |
| f | $-\infty$ | ↗ | CĐ $-1$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | CT $3$ | ↗ | $+\infty$ |

CĐ : $f(-2) = -1$;

CT : $f(0) = 3$.

**e)** Đồ thị : hình bên






www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

**2.** Xét hai điểm A, B trên hai nhánh phân biệt của đồ thị

Ta có : $A\begin{cases} x_A = 1 - \alpha \\ y_A = 1 - \alpha - \dfrac{1}{\alpha} \end{cases}$ $(\alpha > 0)$

$B\begin{cases} x_B = 1 + \beta \\ y_B = 1 + \beta + \dfrac{1}{\beta} \end{cases}$ $(\beta > 0)$

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = (\beta + \alpha)^2 + \left(\beta + \alpha + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha}\right)^2$$

$$= 2(\beta + \alpha)^2 + \left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha}\right)^2 + 2(\beta + \alpha)\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right).$$

Theo Côsi ta có : $AB^2 \geq 8\alpha\beta + \dfrac{4}{\alpha\beta} + 8$

$$AB^2 \geq 2\sqrt{8\alpha\beta.\frac{4}{\alpha\beta}} + 8 = 8\sqrt{2} + 8.$$

AB đạt GTNN $\Leftrightarrow$ $AB = \sqrt{8(\sqrt{2} + 1)}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta \\ 8\alpha\beta = \dfrac{4}{\alpha\beta} \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

Vậy hai điểm cần tìm là :

$$A\begin{cases} x_A = -1 - \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} \\ y_A = 1 - \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} - \sqrt[4]{2} \end{cases} ; \quad B\begin{cases} x_A = -1 + \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} \\ y_A = -1 + \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} + \sqrt[4]{2} \end{cases}.$$

## 21. HỌC VIỆN NGÂN HÀNG – PHÂN VIỆN TPHCM

Cho hàm số : $y = \dfrac{x^2 - 5x + 5}{x - 1}$ (C).

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

**2.** Từ (C), suy ra đồ thị hàm số $y = \dfrac{|x^2 - 5x + 5|}{x - 1}$.

Biện luận theo m số nghiệm t của phương trình :

$$|4t - 5.2^t + 5| = m(2^t - 1).$$

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

## Giải

$$y = \frac{x^2 - 5x + 5}{x - 1} \qquad (C)$$

**1.** Khảo sát và vẽ đồ thị (C)

**a)** MXĐ : D \ R {1}.

**b)** $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$; $\qquad f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

**c)** $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$; $\qquad y = x - 4 + \left(\dfrac{1}{x-1}\right)$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x-1} = 0$ : Tiệm cận xiên : $y = x - 4$.

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \infty$ : Tiệm cận đứng : $x = 1$.

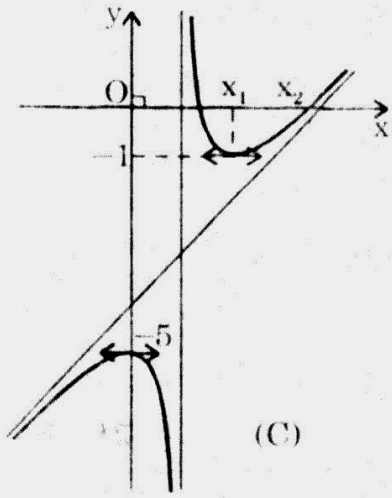
**d)** Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | 0 | | 1 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f ' | | + | 0 | − | ‖ | − | 0 | + | |
| f | $-\infty$ | ↗ | CĐ $-5$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $-1$ CT | ↗ | $+\infty$ |

CĐ : $f(0) = -5$;

CT : $f(2) = -1$.

**e)** Đồ thị : hình bên.




**2. a)** $(C') : y = \dfrac{|x^2 - 5x + 5|}{x - 1}$

$x^2 - 5x + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{5 - \sqrt{5}}{2} \\ x_2 = \dfrac{5 + \sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

| x | $-\infty$ | | $x_1$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2 - 5x + 5$ | | + | 0 | − | 0 | + | |

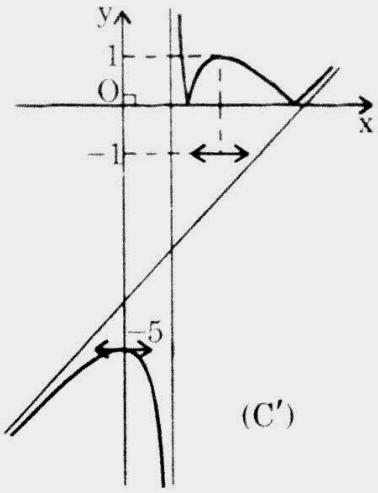
$$(C') : y = \left[\begin{array}{ll} f(x) & x \in (-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty) \\ -f(x) & x \in (x_1, x_2) \end{array}\right.$$

(C') suy ra từ (C) bằng cách giữ nguyên phần có $x \in (-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$.

Và lấy đối xứng qua Ox của phần có $x \in (x_1, x_2)$.


Facebook.com/TeacherSokPiseth www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

Ta có đồ thị (C') như sau :




**b)** Xét phương trình : $|4^t - 5.2^t + 5| = m(2^t - 1)$ **(1)**

Đặt : $x = 2^t$, $(x > 0)$ (1) $\Leftrightarrow$ $\dfrac{|x^2 - 5x + 5|}{x - 1} = m.$

Số nghiệm của phương trình (1) chính là số giao điểm của đường thẳng $\Delta : y = m$ và phần đồ thị có $x > 0$. Theo đồ thị ta có :

| m | Số nghiệm của phương trình |
|---|---|
| $+\infty$ | 2 |
| 1 | 3 |
| | 4 |
| 0 | 2 |
| | 0 |
| −5 | 0 |
| $-\infty$ | 1 |

## 22. ĐH Y DƯỢC TPHCM

Cho hàm số : $y = \dfrac{2x^2 + (1 - m)x + 1 + m}{-x + m}$ $(C_m)$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi m = 1.
2. Chứng minh rằng với mọi $m \neq -1$, các đường $(C_m)$ tiếp xúc với một đường thẳng cố định tại một điểm cố định. Xác định phương trình đường thẳng cố định đó.

### Giải

$$y = \frac{2x^2 + (1 - m)x + 1 + m}{-x + m} \quad (C_m).$$

Facebook.com/TeacherSokPiseth www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok-SPS

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi m = 1

$$y = f(x) = \frac{2x^2 + 2}{-x + 1}$$

**a)** MXĐ : $D = R \setminus \{1\}$

**b)** $f'(x) = \dfrac{-2x^2 + 4x + 2}{(-x+1)^2}$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 - \sqrt{2} \\ x_2 = 1 + \sqrt{2} \end{array}\right..$$

**c)** $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$; $\quad y = -2x - 2 + \dfrac{4}{-x+1}$.

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4}{-x+1} = 0$ : Tiệm cận xiên : $y = -2x - 2$.

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \infty$ : Tiệm cận đứng : $x = 1$.

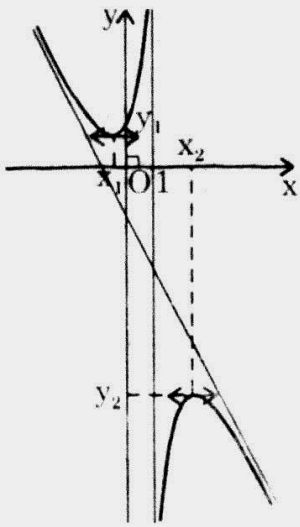
**d)** Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | $x_1$ | | 1 | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f' | | − | 0 | + | ‖ | + | 0 | − | |
| f | $+\infty$ | ↘ | $y_1$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $y_2$ | ↘ | $-\infty$ |

$y_1 = f(x_1) = -4x_1 = -4(1 - \sqrt{2})$.

$y_2 = f(x_2) = -4x_2 = -4(1 + \sqrt{2})$.

**e)** Đồ thị :




**2.** Xét điểm cố định $M_0(x_0; y_0)$, $M_0 \in (C_m)$ $\forall m$

$$\Leftrightarrow \quad y_0 = \frac{2x_0^2 + (1-m)x_0 + 1 + m}{-x_0 + m} \qquad (m \neq x_0)$$


www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

$\Leftrightarrow \quad x_0y_0 + my_0 = 2x_0^2 + (1 - m)x_0 + 1 + x_0$

$\Leftrightarrow \quad m(y_0 + x_0 - 1) - (2x_0^2 + x_0y_0 + x_0 + 1) = 0, \quad \forall m \neq x_0.$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_0 + x_0 - 1 = 0 \\ 2x_0^2 + x_0y_0 + x_0 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = 2 \end{cases}, \quad (m \neq -1).$$

Ta có : $f'(x) = \dfrac{-2x^2 + 4mx - m^2 + 2m + 1}{(-x + m)^2}$.

$f'(-1) = -1.$

Phương trình tiếp tuyến tại $M_0(-1; 2)$.

$y - 2 = f'(-1)(x + 1) \quad \Leftrightarrow \quad y = -x + 1 : \quad (d)$

Vậy : $\forall m \neq -1$, $(C_m)$ luôn tiếp xúc với đường thẳng cố định (d): $y = -x + 1$ tại điểm cố định $M_0(-1; 2)$.

## 23. TRUNG TÂM ĐÀO TẠO BỒI DƯỠNG CÁN BỘ Y TẾ

Cho hàm số : $y = \dfrac{x^2 - m(m + 1)x + m^3 + 1}{x - m}$ ; trong đó x là biến số, m là tham số.

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho khi m = 1.

**2.** Chứng minh rằng đồ thị của hàm số đã cho luôn có các điểm cực đại, cực tiểu với mọi giá trị của m. Xác định tọa độ các điểm cực trị đó.

**3.** Chứng tỏ rằng chỉ có một điểm A duy nhất trên mặt phẳng tọa độ sao cho nó là điểm cực đại của đồ thị ứng với một giá trị thích hợp của m và cũng là điểm cực tiểu của đồ thị ứng với một giá trị thích hợp khác. Tìm tọa độ của A.

### Giải

$$y = f(x) = \frac{x^2 - m(m + 1)x + m^3 + 1}{x - m}$$

**1.** m = 1 : $\quad f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

**a)** MXĐ : $D = R \setminus \{1\}$

**b)** $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}$; $\qquad f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

**c)** $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$; $\qquad y = x - 1 + \dfrac{1}{x - 1}$

Facebook.com/TeacherSokPiseth www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

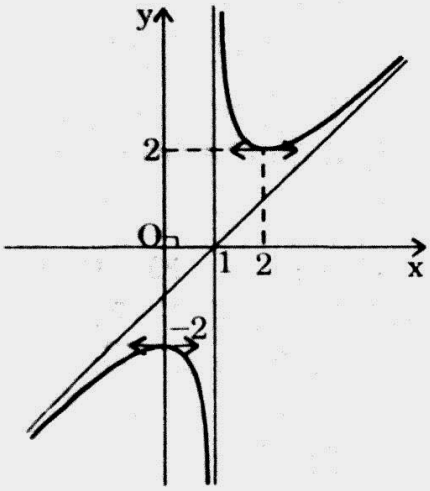
$\lim\limits_{x \to \infty} \left( \dfrac{1}{x-1} \right) = 0$ : Tiệm cận xiên : $y = x - 1$.

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \infty$ : Tiệm cận đứng : $x = 1$.

**d)** Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | 0 | | 1 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f ' | | + | 0 | − | ‖ | − | 0 | + | |
| f | $-\infty$ | ↗ | −2 | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | 2 | ↗ | $+\infty$ |

**e)** Đồ thị : hình bên.




**2.** $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2mx + m^2 - 1}{(x-m)^2}$

$\Delta' = 1 > 0 \Rightarrow$ f '(x) có hai nghiệm $x_1$, $x_2$.

$\Rightarrow$ f(x) luôn có một điểm cực đại và một điểm cực tiểu.

Tọa độ điểm cực đại : $M_1 \begin{cases} x = m - 1 \\ y = 2x - m^2 - m \end{cases}$

Tọa độ điểm cực tiểu : $M_2 \begin{cases} x = m + 1 \\ y = 2x - m^2 - m \end{cases}$

Ta tìm quỹ tích điểm cực đại : $M_1 \begin{cases} x = m - 1 & (1) \\ y = 2x - m^2 - m & (2) \end{cases}$

(1) $\Rightarrow$ $m = x + 1$

(2) $\Rightarrow$ $y = 2x - (x+1)^2 - (x+1)$

$y = -x^2 - x - 2$ (d).

Ta tìm quỹ tích điểm cực tiểu : $M_2 \begin{cases} x = m + 1 & (1) \\ y = 2x - m^2 - m & (2) \end{cases}$

(1) $\Rightarrow$ $m = x - 1$.

(2) $\Rightarrow$ $y = 2x - (x-1)^2 - (x-1)$

$y = -x^2 + 3x$ (d').


www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

**3.** Điểm A là giao điểm của (d) và (d')

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (d') :

$$-x^2 - x - 2 = -x^2 + 3x \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{2}.$$

$$A \in (d') \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{7}{4}.$$

Vậy điểm cần tìm là : $A\left(-\frac{1}{2}; -\frac{7}{4}\right)$.

## 24. HỌC VIỆN QUAN HỆ QUỐC TẾ

Cho hàm số : $y = 4x^3 - mx^2 - 3x + m$.

**1.** Chứng minh rằng với mọi m hàm số luôn luôn có cực đại và cực tiểu, đồng thời chứng minh rằng hoành độ cực đại và hoành độ cực tiểu của hàm số luôn luôn trái dấu.

**2.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số ứng với m = 0.

**3.** Phương trình : $4x^3 - 3x = \sqrt{1 - x^2}$ có bao nhiêu nghiệm ?

### Giải

$$y = f(x) = 4x^3 - mx^2 - 3x + m.$$

**1.** Ta có : $f'(x) = 12x^2 - 2mx - 3$.

$f'(x)$ có : $a.c < 0, \forall m$.

$\Rightarrow$ $f'(x)$ có 2 nghiệm $x_1, x_2$ trái dấu $\forall m$.

$\Rightarrow$ Với mọi m hàm số luôn luôn có cực đại và cực tiểu và hoành độ cực đại và cực tiểu luôn luôn trái dấu.

**2.** m = 0 : $f(x) = 4x^3 - 3x$.

**a)** MXĐ : D = R.

**b)** $f'(x) = 12x^2 - 3$; $\quad f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{1}{2}$.

**c)** Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f' | | + | 0 | − | 0 | + | |
| f | $-\infty$ | ↗ | CĐ 1 | ↘ | CT −1 | ↗ | $+\infty$ |

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

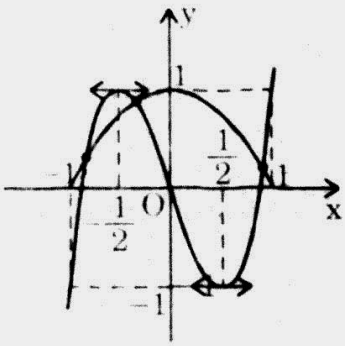
CĐ : $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$;  CT : $f\left(\frac{1}{2}\right) = -1$

**d)** $f''(x) = 24x$.

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

| x | $-\infty$ | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f'' | | − | 0 | + | |
| f | | Lồi | 0 | Lõm | |

Điểm uốn : O(0; 0).




**e)** Đồ thị : hình bên.

**3.** Phương trình : $4x^3 - 3x = \sqrt{1 - x^2}$ (1) có bao nhiêu nghiệm ?

Ta có : $y = \sqrt{1 - x^2}$

$$(C') \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 + x^2 = 1 \end{cases}$$

Vậy đồ thị (C') là nửa trên của đường tròn O bán kính R = 1.

Theo đồ thị (C') cắt (C) tại 3 điểm. Vậy phương trình (1) có 3 nghiệm.

## 25. ĐH NGOẠI THƯƠNG – KHỐI D

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số : $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$.

**2.** Từ một điểm bất kì trên đường thẳng x = 2, ta có thể kẻ được bao nhiêu tiếp tuyến tới đồ thị của hàm số ?

### Giải

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

**a)** MXĐ : D = R.

**b)** $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$

**c)** Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | 1 | | 3 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f' | | + | 0 | − | 0 | + | |
| f | $-\infty$ | ↗ | 3 CĐ | ↘ | −1 CT | ↗ | $+\infty$ |

**d)** $f''(x) = 6x - 12$

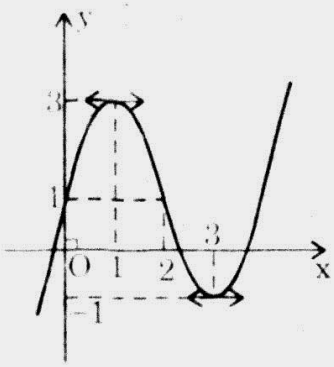

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

| x | $-\infty$ | 2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| f'' | − | 0 | + |
| f | Lồi | 1 | Lõm |

Điểm uốn : I(2; 1).

$x = 0 \Rightarrow y = -1$




**c)** Đồ thị : hình bên.

**2.** Xét điểm M(2, m) trên đường thẳng x = 2

Xét đường thẳng (d) đi qua M : (d) : $y - m = k(x - 2)$

$y = k(x - 2) + m.$

(d) tiếp xúc với (C) $\Leftrightarrow$ Hệ phương trình sau có nghiệm :

$$\begin{cases} x^3 - 6x^2 + 9x - 1 = k(x - 2) + m \\ 3x^2 - 12x + 9 = k \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ Phương trình sau có nghiệm :

$$x^3 - 6x^2 + 9x - 1 = (3x^2 - 12x + 9)(x - 2) + m \qquad (1)$$

Ta có : (1) $\Leftrightarrow$ $-2x^3 + 12x^2 - 24x + 17 = m$

Đặt : $g(x) = -2x^3 + 12x^2 - 24x + 17$

Ta có : $g'(x) = -6x^2 + 24x - 24 = -6(x - 2)^2 \le 0.$

Ta có bảng biến thiên của g(x) :

| x | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| g' | | − | |
| g | $+\infty$ | ↘ | $-\infty$ |

Vậy phương trình (1) luôn có một nghiệm x duy nhất, từ đó suy ra từ M(2, m) ta luôn kẻ được một tiếp tuyến duy nhất đến (C).

## 26. ĐH AN NINH – KHỐI A – BAN B

Cho hàm số $y = \dfrac{2x^2 + (1 - m)x + m + 1}{-x + m}$ $(C_m)$.

**1.** Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số khi m = 1.

**2.** Chứng minh rằng với mọi $m \ne -1$, các đường cong $(C_m)$ đều tiếp xúc với một đường thẳng cố định tại một điểm cố định.

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

## Giải

**1.** Khi m = 1, ta có : $y = \dfrac{2x^2 + 2}{-x + 1} = -2x - 2 + \dfrac{4}{-x + 1}$

MXĐ : $D = R \setminus \{1\}$

Đạo hàm : $y' = -2 + \dfrac{4}{(-x + 1)^2}$

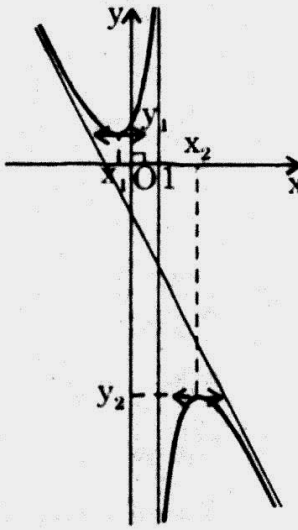
$$y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{l} x = 1 - \sqrt{2} = x_1 \\ x = 1 + \sqrt{2} = x_2 \end{array} \right.$$

$y_1 = f(x_1) = -4(1 - \sqrt{2})$

$y_2 = f(x_2) = -4(1 + \sqrt{2})$

Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | $x_1$ | | 1 | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f ' | | − | 0 | + | ‖ | + | 0 | − | |
| f | $+\infty$ | ↘ | CT | ↗ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | CĐ | ↘ | $-\infty$ |




Tiệm cận đứng : x = 1.

Tiệm cận xiên : y = −2x − 2.

Đồ thị : hình bên.

**2.** Ta chứng minh hai điều :

i) Đồ thị $(C_m)$ đi qua điểm cố định.

ii) Đạo hàm của hàm số tại điểm cố định đó là hằng số.

**i)** $y = f_m(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (x + y - 1)m = 2x^2 + x + 1 + xy \\ x \neq m \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2x^2 + x + 1 + xy = 0 \\ x \neq m \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ m \neq -1 \end{cases}$$

Vậy $(C_m)$ luôn đi qua $A(-1; 2)$ $\forall m \neq -1$.

**ii)** Khi x = −1 thì : $y' = \dfrac{-2x^2 + 4mx - m^2 + 2m + 1}{(-x + m)^2}$

trở thành : $y' = \dfrac{-2 - 4m - m^2 + 2m + 1}{(1 + m)^2} = -1$

Phương trình tiếp tuyến với $(C_m)$ luôn tiếp xúc với đường thẳng cố định (d) tại điểm $A(-1; 2)$ cố định.



Facebook.com/TeacherSokPiseth www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

# NĂM 1999

## 27. CAO ĐẲNG MARKETING

Cho hàm số : $y = x(x-3)^2$ có đồ thị (C).

**a)** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

**b)** Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm A(4; 4).

**c)** Biện luận theo m số nghiệm của phương trình : $x^3 - 6x^2 + 9x - m = 0$.

### Giải

**a)** Khảo sát sự biến thiên và vẽ (C)

Hàm số : $y = x(x-3)^2 \Leftrightarrow y = x^3 - 6x^2 + 9x$

- MXĐ : $D = R$
- Đạo hàm : $y' = 3x^2 - 12x + 9$

  * $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$.

  * Khi $x = 1$ thì $y = 4$ (cực đại).

  Khi $x = 3$ thì $y = 0$ (cực tiểu).
- Đạo hàm cấp hai : $y'' = 6x - 12$.

  * $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 2$

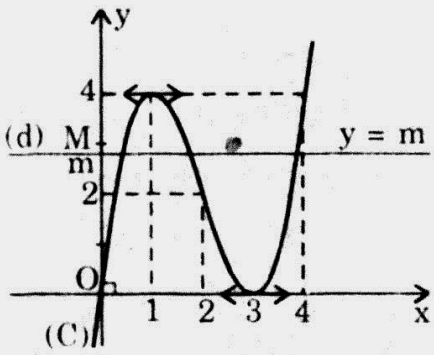
  * Khi $x = 2$ thì $y = 2$ (điểm uốn).
- Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | 1 | | 2 | | 3 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | 0 | − | \| | − | 0 | + | |
| y | $-\infty$ | ↗ | 1 | ↘ | 2 | ↘ | 0 | ↗ | $+\infty$ |

- Giới hạn :

  * Khi $x \to -\infty$, ta có : $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$.

  * Khi $x \to +\infty$, ta có : $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = +\infty$.
- Đồ thị (C) là đường cong bậc ba, có điểm cực đại (1; 4), điểm cực tiểu (3; 0), điểm uốn (2; 2), qua O(0; 0).




**b)** Phương trình của tiếp tuyến của (C) tại A(4; 4).

Ta thấy, khi $x = 4$ thì $y = 4$ nên $A(4; 4) \in (C)$.



www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

Tiếp tuyến của (C) tại A có phương trình : $y - y_A = y'(x_A)(x - x_A)$ (1)

Mà : $y'(x_A) = 3x_A^2 - 12x_A + 9 = 9$ nên (1) cho : $y - 4 = 9(x - 4)$

$\Leftrightarrow \quad y = 9x - 32.$

Đó là phương trình phải tìm.

c) Biện luận theo m số nghiệm của phương trình : $x^3 - 6x^2 + 9x - m = 0$ (2)

Phương trình có thể viết : $x^3 - 6x^2 + 9x = m$.

Đặt : $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ có đồ thị (C) đã vẽ ở trên, thì $y = m$ có đồ thị là đường thẳng (cắt Oy tại M có tung độ m). Ta thấy : số nghiệm của phương trình trên là số giao điểm của (C) và (d). Trên đồ thị, ta có :

* Khi $m > 1$ thì (d) cắt (C) tại 1 điểm đơn : (2) có 1 nghiệm đơn.
* Khi $m = 4$ thì (d) tiếp xúc với (C) tại điểm cố định có hoành độ $x = 1$ và cắt (C) tại điểm A : (2) có 1 nghiệm kép $x = 1$ và một nghiệm đơn $x \neq 1$.
* Khi $0 < m < 4$ : thì (d) cắt (C) tại 3 điểm phân biệt : (2) có 3 nghiệm đơn.
* Khi $0 = m$ : thì (d) cắt (C) tại O và tiếp xúc Ox tại (3; 0), (2) có một nghiệm đơn $x = 0$ và một nghiệm kép $x = 3$.
* Khi $0 > m$ : thì (d) cắt (C) tại một điểm đơn : (2) có một nghiệm đơn.

## 28. CAO ĐẲNG SƯ PHẠM MẪU GIÁO TRUNG ƯƠNG 3

Cho hàm số : $y = x^3 + (m - 1)x^2 - (2m + 1)x - 2$ có đồ thị là $(C_m)$ trong đó m là tham số thực.

1. Với giá trị nào của m thì hàm số đạt cực trị tại các điểm có hoành độ $x_1$, $x_2$ thỏa mãn : $x_1^2 + x_2^2 = 2$.
2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi $m = 1$.
3. Với giá trị nào của m thì đồ thị $(C_m)$ tiếp xúc với trục hoành.

### Giải

1. Giá trị của m :

Hàm số : $y = x^3 + (m - 1)x^2 - (2m + 1)x - 2$ (1)

Đạo hàm : $y' = 3x^2 + 2(m - 1)x - (2m + 1)$ (2)

Hàm số đạt cực trị tại $x_1$ và $x_2$

$\Leftrightarrow$ $x_1$ và $x_2$ là hai nghiệm phân biệt của (2)

$\Leftrightarrow$ $y' = 0$ có biệt số $\Delta' = (m - 1)^2 + 3(2m + 1) > 0$

$\Leftrightarrow$ $(m + 2)^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \neq -2$ (3)


www.pisethsok.wordpress.com

Mặt khác : $x_1, x_2$ thỏa mãn : $x_1^2 + x_2^2 = 2$ (4)

Mà (2) có 2 nghiệm : $x_1 = 1 \vee x_2 = \dfrac{-2m-1}{3}$

nên (4) $\Leftrightarrow$ $1^2 + \left(\dfrac{2m+1}{3}\right)^2 = 2$ $\Leftrightarrow$ $m^2 + m - 2 = 0$

$\Leftrightarrow$ $m = 1 \vee m = -2.$

So với (3) ta chỉ nhận $m = 1$.

- *Chú ý* : Có thể dùng định lí Viét để giải (2) với : $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{2(m-1)}{3} \\ x_1x_2 = -\dfrac{(2m+1)}{3} \end{cases}$

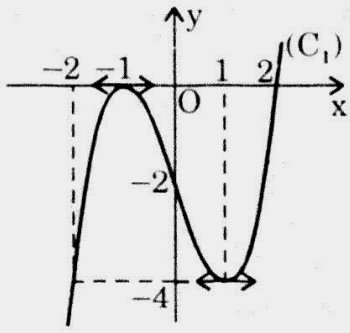
sau khi biến đổi $x_1^2 + x_2^2 = 2$ thành : $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 2$.

**2.** Khảo sát và vẽ $(C_1)$ khi $m = 1$

Khi $m = 1$ thì hàm số trở thành : $y = x^3 - 3x - 2$

- MXĐ : $D = R$
- Đạo hàm : $y' = 3x^2 - 3$
  - * $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$
  - * Khi $x = -1$ thì $y = 0$ (cực đại).
  - * Khi $x = 1$ thì $y = -4$ (cực tiểu).
- Đạo hàm $y'' = 6x$
  - * $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 0.$
  - * $x = 0$, $y = -2$ (điểm uốn).
- Giới hạn : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (x^3) = \pm\infty.$

| x | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | 0 | − | | − | 0 | + | |
| y | $-\infty$ | ↗ | 0 | ↘ | 2 | ↘ | −4 | ↗ | $+\infty$ |




www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

- Đồ thị $(C_1)$ là đường cong bậc ba có điểm cực đại $(-1, 0)$, điểm cực tiểu $(1; -4)$, điểm uốn $(0; -2)$, qua các điểm $(-2; -4)$, $(2; 0)$.

**3.** Giá trị của m : $(C_m)$ tiếp xúc với trục hoành $\Leftrightarrow$ $y(x_1) = 0 \vee y(x_2) = 0$.

Ta có hai trường hợp :

**i)** $x_1 = 1$. Lúc đó : $y(x_1) = 1 + (m - 1) - (2m + 1) - 2 = -m - 3$

Do đó : $y(x_1) = 0 \Leftrightarrow m = -3$

**ii)** $x_2 = -\dfrac{2m+1}{3}$ Lúc đó : $y(x_2) = 0$

$$\Leftrightarrow -\left(\frac{2m+1}{3}\right)^3 + (m-1)\left(\frac{2m+1}{3}\right)^2 + \frac{(2m+1)^2}{3} - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -(2m+1)^3 + 3(m-1)(2m+1)^2 + 9(2m+1)^2 - 54 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4m^3 + 24m^2 + 21m - 49 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m-1)(2m+7)^2 = 0 \Leftrightarrow m = 1 \vee m = -\frac{7}{2}.$$

Vậy : khi $m = -3 \vee m = 1 \vee m = -\dfrac{7}{2}$ thì $(C_m)$ tiếp xúc với trục hoành.

## 29. CAO ĐẲNG KINH TẾ ĐỐI NGOẠI

Cho họ đường cong $(C_m)$ : $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x - 1$

(m là tham số)

**1.** Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của đường cong $(C_m)$ ứng với $m = 2$.

**2.** Viết phương trình tất cả các tiếp tuyến của (C) biết chúng đi qua điểm $A(0; -1)$.

**3.** Định m để $(C_m)$ có 2 cực trị và đường thẳng nối hai điểm cực trị vuông góc với đường thẳng $y = x$.

### Giải

**1.** Khảo sát và vẽ (C) khi $m = 2$

Hàm số : $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x - 1$.

Khi $m = 2$, ta có : $y = 2x^3 + 3x^2 - 1$

- MXĐ : $D = R$
- Đạo hàm : $y' = 6x^2 + 6x$

  * $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1$

  * Khi $x = 0$ thì $y = -1$ (cực tiểu).

  * Khi $x = -1$ thì $y = 0$ (cực đại).

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

- Đạo hàm cấp hai : $y'' = 12x + 6$

  * $y'' = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

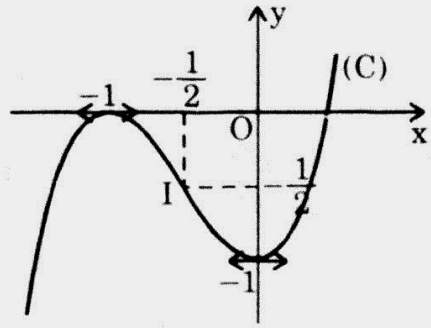
  * Khi $x = -\frac{1}{2}$ thì $y = -\frac{1}{2}$ (điểm uốn).

- Giới hạn : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (2x^3) = \pm\infty$.

- Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | 0 | - | 0 | + | |
| y | $-\infty$ | ↗ | 0 | ↘ | $-1$ | ↗ | $+\infty$ |

- Đồ thị (C) là đường cong bậc ba, có điểm cực đại $(-1; 0)$, điểm cực tiểu $(0; -1)$, điểm uốn $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.




**2.** Phương trình tiếp tuyến qua $A(0; -1)$

Gọi k là hệ số góc của tiếp tuyến (d) phải tìm. Phương trình của tiếp tuyến ấy : $y = kx - 1$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) : $2x^3 + 3x^2 - 1 = kx - 1$

$$\Leftrightarrow \quad x(2x^2 + 3x - k) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{ll} x = 0 & (1) \\ 2x^2 + 3x - k = 0 & (2) \end{array}\right.$$

$$\text{(d) là tiếp tuyến của (C)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{(2) có nghiệm } x = 0 \\ \text{(2) có nghiệm kép} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} k = 0 \\ k = -\frac{9}{8} \end{array}\right.$$

Vậy : qua A có hai tiếp tuyến : $y = -1$; $y = -\frac{9}{8}x - 1$.

**3.** Định m để cho $(C_m)$ :

**i)** Có 2 cực trị :

$(C_m)$ có 2 cực trị $\Leftrightarrow$ $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow$ $x^2 + (m - 1)x + m - 2 = 0$ có : $(m - 1)^2 - 4(m - 2) > 0$

$\Leftrightarrow$ $(m - 3)^2 > 0$ $\Leftrightarrow$ $m \neq 3$ (3)

**ii)** Đường thẳng nối 2 cực trị có phương trình là phần dư của y chia cho y'. Ta có phần dư là : $-(m - 3)^2x - m^2 + 3m - 3$

Phương trình của đường thẳng nối hai điểm cực trị :

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

$$y = -(m-3)^2x - m^2 + 3m - 3.$$

Đường thẳng này vuông góc với đường thẳng $y = x$

$$\Leftrightarrow \quad -(m-3)^2.1 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = 4 \end{array}\right.$$

Giá trị này của m thỏa mãn (3).

Vậy : khi $m = 2 \vee m = 4$ thì $(C_m)$ có 2 cực trị và đường thẳng nối 2 cực trị vuông góc với đường thẳng $y = x$.

## 30. ĐH THỦY SẢN

Cho hàm số : $y = \dfrac{x^2 - mx + 2m - 2}{x - 1}$ có đồ thị $(C_m)$.

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 2$.

**2.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị $(C_m)$ có điểm cực đại và cực tiểu. Chứng minh rằng các điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị $(C_m)$ luôn luôn nằm trên một parabol cố định khi m thay đổi.

### Giải

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số : $y = \dfrac{x^2 - mx + 2m - 2}{x - 1}$

Khi $m = 2$ trở thành : $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} \Leftrightarrow y = x - 1 + \dfrac{1}{x - 1}$

- MXĐ : $D = R \setminus \{1\}$.
- Đạo hàm : $y' = 1 - \dfrac{1}{(x-1)^2}$

  * $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$

  * Khi $x = 0$ thì $y = -2$ (cực đại)

  * Khi $x = 2$ thì $y = 2$ (cực tiểu)
- Giới hạn :

  * $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(x - 1 + \dfrac{1}{x - 1}\right) = \pm\infty.$

  * Khi $x \to \pm\infty$, $\dfrac{1}{x - 1} \to 0$, nên : $y = x - 1$ là tiệm cận xiên.

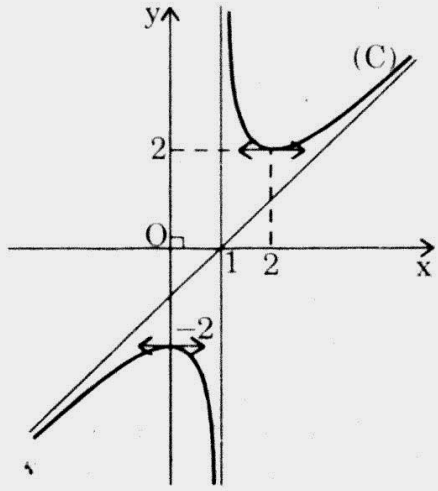
  * $\lim\limits_{x \to 1} y = \lim\limits_{x \to 1} \left(x - 1 + \dfrac{1}{x - 1}\right) = \pm\infty$ : tiệm cận đứng : $x = 1$.
- Bảng biến thiên :



www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

| x | $-\infty$ | | 0 | | 1 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | 0 | − | ‖ | − | 0 | + | |
| y | $-\infty$ | ↗ | −2 | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | 2 | ↗ | $+\infty$ |

• Đồ thị (C) là một hyperbol xiên góc nhận x = 1 làm đường tiệm cận đứng, y = x − 1 làm tiệm cận xiên, (0; −2) làm điểm cực đại, (2; 2) làm điểm cực tiểu.




**2.** Tìm m để $(C_m)$ có điểm cực đại và điểm cực tiểu

Hàm số : $y = \dfrac{x^2 - mx + 2m - 2}{x - 1}$

có đạo hàm : $y' = \dfrac{x^2 - 2x - m + 2}{(x-1)^2}$

y có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow$ y' = 0 có 2 nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow \Delta' = m - 1 > 0$

$\Leftrightarrow m > 1.$

• Chứng minh các điểm cực đại và cực tiểu nằm trên một parabol cố định :

Gọi $x_i$ là hai nghiệm của y' = 0

Ta có : $x_i = 1 \pm \sqrt{m-1} \Leftrightarrow m = (x_i - 1)^2 + 1$

Mà điểm cực trị thuộc đồ thị nên : $y_i = \dfrac{x_i^2 - (x_i - 2)m - 2}{x_i - 1}$

Thay m ở (1) vào, ta được :

$$y_i = \frac{x_i^2 - (x_i - 2)[(x_i - 1)^2 + 1] - 2}{x_i - 1}$$

$$y_i = \frac{-x^3 + 5x_i^2 - 6x_i + 2}{x_i - 1} \qquad (x_i \neq 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad y_i = -x_i^2 + 4x_i - 2 \qquad (x_i \neq 1)$$

Tọa độ $(x_i, y_i)$ của điểm cực trị thỏa mãn hàm số : $y = -x^2 + 4x - 2$ nên điểm cực đại và điểm cực tiểu của $(C_m)$ thuộc parabol cố định :

$$y = -x^2 + 4x - 2 \qquad (x \neq 1).$$

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

## 31. ĐH HÙNG VƯƠNG – KHỐI A

Cho hàm số : $y = x^3 + (1 - m)x^2 + 2x + m + 2$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số y khi $m = -2$.
2. Tìm các điểm mà đồ thị của hàm số y luôn đi qua với mọi m. Xác định các giá trị của m để đồ thị tiếp xúc với trục hoành.

### Giải

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị :

Hàm số : $y = x^3 + (1 - m)x^2 + 2x + m + 2$

Khi $m = -2$, ta có : $y = x^3 + 3x^2 + 2x$

- MXĐ : $D = R$
- Đạo hàm : $y' = 3x^2 + 6x + 2$

  * $y' = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{3+\sqrt{3}}{3} \vee x = \dfrac{-3+\sqrt{3}}{3}$

  * Khi $x = \dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$ thì $y = \dfrac{2}{9}$ (cực đại)

  * Khi $x = \dfrac{-3+\sqrt{3}}{3}$ thì $y = -\dfrac{2}{9}$ (cực tiểu).

- Đạo hàm cấp hai : $y'' = 6x + 6$

  * $y'' = 0 \Leftrightarrow x = -1$

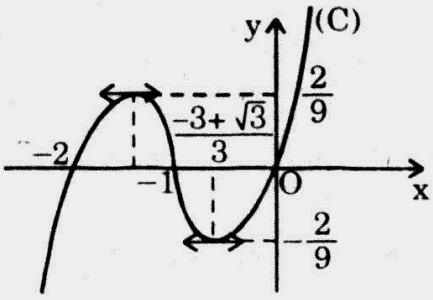
  * Khi $x = -1$ thì $y = 0$ (điểm uốn).

- Giới hạn : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (x^3) = \pm\infty$

- Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | $-\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$ | | $\dfrac{-3+\sqrt{3}}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | 0 | − | 0 | + | |
| y | $-\infty$ | ↗ | $\dfrac{2}{9}$ | ↘ | $-\dfrac{2}{9}$ | ↗ | $+\infty$ |

- Đồ thị (C) là đường cong bậc ba có điểm cực đại $\left(-\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}, \dfrac{2}{9}\right)$; điểm cực tiểu $\left(\dfrac{-3+\sqrt{3}}{3}, -\dfrac{2}{9}\right)$, điểm uốn $(-1; 0)$.






www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

**2.** Các điểm cố định của đồ thị :

Hàm số : $y = x^3 + (1 - m)x^2 + 2x + m + 2$

$\Leftrightarrow \quad y = x^3 + x^2 + 2x + 2 + m(1 - x^2).$

Phương trình này được nghiệm đúng với mọi m.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x^2 = 0 \\ y = x^3 + x^2 + 2x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 6 \vee y = 0 \end{cases}$$

Vậy : đồ thị của hàm số luôn luôn đi qua các điểm (1; 6), (–1; 0) $\forall m$.

- Xác định m để có đồ thị tiếp xúc với Ox.

Đồ thị của hàm số : $y = x^3 + (1 - m)x^2 + 2x + m + 2$, tiếp xúc với trục hoành khi và chỉ khi $y = 0$ (1) có nghiệm số kép.

Mà : (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x^2 - mx + m + 2 = 0 \quad (2) \end{cases}$

nên (1) có nghiệm kép $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (2) \text{ có nghiệm } x = -1 \\ (2) \text{ có } \Delta = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -\dfrac{3}{2} \\ m = 2(1 \pm \sqrt{3}) \end{array}\right.$

Tóm lại, khi $m = -\dfrac{3}{2} \vee m = 2(1 \pm \sqrt{3})$ thì đồ thị của hàm số tiếp xúc với Ox.

## 32. ĐH QUỐC GIA TPHCM – ĐỢT 1 – KHỐI A

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số : $y = \dfrac{2x^2 + x}{x + 1}$ (H).

**2.** Tìm những điểm M trên đường thẳng $y = 1$ sao cho từ M có thể kẻ được đúng một tiếp tuyến đến đồ thị (H).

**Giải**

$$y = f(x) = \frac{2x^2 + x}{x + 1} \quad (H)$$

**1.** MXĐ : $D = R \setminus \{1\}$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 4x + 1}{(x + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2}}{2}.$$

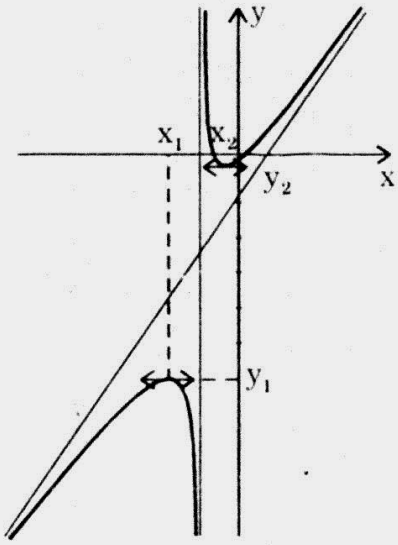


www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | $x_1$ | | $-1$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f' | | + | 0 | − | ‖ | − | 0 | + | |
| f | $-\infty$ | ↗ | CĐ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | CT | ↗ | $+\infty$ |

$$CĐ = y_1 = f(x_1) = \frac{4x_1 + 1}{1} = 4\left(\frac{-2-\sqrt{2}}{2}\right) + 1 = -3 - 2\sqrt{2}$$




CT : $y_2 = f(x_2) = -3 + 2\sqrt{2}$

Tiệm cận đứng : $x = 1$

Tiệm cận xiên : $y = 2x - 1$

Đồ thị : hình bên.

**2.** Xét điểm $M(x_0; 1) \in A : y = 1$

Xét (d) đi qua M :

(d) : $y - 1 = K(x - x_0) \quad \Leftrightarrow \quad y = Kx - Kx_0 + 1$

Phương trình hoành độ giao điểm (d) và (H) :

$$\frac{2x^2 + x}{x + 1} = Kx - Kx_0 + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x^2 + x = (x + 1)(Kx - Kx_0 + 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x^2 + x = Kx^2 - Kx_0 + x + Kx - Kxx_0 + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad (K - 2)x^2 + K(1 - x_0)x + 1 - Kx_0 = 0 \qquad (1)$$

(1) có nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} K \neq 2 \\ \Delta = 0 \end{cases}$

Mà : $\Delta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1 - x_0)^2K^2 - 4(K - 2)(1 - Kx_0) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad (1 - x_0)^2K^2 - 4K + 4x_0K^2 + 8 - 8Kx_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (1 + x_0)^2K^2 - 4(2x_0 + 1)K + 8 = 0 \qquad (2)$$

Ta tìm $x_0$ để (2) có một nghiệm K duy nhất khác 2. Ta xét các trường hợp sau :

- *Trường hợp 1* : $x_0 = -1$

  (2) $\Leftrightarrow \quad 4K + 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad K = -2$

- *Trường hợp 2* : (2) có 2 nghiệm $K_1$, $K_2$ với $K_1 = 2$.

  Thế vào (2) ta được : $4(1 - x_0)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = 1$

  (2) $\Leftrightarrow \quad K^2 - 12K + 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} K = 1 \\ K = 2 \text{ (loại)} \end{cases}$


www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

- *Trường hợp 3* : (2) có 2 nghiệm kép khác 1.

$$\Delta' = 0 \Leftrightarrow 4(2x_0 + 1)^2 - 8(x_0 + 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x_0 + 1)^2 - 2(x_0 + 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x_0^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy có 4 điểm thỏa mãn đề bài :

$$M_1(-1; 1),\quad M_2(1; 1),\quad M_3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right),\quad M_4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right).$$

## 33. ĐH QUỐC GIA TPHCM – ĐỢT 2 – KHỐI A

Cho hàm số : $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3$ $(C_m)$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = -2$.
2. Tìm m để đồ thị $(C_m)$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt trong đó có đúng hai điểm có hoành độ âm.

### Giải

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = -2$

$$y = f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 8$$

MXĐ : $D = R$

$$f'(x) = 3x^2 + 12x + 9$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -3 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | $-3$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f '(x) | | + | 0 | − | 0 | + | |
| f(x) | $-\infty$ | ↗ | CĐ 8 | ↘ | CT 4 | ↗ | $+\infty$ |

CĐ : $f(-3) = 8$

CT : $f(-1) = 4$

$$f''(x) = 6x + 12$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

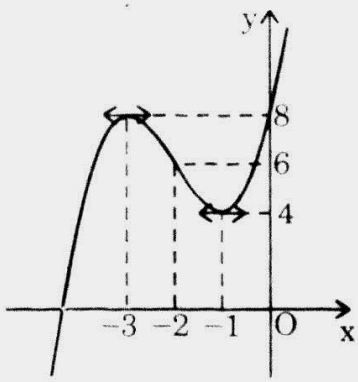
$$f(-2) = 6$$

| x | $-\infty$ | | $-2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f ''(x) | | − | 0 | + | |
| f(x) | | lồi | 6 | lõm | |

Điểm uốn M(−2; 6).

Facebook.com/TeacherSokPiseth www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

Đồ thị :




**2.** Phương trình hoành độ giao điểm của $(C_m)$ và Ox :

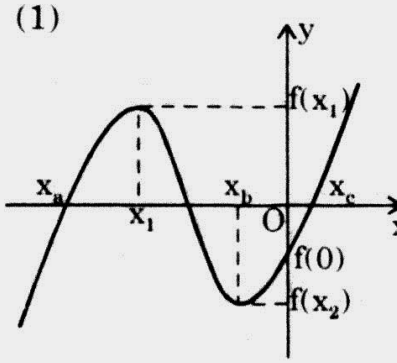
$$x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 = 0 \qquad (1)$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1)$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x_1 = m - 1 \\ x_2 = m + 1 \end{array}\right.$$

$$f(x_1) = -3m + 2$$

$$f(x_2) = -3m - 2.$$




f(x) = 0 có 3 nghiệm thỏa mãn : $x_a < x_b < 0 \le x_c$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x_1).f(x_2) < 0 \\ x_1 < 0 \\ f(0) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9m^2 - 4 < 0 \\ m - 1 < 0 \\ -m^3 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 < \dfrac{4}{9} \\ m < 1 \\ m \ge 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \le m < \frac{2}{3}.$$

## 34. ĐH QUỐC GIA TPHCM – ĐỢT 1 – KHỐI D

Cho hàm số : $y = mx^3 - (m - 1)x^2 - (2 + m)x + m - 1 \qquad (C_m)$.

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị $(C_1)$ của hàm số ứng với m = 1.

**2.** Tìm trên đường thẳng y = 2 những điểm từ đó có thể kẻ được 3 tiếp tuyến đến $(C_1)$.

**3.** Tìm những điểm cố định mà đồ thị $(C_m)$ luôn đi qua với mọi m.

### Giải

$$y = f(x) = mx^3 - (m - 1)x^2 - (2 + m)x + m - 1$$

**1.** m = 1 : $f(x) = x^3 - 3x \qquad (C)$

MXĐ : D = R

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$$

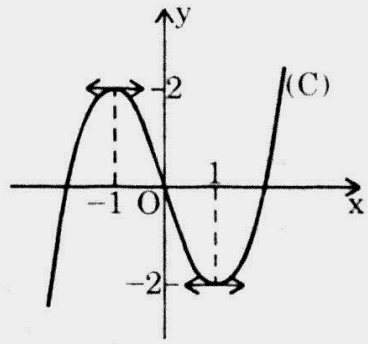
$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 1$$



www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f '(x) | | + | 0 | − | 0 | + | |
| f(x) | $-\infty$ | ↗ | 2 | ↘ | −2 | ↗ | $+\infty$ |




$f''(x) = 6x$

$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$

$f(0) = 0$. Điểm uốn O(0; 0).

Đồ thị : hình bên.

**2.** Xét điểm A(a; 2) trên đường y = 2

Xét đường (d) qua A :

$$y - 2 = K(x - a) \quad \Leftrightarrow \quad y = K(x - a) + 2$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (C)

$$x^3 - 3x = K(x - a) + 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - 3x - K(x - a) - 2 = 0 \qquad (1)$$

(1) có nghiệm kép $\Rightarrow \quad 3x^2 - 3 - K = 0 \quad \Rightarrow \quad K = 3x^2 - 3 \qquad (2)$

Thế vào (1) : $x^3 - 3x - (3x^2 - 3)(x - a) - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad x^3 - 3x - 3x^3 + 3x + 3ax^2 - 3a - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x^3 - 3ax^2 + 3a + a = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x + 1)[2x^2 - (3a + 2)x + 3a + 2] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ 2x^2 - (3a + 2)x + 3a + 2 = 0 \end{array}\right.$$

Đặt : $g(x) = 2x^2 - (3a + 2)x + 3a + 2$

Từ A kẻ được 3 tiếp tuyến đến $(C_1)$

$\Leftrightarrow$ g(x) có 2 nghiệm phân biệt khác −1

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \Delta_g > 0 \\ g(-1) \neq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (3a + 2)^2 - 8(3a + 2) > 0 \\ 2 + 3a + 2 + 3a + 2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3a^2 - 4a - 4 > 0 \\ a \neq -1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a < -\dfrac{2}{3} \vee a > 2 \\ a \neq -1 \end{cases}.$$

**3.** $M_o(x_o; y_o) \in (C_m), \forall m$

$$\Leftrightarrow \quad y_o = m x_o^3 - (m - 1) x_o^2 - (2 + m)x_o + m - 1.$$

$$\Rightarrow \quad m(x_o^3 - x_o^2 - x_o + 1) + (x_o^2 - 2x_o - 1 - y_o) = 0$$



www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

$(C_m)$ qua $M_o$, $\forall m$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x_o^3 - x_o^2 - x_o + 1 = 0 \\ x_o^2 - 2x_o - 1 - y_o = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} (x_o - 1)(x_o^2 - 1) = 0 \\ y_o = x_o^2 - 2x_o - 1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x_o = 1 \wedge y_o = -2 \\ x_o = -1 \wedge y_o = 2 \end{cases}$

Vậy $(C_m)$ luôn đi qua 2 điểm cố định : $M_1(1; -2)$, $M_2(-1; 2)$.

## 35. ĐH QUỐC GIA TPHCM – ĐỢT 2 – KHỐI D

Cho hàm số : $y = f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$.

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

**2.** Từ đồ thị (C) hãy suy ra đồ thị $(C_1)$ của hàm số :

$$y = f_1(x) = \frac{2|x|}{|x|-1} \quad \text{(vẽ hình riêng).}$$

Dùng đồ thị $(C_1)$ để biện luận theo tham số m số nghiệm x thuộc đoạn $[-1; 2]$ của phương trình : $(m-2).|x| - m = 0$.

### Giải

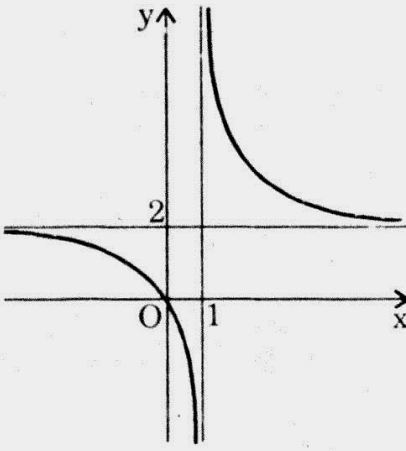
**1.** Khảo sát sự biến thiên :

* MXĐ : $D = R \setminus \{1\}$

* $f'(x) = \dfrac{-2}{(x-1)^2} < 0$

* Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f '(x) | | − | ‖ | − | |
| f(x) | 2 | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | 2 |




* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2$: Tiệm cận ngang $y = 2$.

* $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \infty$ : Tiệm cận đứng $x = 1$.

* $x = 0 \Rightarrow y = 0$

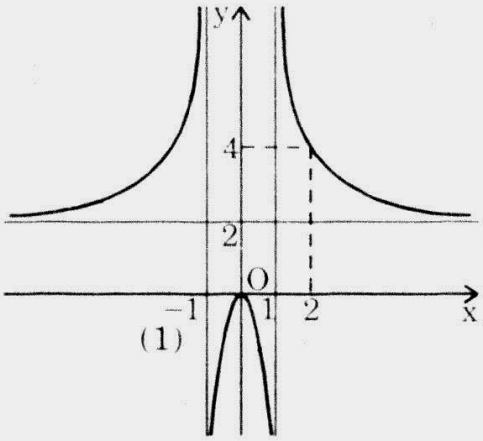
* Đồ thị : hình bên.

**2.** Từ đồ thị (C) suy ra đồ thị $(C_1)$ của hàm số : $y = f_1(x) = \dfrac{2|x|}{|x|-1}$.

$f_1(x)$ là hàm số chẵn.


www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

$(C_1)$ suy ra từ (C) bằng cách giữ nguyên phần có $x \geq 0$ và lấy đối xứng của chính phần giữ nguyên đó qua Oy.




Dùng $(C_1)$ biện luận theo tham số m số nghiệm x thuộc đoạn $[-1; 2]$ của phương trình :

$$(m-2).|x| - m = 0$$

$$(1) \Leftrightarrow \quad 2|x| = m(|x| - 1)$$

$$\frac{2|x|}{|x|-1} = m \qquad x \in [-1; 2].$$

Số nghiệm của (1) chính là giao điểm của $(C_1)$ thỏa mãn $x \in [-1; 2]$ với $y = m$.

Theo đồ thị ta có :

| m | số nghiệm của (1) |
|---|---|
| $+\infty$ | 1 |
| 4 | 1 |
| | 0 |
| 0 | 1 |
| | 2 |
| $-\infty$ | |

## 36. ĐH QUỐC GIA TPHCM – ĐỢT 1 – KHỐI B

Cho hàm số : $y = \dfrac{2mx^2 + x + m - 1}{mx + 1}$ $(H_m)$.

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số ứng với $m = 1$.

**2.** Tìm quỹ tích tâm đối xứng của đồ thị $(H_m)$ khi m thay đổi.

### Giải

$$y = f(x) = \frac{2mx^2 + x + m - 1}{mx + 1} \quad (H_m).$$

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số ứng với $m = 1$

$$y = f(x) = \frac{2x^2 + x}{x + 1}$$

MXĐ : $D = R \setminus \{-1\}$.

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 4x + 1}{(x+1)^2}; \qquad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2}}{2}$$

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok SPS

Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | $x_1$ | | $-1$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f '(x) | | + | 0 | − | ‖ | − | 0 | + | |
| f(x) | $-\infty$ | ↗ | CĐ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | CT | ↗ | $+\infty$ |

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \infty \qquad y = 2x - 1 + \frac{1}{x+1}$$

Tiệm cận xiên $y = 2x - 1$.

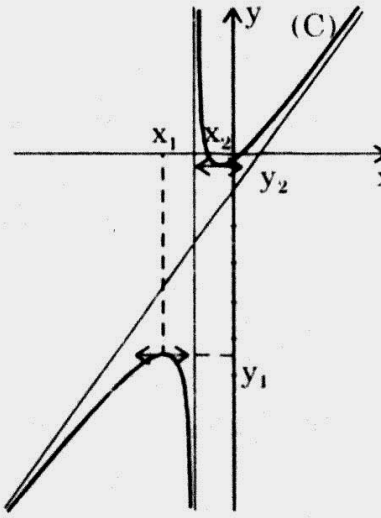
$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \infty$. Tiệm cận đứng $x = -1$.

Cực trị : $f(x_o) = \dfrac{u'}{v'} = \dfrac{4x_o + 1}{1}$

$$f(x_1) = f\left(\frac{-2-\sqrt{2}}{2}\right) = 4\left(\frac{-2-\sqrt{2}}{2}\right) + 1 = -3 - 2\sqrt{2}$$

$$f(x_2) = f\left(\frac{-2+\sqrt{2}}{2}\right) = 4\left(\frac{-2+\sqrt{2}}{2}\right) + 1 = -3 + 2\sqrt{2}.$$

Đồ thị : hình bên.




**2.** Tìm quỹ tích tâm đối xứng của $(H_m)$

$(H_m)$ có tiệm cận đứng $d_1 : x = -\dfrac{1}{m}$

tiệm cận xiên $d_2 : y = 2x - \dfrac{1}{m}$

Gọi M là tâm đối xứng ta có :

$$M \begin{cases} x = -\dfrac{1}{m} \\ y = 2x - \dfrac{1}{m} \end{cases} \Rightarrow \quad y = 2x + x$$

$$\Leftrightarrow \quad y = 3x.$$

Giới hạn : $x = -\dfrac{1}{m} \neq 0$.

Vậy quỹ tích tâm đối xứng M là đường thẳng d : $y = 3x$ (loại bỏ gốc O(0; 0)).

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

## 37. HỌC VIỆN CÔNG NGHỆ BƯU CHÍNH VIỄN THÔNG

Cho hàm số : $y = x^3 - 3x - 2$ (H).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (H) của hàm số.
2. Xét ba điểm điểm A, B, C thẳng hàng và thuộc (H). Gọi $A_1$, $B_1$, $C_1$ lần lượt là giao điểm của (H) với tiếp tuyến của đồ thị (H) tại A, B, C.

Chứng minh rằng $A_1$, $B_1$, $C_1$ cũng thẳng hàng.

### Giải

$y = f(x) = x^3 - 3x - 2$ (H).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (H) của hàm số :

MXĐ : D = R

$f'(x) = 3x^2 - 3.$

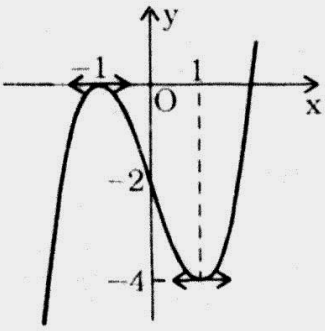
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | | + | 0 | - | 0 | + | |
| f(x) | $-\infty$ | ↗ | 0 CĐ | ↘ | CT $-4$ | ↗ | $+\infty$ |

$f''(x) = 6x.$

| x | $-\infty$ | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f''(x) | | - | 0 | + | |
| f(x) | | lồi | $-2$ | lõm | |




Điểm uốn I(0; −2).

Đồ thị : hình bên.

2. ABC thẳng hàng (A ≠ B ≠ C)

$$\Leftrightarrow \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \Leftrightarrow \frac{b^3 - a^3 - 3(b - a)}{b - a} = \frac{c^3 - a^3 - 3(c - a)}{c - a}$$

$\Leftrightarrow b^2 + ba + a^2 - 3 = c^2 + ca + a^2 - 3$

$\Leftrightarrow b^2 - c^2 + a(b - c) = 0 \Leftrightarrow (b - c)(b + c + a) = 0$

$\Leftrightarrow a + b + c = 0$

Phương trình tiếp tuyến tại A :

$y - f(a) = f'(a)(x - a) \Leftrightarrow y = f'(a)(x - a) + f(a)$ (d).

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (H) :

Facebook.com/TeacherSokPiseth www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

$f(x) = f'(a)(x - a) + f(a) \Leftrightarrow f(x) - f(a) - f'(a)(x - a) = 0$

$\Leftrightarrow x^3 - a^3 - 3(x - a) - (3a^2 - 3)(x - a) = 0$

$\Leftrightarrow x^3 - 3a^2x + 2a^3 = 0 \Leftrightarrow (x - a)^2(x + 2a) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a \\ x = -2a \end{array}\right.$

Vậy : $a_1 = -2a$. Tương tự : $b_1 = -2b$; $c_1 = -2c$.

A, B, C thẳng hàng $\Rightarrow a + b + c = 0$

$\Rightarrow a_1 + b_1 + c_1 = -2(a + b + c) = 0$

$\Rightarrow A_1, B_1, C_1$ thẳng hàng.

## 38. ĐH NGOẠI THƯƠNG

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số : $y = \dfrac{x + 2}{x - 2}$.

**2.** Tìm trên đồ thị của hàm số tất cả những điểm cách đều hai trục tọa độ.

**3.** Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị, biết rằng tiếp tuyến đi qua điểm A(–6; 5).

### Giải

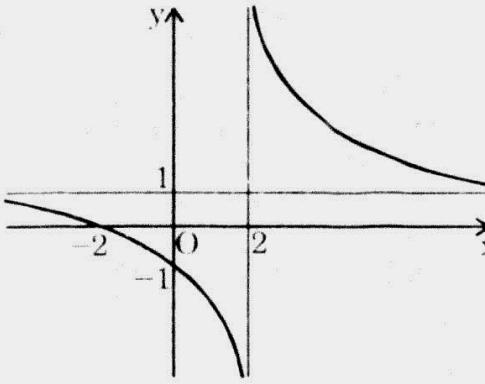
**1.** $y = f(x) = \dfrac{x + 2}{x - 2}$.

Khảo sát và vẽ đồ thị : MXĐ: $D = R \setminus \{2\}$.

$f'(x) = \dfrac{-4}{(x - 2)^2} < 0$.

Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f '(x) | | – | ‖ | – | |
| f(x) | 1 ↘ | $-\infty$ | ‖ | $+\infty$ ↘ | 1 |




$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1$ : Tiệm cận ngang $y = 1$.

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \infty$ : Tiệm cận đứng $x = 2$.

Đồ thị : hình bên.

**2.** Tìm trên đồ thị những điểm cách đều 2 trục tọa độ :

$M(x; y) \in (C) \Leftrightarrow y = \dfrac{x + 2}{x - 2}$

$|x| = |y| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x \\ y = -x \end{array}\right.$

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

- *Trường hợp 1* : $y = x$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x+2}{x-2} = x \quad \Leftrightarrow \quad x + 2 = x^2 - 2x$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 3x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

- *Trường hợp 2* : $y = -x$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x+2}{x-2} = -x \quad \Leftrightarrow \quad x + 2 = -x^2 + 2x$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + x + 2 = 0 \text{ (vô nghiệm).}$$

Vậy có 2 nghiệm thỏa mãn đề bài là :

$$M_1\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}; \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right) \quad \text{và} \quad M_2\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}; \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right).$$

. $A(-6; 5)$.

Xét đường thẳng (d) đi qua A : $y - 5 = K(x + 6)$

$$y = Kx + 6K + 5.$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (H) :

$$\frac{x+2}{x-2} = Kx + 6K + 5 \quad \Leftrightarrow \quad x + 2 = Kx^2 + 6Kx + 5x - 2Kx - 12K - 10$$

$$\Leftrightarrow \quad Kx^2 + 4(K+1)x - 12K - 12 = 0 \qquad (1)$$

(1) có nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} K \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases}$

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow 4(K+1)^2 + K(12K+12) = 0 \Leftrightarrow (K+1)^2 + K(3K+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4K^2 + 5K + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} K = -1 \\ K = -\frac{1}{4} \end{array}\right.$$

Vậy qua A ta kẻ được 2 tiếp tuyến đến (H) đó là :

$$d_1 : \quad y - 5 = -(x+6) \quad \Leftrightarrow \quad y = -x - 1$$

$$d_2 : \quad y - 5 = -\frac{1}{4}(x+6) \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{2}.$$

## 39. HỌC VIỆN NGÂN HÀNG – PHÂN VIỆN TPHCM

Cho hàm số : $y = x^3 - 3x$.

. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số trên.

. Tìm trên đường thẳng $y = 2$ những điểm từ đó có thể kẻ được 3 tiếp tuyến đến (C).

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

## Giải

$$y = f(x) = x^3 - 3x.$$

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị

Miền xác định : D = R.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 1.$$

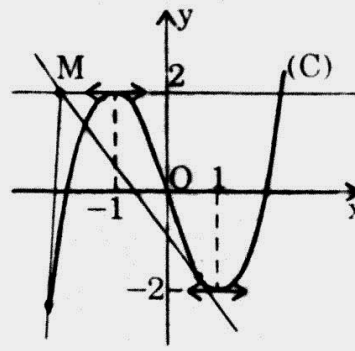
Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | | + | 0 | − | 0 | + | |
| f(x) | $-\infty$ | ↗ | 2<br>CĐ | ↘ | CT<br>−2 | ↗ | $+\infty$ |

$$f''(x) = 6x$$

$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$

| x | $-\infty$ | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f''(x) | | − | 0 | + | |
| f(x) | | lồi | 0 | lõm | |




Điểm uốn O(0; 0).

Đồ thị : hình bên.

**2.** Xét điểm $M(x_0; 2)$ trên đường thẳng $\Delta : y = 2$.

Xét đường thẳng (d) đi qua M :

$$y - 2 = K(x - x_0) \quad \Leftrightarrow \quad y = Kx + 2 - Kx_0.$$

(d) tiếp xúc với (C) khi hệ sau có nghiệm :

$$\begin{cases} x^3 - 3x = Kx + 2 - Kx_0 & (1) \\ 3x^2 - 3 = K & (2) \end{cases}$$

Thế (2) vào (1) ta được :

$$x^3 - 3x = (3x^2 - 3)x + 2 - (3x^2 - 3)x_0.$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x^3 - 3x_0x^2 + 2 + 3x_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x + 1)[2x^2 - (2 + 3x_0)x + 2 + 3x_0] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ 2x^2 - (2 + 3x_0)x + 2 + 3x_0 = 0 \end{array}\right.$$

Đặt : $g(x) = 2x^2 - (2 + 3x_0)x + 2 + 3x_0.$



www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

Từ M kẻ được 3 tiếp tuyến đến (C) $\Leftrightarrow$ g(x) có 2 nghiệm khác −1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_g > 0 \\ g(-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2+3x_o)^2 - 8(2+3x_o) > 0 \\ 2+2+3x_o+2+3x_o \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9x_o^2 - 12x_o - 12 > 0 \\ x_o \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_o^2 - 4x_o - 4 > 0 \\ x_o \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_o < -\dfrac{2}{3} \vee x_o > 2 \\ x_o \neq -1. \end{cases}$$

## 40. ĐH Y TPHCM

Cho hàm số : $y = \dfrac{x^2 - x + 4}{x - 1}$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số trên.
2. Viết phương trình của parabol (P) đi qua điểm cực đại, điểm cực tiểu của (C) và tiếp xúc với đường thẳng có phương trình y = −4.
3. Biện luận theo tham số thực m, số nghiệm $t \in [0; \pi]$ của phương trình :

$$\cos^2 t - (1+m)\cos t + 4 + m = 0.$$

### Giải

$$y = f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{x - 1} \quad (C).$$

1. MXĐ : $D = R \setminus \{1\}$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f '(x) | | + | 0 | − | ‖ | − | 0 | + | |
| f(x) | $-\infty$ | ↗ | CĐ $-3$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | CT 5 | ↗ | $+\infty$ |

CĐ : f(−1) = −3

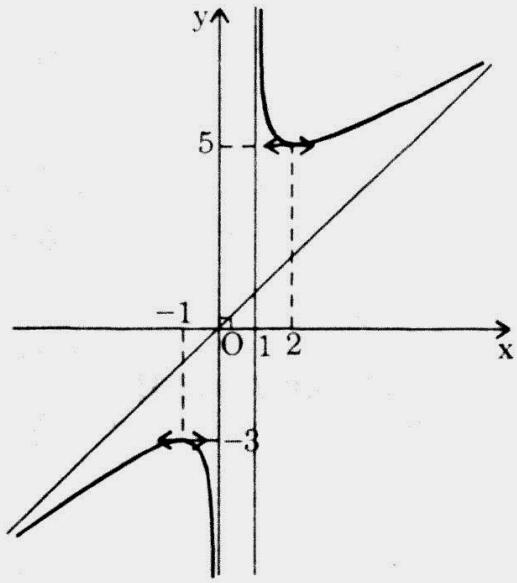
CT : f(3) = 5.

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \infty$. Tiệm cận đứng x = 1.

$\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - x] = 0$. Tiệm cận xiên y = x.

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

Đồ thị :




**2.** Xét (P) : $y = ax^2 + bx + c$ và (d) : $y = -4$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) :

$$ax^2 + bx + c = -4 \quad \Leftrightarrow \quad ax^2 + bx + c + 4 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4a(c + 4)$$

(P) qua $M_1(-1; -3)$, $M_2(3; 5)$ và tiếp xúc với (d)

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} b^2 - 4a(c + 4) = 0 & (1) \\ a - b + c = -3 & (2) \\ 9a + 3b + c = 5 & (3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad 8a + 4b = 8$$

$$4a = 4 - 2b$$

$$c = b - a - 3 = b - \left(1 - \frac{b}{2}\right) - 3 = \frac{3b - 8}{2}$$

$$(1) \quad \Leftrightarrow \quad b^2 - (4 - 2b)\left[\frac{3b - 8}{2} + 4\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad b^2 - (2 - b)3b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4b^2 - 6b = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2b(2b - 3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ b = \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

- *Trường hợp 1* : $\begin{cases} b = 0 \\ a = 1 \\ c = -4 \end{cases}$



www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

- *Trường hợp 2* : $\begin{cases} b = \dfrac{3}{2} \\ a = \dfrac{1}{4} \\ c = -\dfrac{7}{4} \end{cases}$

Vậy : có 2 parabol thỏa mãn đề bài là : $y = x^2 - 4$.

$$y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{7}{4}.$$

**3.** Giải phương trình : $\cos^2 t - (1 + m)\cos t + 4 + m = 0 \quad (t \in [0; \pi])$.

Đặt : $x = \cos t \qquad x \in [-1; 1]$

$$(1) \Leftrightarrow x^2 - (1 + m)x + 4 + m = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + 4 = m(x - 1) \Leftrightarrow \frac{x^2 - x + 4}{x - 1} = m.$$

Do mỗi nghiệm $x \in [-1; 1]$ ứng với 1 nghiệm $t \in [0; \pi]$ nên theo đồ thị ta có :

| m | Số nghiệm t |
|---|---|
| $+\infty$ | 0 |
| $-3$ | 1 |
| | 1 |
| $-\infty$ | |

## 41. ĐH DƯỢC TPHCM

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số : $y = \dfrac{x^2 + 1}{x}$.

**2.** Tìm tập hợp các điểm trong mặt phẳng tọa độ để từ điểm đó có thể kẻ đến đồ thị (C) hai tiếp tuyến đó vuông góc nhau.

### Giải

**1.** $y = f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$

Khảo sát và vẽ đồ thị :

MXĐ : D = R.

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}; \qquad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

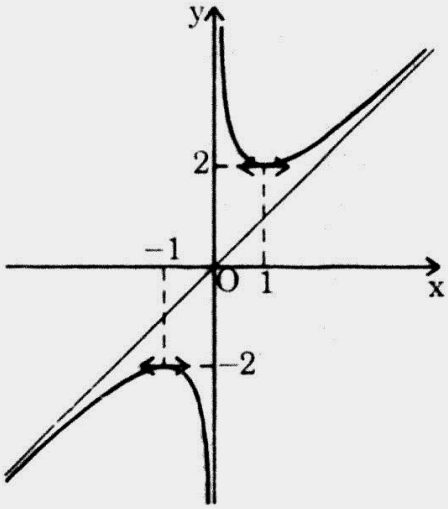
Bảng biến thiên :

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

| x | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f '(x) | | + | 0 | − | ‖ | − | 0 | + | |
| f(x) | $-\infty$ | ↗ | $-2$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $2$ | ↗ | $+\infty$ |

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \infty$. Tiệm cận đứng : $x = 0$.

$y = x + \dfrac{1}{x}$. Tiệm cận xiên : $y = x$.




Đồ thị : hình bên.

**2.** Xét điểm $M_o(x_o; y_o)$.

Gọi (d) là đường thẳng qua $M_o$.

$$d : y - y_o = K(x - x_o)$$

$$y = K(x - x_o) + y_o.$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (C) :

$$\frac{x^2 + 1}{x} = K(x - x_o) + y_o$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + 1 = Kx^2 - Kx_ox + y_ox$$

$$\Leftrightarrow \quad (K - 1)x^2 + (y_o - Kx_o)x - 1 = 0 \qquad (1)$$

(1) có nghiệm kép $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} K \neq 1 \\ \Delta = 0 \end{array}\right.$

$$\Delta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (y_o - Kx_o)^2 + 4(K - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x_o^2K^2 + (4 - 2x_oy_o)K + y_o^2 - 4 = 0 \qquad (2)$$

Từ $M_o$ kẻ được 2 tiếp tuyến vuông góc đến (C)

$\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm $K_1$, $K_2$, thỏa mãn $K_1.K_2 = -1$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{y_o^2 - 4}{x_o^2} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x_o^2 + y_o^2 = 4.$$

Vậy $M_o$ lưu động trên (C) là đường tròn tâm O bán kính R = 2.

Giới hạn : $\begin{cases} K \neq 1 \\ x_o \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_o \neq x_o \\ x_o \neq 0 \end{cases}$.

Vậy quỹ tích $M_o$ là (C) loại bỏ 4 giao điểm của (C) với 2 đường tiệm cận.


www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

## 42. ĐH GIAO THÔNG VẬN TẢI

Cho hàm số $f(x) = \dfrac{mx^2 + 3mx + 2m + 1}{x - 1}$, với m là tham số.

1. Xác định m để đồ thị của hàm số $y = f(x)$ có đường tiệm cận xiên đi qua điểm A(1; 5).
2. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x)$ với $m = 1$.
3. Tìm giá trị của m để $f(x) > 0$ với mọi x thỏa mãn $4 \le x \le 5$.

### Giải

1. Xác định m để hàm số có đường tiệm cận xiên qua A(1; 5)

Hàm số : $y = \dfrac{mx^2 + 3mx + 2m + 1}{x - 1}$

có thể viết : $y = mx + 4m + \dfrac{6m + 1}{x - 1}$ (1)

Khi $m = -\dfrac{1}{6}$ thì đồ thị suy biến thành đường thẳng ta không có đường tiệm cận xiên.

Khi $m \ne -\dfrac{1}{6}$ thì (1) cho : $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{6m + 1}{x - 1}\right) = 0$ nên $y = mx + 4m$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị. Đường này qua A(1; 5) nên :

$$5 = 1m + 4m \Leftrightarrow m = 1$$

Vậy khi $m = 1$ thì đồ thị của hàm số có đường tiệm cận xiên qua A(1; 5).

2. Khảo sát và vẽ đồ thị khi $m = 1$

Khi $m = 1$, hàm số là: $y = x + 4 + \dfrac{7}{x - 1}$.

MXĐ : $D = R \setminus \{1\}$.

Đạo hàm : $y' = 1 - \dfrac{7}{(x - 1)^2}$

* $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{7} \vee x = 1 - \sqrt{7}$.

* Khi $x = 1 + \sqrt{7}$ thì $y = 5 + 2\sqrt{7}$

* Khi $x = 1 - \sqrt{7}$ thì $y = 5 - 2\sqrt{7}$

Giới hạn : * $\lim\limits_{x \to 1} y = \pm\infty$ : đường tiệm cận đứng : $x = 1$.

* $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(x + 4 + \dfrac{7}{x - 1}\right)$ với $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{7}{x - 1} = 0$ nên đường tiệm cận xiên : $y = x + 4$.

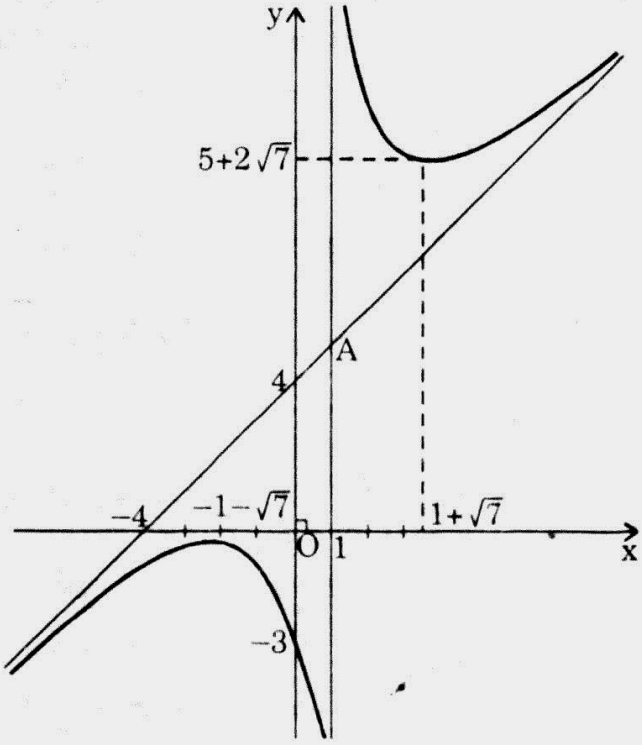
www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | $1-\sqrt{7}$ | | 1 | | $1+\sqrt{7}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | 0 | − | ‖ | − | 0 | + | |
| y | $-\infty$ | ↗ | $5-2\sqrt{7}$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $5+2\sqrt{7}$ | ↗ | $+\infty$ |

Đồ thị là một hyperbol xiên góc có : điểm cực đại : $(1-\sqrt{7}\,;\,5-2\sqrt{7})$,

điểm cực tiểu : $(1+\sqrt{7}\,;\,5+2\sqrt{7})$.




**3.** Tìm giá trị của m để $f(x) > 0$ với mọi x thỏa mãn $4 \le x \le 5$

Khi $x \in [4; 5]$ thì $x > 1$ nên $f(x) > 0 \Rightarrow mx^2 + 3mx + 2m + 1 > 0$

Do đó, bài toán trở thành : Tìm m để $f(x) = mx^2 + 3mx + 2m + 1 > 0$ (1) với mọi x thỏa mãn $4 \le x \le 5$.

Ta có các trường hợp sau :

**i)** $m = 0$. Lúc đó, (1) $\Leftrightarrow$ $f(x) > 0$ với mọi x thỏa mãn $4 \le x \le 5$

$m = 0$ nhận được.

**ii)** $m > 0$. (1) có đồ thị là parabol (P) với đỉnh S có hoành độ :

$$x_S = -\frac{3}{2}.$$

Do đó, $f(x) > 0$ với mọi x thỏa mãn $4 \le x \le 5$, ta chỉ cần $f(4) > 0$

$\Rightarrow 30m + 1 > 0$ (đúng với $m > 0$).

Vậy : khi $m > 0$, bài toán được thỏa mãn.

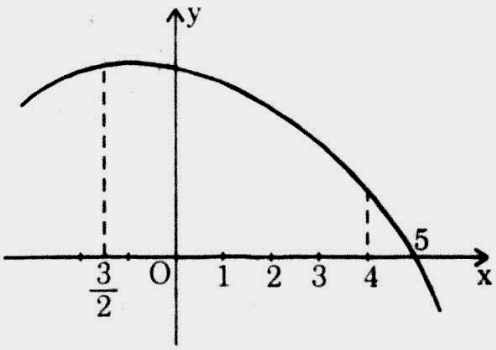

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

iii) $m < 0$. Lúc này (P) có bề lõm quay về phía y âm nên bài toán được thỏa mãn khi $f(5) > 0$.

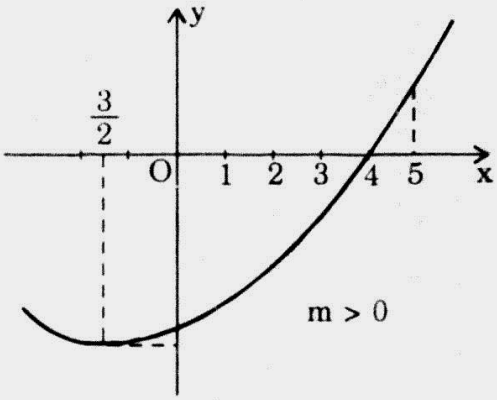
$$\Leftrightarrow \quad 42m + 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad m > -\frac{1}{42}$$

Vậy : khi $-\frac{1}{42} < m < 0$ thì bài toán được thỏa mãn.

Tóm lại : khi $m > -\frac{1}{42}$ thì $f(x) > 0$ với mọi x thỏa mãn $4 \le x \le 5$.




m < 0




m > 0

# NĂM 1998

## 43. ĐH QUỐC GIA TPHCM – KHỐI A – ĐỢT 1

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số : $y = -x^3 + 3x$

Từ đó suy ra đồ thị của hàm số $y = -|x|^3 + 3|x|$ (vẽ hình riêng).

**2.** Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình : $x^3 - 3x = \frac{2m}{m^2 + 1}$

có 3 nghiệm phân biệt.

### Giải

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ (C) : $y = -x^3 + 3x$.

MXĐ : D = R

$$y = -x^3 + 3x$$

$$\Rightarrow \quad y' = -3x^2 + 3$$

$$y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \text{ hay } x = -1.$$

$$y'' = -6x$$

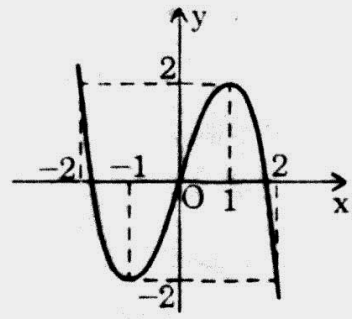
$$y'' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

Vậy : I(0; 0) vừa là điểm uốn vừa là tâm đối xứng.

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok-SPS

Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | - | 0 | + | 0 | - | |
| y | $+\infty$ | ↘ | $-2$ | ↗ | $2$ | ↘ | $-\infty$ |




Trị đặc biệt : $x = 2 \Rightarrow y = -2;$

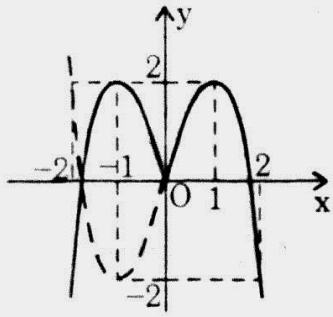
$x = -2 \Rightarrow y = 2.$

Suy ra đồ thị hàm số :

$$y = -|x|^3 + 3|x| = \begin{cases} -x^3 + 3x & \text{nếu } x \geq 0 \ (C_1) \\ x^3 - 3x & \text{nếu } x < 0 \ (C_2) \end{cases}$$

Đồ thị $(C_1)$ là một phần của đồ thị (C) (đã vẽ) khi $x \geq 0$.

Đồ thị $(C_2)$ là phần đối xứng của đồ thị $(C_1)$ qua trục hoành khi $x < 0$.




**2.** Tìm tất cả giá trị m để phương trình $x^3 - 3x = \dfrac{2m}{m^2+1}$ (1) có 3 nghiệm phân biệt

$$(1) \Leftrightarrow -x^3 + 3x = -\frac{2m}{m^2+1}$$

Đặt : $k = \dfrac{-2m}{m^2+1} \Rightarrow -x^3 + 3x = k$ (2)

m thỏa mãn bài toán ⇔ k thỏa mãn (2) có 3 nghiệm phân biệt.

Dựa vào bảng biến thiên, k thỏa mãn bài toán.

$$\Leftrightarrow -2 < k < 2 \Leftrightarrow -2 < \frac{-2m}{m^2+1} < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 1 > m \\ -m < m^2 + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m + 1 > 0 \\ m^2 + m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(m - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0 & \text{(Đúng } \forall m) \\ \left(m + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0 & \text{(Đúng } \forall m) \end{cases}$$

Vậy : $\forall m \in R$ đều thỏa mãn bài toán.



www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

## 44. ĐH KINH TẾ TPHCM – KHỐI A

Cho hàm số : $y = \dfrac{x^2}{x-1}$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số. Chứng tỏ rằng (C) có một tâm đối xứng.
2. Tìm tập hợp các điểm trong mặt phẳng tọa độ Oxy để từ đó ta có thể vẽ được hai tiếp tuyến đến đồ thị (C) và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau.

### Giải

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị. Chứng tỏ (C) có đường tiệm cận xiên

$$y = \frac{x^2}{x-1}$$

MXĐ : $D = R \setminus \{1\}$

$$y' = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ hay } x = 2.$$

Đường tiệm cận :

- $\lim\limits_{x \to 1} y = \infty \quad \Rightarrow \quad$ **x = 1 là đường tiệm cận đứng.**
- $y = \dfrac{x^2}{x-1} = x + 1 + \dfrac{1}{x-1}$

  $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{1}{x-1}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad$ **y = x + 1 là đường tiệm cận xiên.**

Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | 0 | | 1 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | 0 | − | ‖ | − | 0 | + | |
| y | $-\infty$ | ↗ | 0 | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | 4 | ↗ | $+\infty$ |

Trị đặc biệt : $x = -1 \quad \Rightarrow \quad y = -\dfrac{1}{2}$

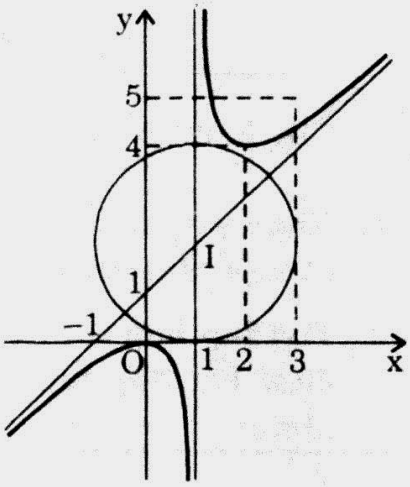
$x = 3 \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{9}{2}$

*Nhận xét :* Tâm đối xứng (nếu có) là giao của hai đường tiệm cận.

Gọi I(x y) là tâm đối xứng, ta có :

Facebook.com/TeacherSokPiseth www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$




Vậy I(1; 2) là tâm đối xứng của (C).

**2.** Tìm tập hợp các điểm của mặt phẳng Oxy để từ đó vẽ được 2 tiếp tuyến đến (C) và vuông góc với nhau

Gọi $M(x_o; y_o)$ là các điểm cần tìm.

Phương trình đường thẳng (d) qua M :

$$y = k(x - x_o) + y_o$$

Phương trình hoành độ giao điểm (d) và (C) :

$$\frac{x^2}{x-1} = k(x - x_o) + y_o \quad \text{(điều kiện } x \neq 1\text{)}.$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 = k(x - x_o)(x - 1) + y_o(x - 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = (k - 1)x^2 + (y_o - kx_o - k)x + kx_o - y_o$$

(d) tiếp xúc với (C) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad \Delta = [y_o - k(x_o + 1)]^2 - 4(kx_o - y_o)(k - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad y_o^2 - 2ky_o(x_o + 1)^2 + k^2(x_o + 1)^2 - 4(kx_o - y_o)(k - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad k^2(x_o - 1)^2 + 2k[2x_o + 2y_o - y_o(x_o - 1)^2] - 4y_o + y_o^2 = 0 \ (*)$$

$(x_o; y_o)$ thỏa mãn bài toán

$\Leftrightarrow$ (*) có 2 nghiệm $k_1$ và $k_2$ sao cho $k_1k_2 = -1$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-4y_o + y_o^2}{(x_o - 1)^2} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad y_o^2 - 4y_o = -(x_o - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad (x_o - 1)^2 + (y_o - 2)^2 = 4.$$

Vậy : tập hợp những điểm M là đường tròn tâm I(1; 2) (tâm đối xứng của (C) có bán kính bằng 2, bỏ các điểm (1; 4), (1; 0), $(1 + \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2})$, $(1 - \sqrt{2}; 2 - \sqrt{2})$.

## 45. ĐH QUỐC GIA TPHCM – KHỐI A – ĐỢT 3

Cho hàm số : $y = m^2x^4 - 2x^2 + m$ với tham số thực $m \neq 0$.

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi m = 1.

**2.** Khảo sát sự biến thiên của hàm số khi $m \neq 0$.

Từ đó xác định m sao cho $m^2x^4 - 2x^2 + m \geq 0$ với mọi số thực x.


www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

## Giải

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị khi m = 1

$$y = x^4 - 2x^2 + 1$$

MXĐ : D = R

$$y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hay } x = 1 \text{ hay } x = -1.$$

Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| y | $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↗ | $1$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

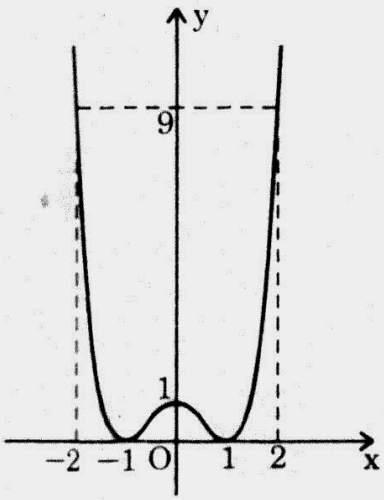
- Giá trị đặc biệt : $x = 2 \Rightarrow y = 9$;

  $x = -2 \Rightarrow y = 9$.

- Giới hạn : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \lim\limits_{x \to \pm\infty} x^4 = +\infty$.

- Đồ thị (C) :

  - Có giá trị cực đại bằng 1 khi x = 0.
  - Có giá trị cực tiểu bằng 0 khi x = ±1.




**2.** Với m ≠ 0 khảo sát sự biến thiên :

$$y = m^2x^4 - 2x^2 + m = f(x)$$

$$\Rightarrow y' = 4m^2x^3 - 4x = 4x(m^2x^2 - 1).$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hay } x = \frac{1}{m} \text{ hay } x = -\frac{1}{m}.$$

- Với m > 0 :

| x | $-\infty$ | | $-\frac{1}{m}$ | | $0$ | | $\frac{1}{m}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| y | $+\infty$ | ↘ | $\frac{m^3-1}{m^2}$ | ↗ | $m$ | ↘ | $\frac{m^3-1}{m^2}$ | ↗ | $+\infty$ |

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

- Với $m < 0$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1}{m}$ | | $0$ | | $-\frac{1}{m}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $\frac{m^3-1}{m^2}$ | $\nearrow$ | $m$ | $\searrow$ | $\frac{m^3-1}{m^2}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Vậy : $f(x) \geq 0, \forall x \in R \quad \Leftrightarrow \quad \frac{m^3-1}{m^2} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \geq 1.$

## 46. ĐH Y DƯỢC TPHCM

Cho hàm số : $y = -x^4 + 2(m+1)x^2 - 2m - 1$.

1. Xác định tham số m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại bốn điểm có hoành độ lập thành một cấp số cộng.
2. Gọi (C) là đồ thị khi $m = 0$. Tìm tất cả các điểm thuộc trục tung sao cho từ đó có thể kẻ được ba tiếp tuyến với đồ thị (C).

### Giải

1. Xác định m để hàm số cắt truc hoành tại 4 điểm có hoành độ lập thành 1 cấp số cộng

Đặt : $t = x^2 \quad (t > 0)$.

Ta có : $y = f(t) = -t^2 + 2(m+1)t - 2m - 1 \quad (*)$

Điều kiện cần và đủ để (*) có 2 nghiệm dương phân biệt và $t_2 = 9t_1$ là :

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \\ t_2 = 9t_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 > 0 \\ 2(m+1) > 0 \\ 2m+1 > 0 \\ t_2 = 9t_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > -1 \\ m > -\frac{1}{2} \\ t_2 = 9t_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{2} \\ m \neq 0 \\ t_2 = 9t_1 \end{cases}$$

*Nhận xét :*

Từ (*) ta có : $\left[\begin{array}{l} t = \frac{-(m+1)+m}{-1} = 1 \\ t = \frac{-(m+1)-m}{-1} = 2m+1 \end{array}\right.$

Do đó : $t_2 = 9t_1 \quad \Leftrightarrow \quad [1 = 9(2m+1) \text{ hay } (2m+1) = 9]$



www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

$$\Leftrightarrow \quad [1 = 18m + 9 \quad \text{hay} \quad m = 4].$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[m = \frac{-4}{9} \text{ hay } m = 4\right]$$

Vậy : $m = 4$ hay $m = \dfrac{-4}{9}$.

**2.** Tìm tất cả các điểm $\in$ Oy sao cho từ đó ta kẻ được 3 tiếp tuyến đến (C)

Khi $m = 0$ thì $y = -x^4 + 2x^2 - 1$.

Gọi điểm $A(0; a) \in Oy$.

Phương trình tiếp tuyến với (C) tại $M(x_o; y_o)$ là :

$$y = y'(x_o).(x - x_o) + y(x_o)$$

$$y = (-4x_o^3 + 4x_o)(x - x_o) + (-x_o^4 + 2x_o^2 - 1)$$

$$y = (-4x_o^3 + 4x_o)x + 4x_o^4 - 4x_o^2 - x_o^4 + 2x_o^2 - 1$$

$$y = (-4x_o^3 + 4x_o)x + 3x_o^4 - 2x_o^2 - 1$$

$(\Delta)$ qua $A(0; a) \Leftrightarrow a = 3x_o^4 - 2x_o^2 - 1$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = 3x_o^4 - 2x_o^2 - 1 - a \qquad (1)$$

Gọi (d) : $y = \alpha x + \beta$ là tiếp tuyến với (C) có 2 tiếp điểm

$\Rightarrow$ Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (C) có 2 nghiệm kép.

$\Rightarrow$ $x^4 - 2x^2 + 1 + \alpha x + \beta = (x - b)^2 (x - c)^2 =$

$$= x^4 - 2x^3(b + c) + x^2(b^2 + c^2 + 4bc) - 2bc(b + c)x + b^2c^2.$$

Đồng nhất hệ số :

$$\begin{cases} b + c = 0 \\ b^2 + c^2 + 4bc = -2 \\ -2bc(b + c) = \alpha \\ b^2c^2 = \beta + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + c = 0 \\ bc = -1 \\ \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

Vậy : $y = 0$ là tiếp tuyến duy nhất có 2 tiếp điểm với (C).

- Nếu $a = 0$ thì (1) cho : $3x_o^4 - 2x_o^2 - 1 = 0$ (*)

  (*) không có 3 nghiệm phân biệt (không có nghiệm $x_{01}^2 = 0$; $x_{02}^2 > 0$)

- Nếu $a \neq 0$ thì (1) cho : $3x_o^4 - 2x_o^2 - a - 1 = 0$ (**)

  ($x_{01}^2 = 0$; $x_{02}^2 > 0$)

  Muốn (**) có 3 nghiệm phân biệt, ta phải có $a = -1$.

  Vậy : điểm cần tìm : $A(0; -1)$.

Facebook.com/TeacherSokPiseth www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

## 47. CĐ KINH TẾ ĐỐI NGOẠI

Cho hàm số : $y = \dfrac{x^2 + x - 1}{x - 1}$.

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

**2.** Viết phương trình các tiếp tuyến với (C) song song với đường thẳng

$$4y - 3x + 1 = 0$$

**3.** Dùng đồ thị của (C) để biện luận theo m số nghiệm của phương trình :

$$\sin^2 x + (1 - m)\sin x + m - 1 = 0 \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

### Giải

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ (C) : $y = \dfrac{x^2 + x - 1}{x - 1}$

- MXĐ : $D = R \setminus \{1\}$
- $$y' = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

  $$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hay } x = 2.$$
- Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | 0 | | 1 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | | − | ‖ | − | | + | |
| y | $-\infty$ | ↗ | 1 | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | 5 | ↗ | $+\infty$ |

- Đường tiệm cận :

  $\lim\limits_{x \to 1} y = \infty \Rightarrow$ x = 1 là đường tiệm cận đứng.

  $$y = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1} = x + 2 + \frac{1}{x - 1}$$

  có $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x - 1} = 0$ nên y = x + 2 là đường tiệm cận xiên.
- Giá trị đặc biệt : $x = 3 \Rightarrow y = \dfrac{11}{2}$ ;

  $$x = -1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}.$$
- Đồ thị : (C) là một hyperbol xiên góc nhận :
  - Đường thẳng x = 1 là tiệm cận đứng.

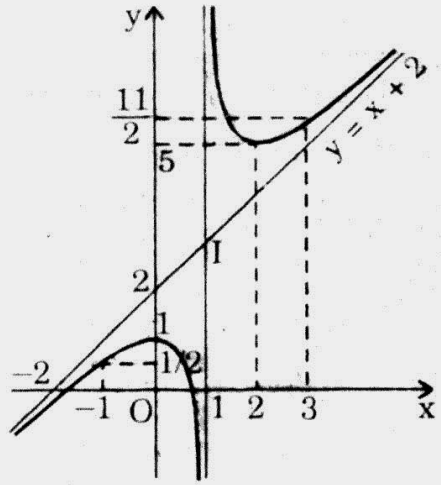


www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

– Đường thẳng $y = x + 2$ tiệm cận xiên.

– Điểm (2; 5) làm điểm cực tiểu.

– Điểm (0; 1) làm điểm cực đại.




**2.** Viết phương trình của tiếp tuyến song song với : $4y - 3x + 1 = 0$

Tiếp tuyến có hệ số góc : $k = \frac{3}{4}$.

Gọi $M_0(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

Ta có : $\frac{x_0^2 - 2x_0}{(x_0 - 1)^2} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 4x_0^2 - 8x_0 = 3x_0^2 - 6x_0 + 3.$

$\Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0 - 3 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -1$ hay $x_0 = 3$.

PTTT : $y = \frac{3}{4}(x + 1) + \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$

và : $y = \frac{3}{4}(x - 3) + \frac{11}{2} \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{13}{4}$

**3.** Biện luận theo m số nghiệm của : $\sin^2 x + (1 - m)\sin x + m - 1 = 0$ (*)

Đặt : $t = \sin x$ $t \in (-1; 1)$

(*) $\Leftrightarrow t^2 + (1 - m)t + (m - 1) = 0$

$\Leftrightarrow t^2 + t - mt - 1 + m = 0 \Leftrightarrow t^2 + t - 1 = m(t - 1)$

$\Leftrightarrow \frac{t^2 + t - 1}{(t - 1)} = m$

$\Leftrightarrow f(t) = m$ (với f(t) là vế trái)

f(x) có đồ thị (C) đã vẽ ở trên.

Dựa vào bảng biến thiên và đồ thị (C), ta có :

| m | Số nghiệm |
|---|---|
| $+\infty$ | 0 |
| 1 | 1 |
| | 2 |
| $\frac{1}{2}$ | 1 |
| | 1 |
| $-\infty$ | |



www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

## 48. ĐH NGOẠI THƯƠNG – KHỐI D

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số : $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$.

**2.** Trong tất cả các tiếp tuyến với đồ thị của hàm số, hãy tìm tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất.

### Giải

**1.** Khảo sát và vẽ $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$

MXĐ : $D = R$

$y' = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x^2 + 2x - 3)$

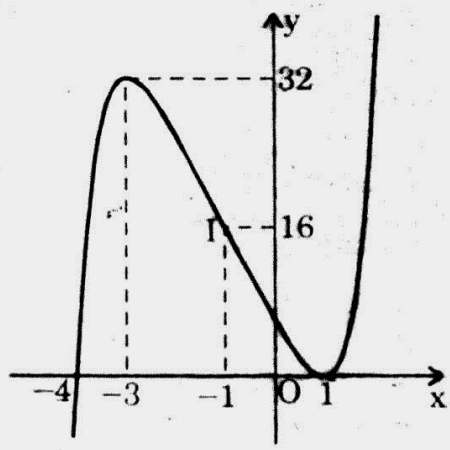
$y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hay $x = -3$.

$y'' = 6x + 6$

$y'' = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Vậy : $I(-1; 16)$ là tâm đối xứng.

| x | $-\infty$ | | $-3$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | 0 | − | 0 | + | |
| y | $-\infty$ | ↗ | 32 | ↘ | 0 | ↗ | $+\infty$ |




**2.** Trong các tiếp tuyến với (C), tìm tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất.

Phương trình tiếp tuyến có hệ số góc :

$y'(x_0) = 3x_0^2 + 6x_0 - 9$

$y''(x_0) = 6x_0 + 6$

| x | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y'' | | − | 0 | + | |
| y' | $+\infty$ | ↘ | $-12$ | ↗ | $+\infty$ |

Vậy : GTLN của hệ số góc tiếp tuyến là $k = -12$ tại điểm có $x_0 = -1$.

Phương trình tiếp tuyến : $y = y'(-1)(x + 1) + y(-1) = -12(x + 1) + 16$

$y = -12x + 4$.

## 49. ĐH DL NGOẠI NGỮ – TIN HỌC

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số : $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x}$ (C).

Từ đó hãy vẽ đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{|x|}$ (vẽ hình riêng)



www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

**2.** Tìm những điểm riêng trên đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến tại đó vuông góc với đường thẳng y = x.

## Giải

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ (C) : $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x}$

MXĐ : $D = R \setminus \{0\}$.

Đạo hàm : $y' = \dfrac{(2x-1)x - (x^2 - x + 1)}{x^2} = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hay $x = -1$.

Đường tiệm cận :

- $\lim\limits_{x \to 0} y = \infty \Rightarrow$ **x = 0 là đường tiệm cận đứng.**
- $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x} = x - 1 + \dfrac{1}{x}$

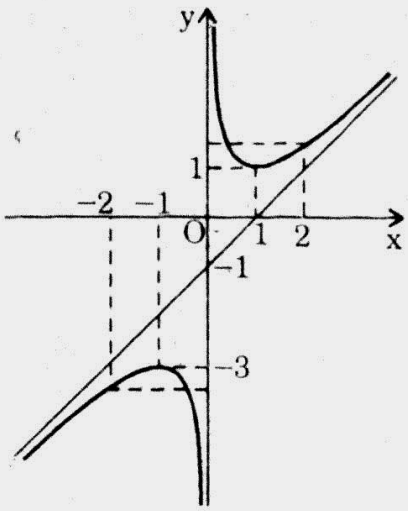
với $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0$ nên **y = x – 1 là đường tiệm cận xiên.**

Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | 0 | − | ‖ | − | 0 | + | |
| y | $-\infty$ | ↗ | $-3$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $1$ | ↗ | $+\infty$ |

Giá trị đặc biệt : $x = 2 \Rightarrow y = \dfrac{3}{2}$;

$x = -2 \Rightarrow y = \dfrac{-7}{2}$.

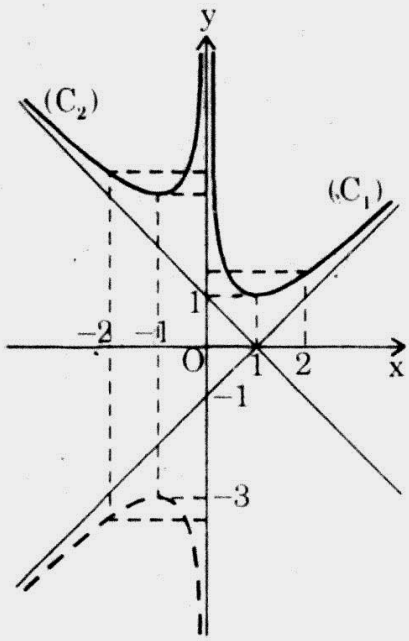



www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

$$y = \frac{x^2 - x + 1}{|x|} = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x + 1}{|x|} & \text{với } x > 0\ (C_1) \\ -\dfrac{x^2 - x + 1}{|x|} & \text{với } x < 0\ (C_2) \end{cases}$$

Đồ thị $(C_1)$ là 1 phần của đồ thị (C) (đã vẽ) khi $x > 0$.

Đồ thị $(C_2)$ là phần đối xứng của (C) qua trục hoành khi $x < 0$.




**2.** Tìm những điểm trên (C) sao cho tiếp tuyến đó vuông góc với $y = x$

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

Hệ số góc của tiếp tuyến $(\Delta)$ tại M với (C) : $y'(x_0) = \dfrac{x_0^2 - 1}{x_0^2}$

Ta có : $\dfrac{x_0^2 - 1}{x_0^2}.1 = -1$ điều kiện $x_0 \neq 0$.

$\Leftrightarrow \quad x_0^2 - 1 = -x_0^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x_0^2 = 1.$

$\Leftrightarrow \quad x_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ hay $x_0 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

- $x_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = \dfrac{3 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$
- $x_0 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = -\dfrac{3 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$M_1\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{3 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)$; $M_2\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{3 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)$.



Facebook.com/TeacherSokPisoth www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

## 50. HỌC VIỆN CÔNG NGHỆ BƯU CHÍNH VIỄN THÔNG

Cho hàm số : $y = x^3 - 12x + 12$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho.
2. Xác định giao điểm của đồ thị với đường thẳng $y = -4$.
3. Tìm trên đường thẳng $y = -4$ các điểm mà từ đó có thể kẻ đến đồ thị của hàm số đã cho ba tiếp tuyến phân biệt.

### Giải

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ (C) : $y = x^3 - 12x + 12$

MXĐ : $D = R$.

$y' = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4)$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 2$ hay $x = -2$

$y'' = 6x$

$y'' = 0 \Leftrightarrow x = 0$

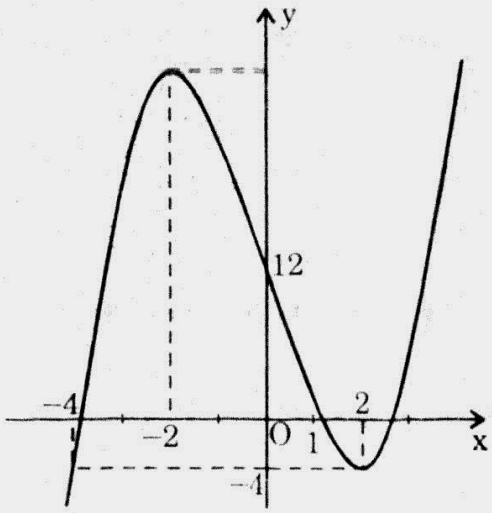
Vậy : I(0; 12) là tâm đối xứng vừa là điểm uốn của (C).

Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | $-2$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | 0 | − | 0 | + | |
| y | $-\infty$ | ↗ | 28 | ↘ | $-4$ | ↗ | $+\infty$ |

Đồ thị (C) :

- Có điểm cực tiểu (2; −4), điểm cực đại (−2; 28)
- Có điểm uốn I(0; 12).




2. Xác định giao điểm của đồ thị với đường thẳng $y = -4$

Phương trình hoành độ giao điểm :

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

$$x^3 - 12x + 12 = -4 \Leftrightarrow x^3 - 12x + 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(x^2 + 2x - 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ (kép)} \quad \text{hay} \quad x = -4 \text{ (đơn)}$$

- $x = 2 \Rightarrow y = -4$ (tiếp điểm)
- $x = -4 \Rightarrow y = -4$ (giao điểm).

**3.** Tìm trên đường thẳng $y = -4$ các điểm mà từ đó kẻ được 3 tiếp tuyến với đồ thị (C)

Nhận xét : Mỗi tiếp tuyến với (C) chỉ có 1 tiếp điểm.

Tiếp tuyến (Δ) tại $M(x_0; y_0)$ :

$$y = y'(x_0).(x - x_0) + y(x_0)$$

$$\Rightarrow y = (3x_0^2 - 12)(x - x_0) + x_0^3 - 12x_0 + 12$$

(Δ) qua $A(a; -4)$ $\Leftrightarrow -4 = (3x_0^2 - 12)(a - x_0) + x_0^3 - 12x_0 + 12$

$$\Leftrightarrow 0 = -2x_0^3 + 16 + 3(x_0^2 - 4)a.$$

$$\Leftrightarrow 0 = -2(x_0^3 - 8) + 3(x_0^2 - 4)a$$

$$\Leftrightarrow 0 = (x - 2)[3(x + 2)a - 2(x_0^2 + 2x + 4)]$$

$$\Leftrightarrow 0 = (x - 2).g(x)$$

a thỏa mãn bài toán.

Với : $g(x) = -2x_0^2 - 4x_0 - 8 + 3ax_0 + 6a$

$$\Leftrightarrow g(x) = -2x_0^2 + x_0(3a - 4) + 6a - 8$$

(g(x) có 2 nghiệm phân biệt khác 2)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3a - 4)^2 + 8(6a - 8) > 0 \\ g(2) \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > \dfrac{4}{3} \text{ hay } a < -4 \\ a \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > \dfrac{4}{3} \text{ và } a \neq 2 \\ a < -4. \end{cases}$$

## 51. CAO ĐẲNG SƯ PHẠM

Cho hàm số : $y = f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$.

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (H) của hàm số.

**2.** Gọi (d) là đường thẳng có phương trình : $2x - y + m = 0$ (m là tham số thực)



www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

Chứng minh rằng (d) luôn cắt (H) tại hai điểm phân biệt A, B trên hai nhánh của (H).

**3.** Xác định m để độ dài đoạn thẳng AB ngắn nhất.

**Giải**

**1.** Khảo sát và vẽ đồ thị (H) : $y = \dfrac{x+1}{x-1}$

MXĐ : $D = R \setminus \{1\}$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0, \forall x \in D.$$

Đường tiệm cận :

- $\lim\limits_{x\to\infty} y = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+1}{x-1} = 1$

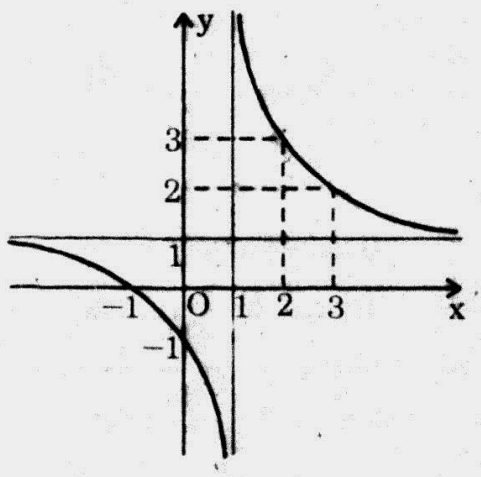
  $y = 1$ là đường tiệm cận ngang.

- $\lim\limits_{x\to 1} y = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+1}{x-1} = \infty$

  $x = 1$ là đường tiệm cận đứng.

Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y' | | − | ‖ | − | |
| y | 1 ↘ | $-\infty$ | ‖ | $+\infty$ ↘ | 1 |




Giá trị đặc biệt :

$x = 2 \Rightarrow y = 3$

$x = 0 \Rightarrow y = -1$

$x = 3 \Rightarrow y = 2$

$x = -1 \Rightarrow y = 0.$

Đồ thị là một hyperbol vuông góc có đường tiệm cận ngang $y = 1$ và đường đường tiệm cận đứng $x = 1$.

**2.** Chứng minh rằng (d) luôn cắt (H) tại hai điểm phân biệt thuộc 2 nhánh khác nhau

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và $y = f(x)$ :

$$\frac{x+1}{x-1} = 2x + m \quad (x \neq 1) \quad \Leftrightarrow \quad x + 1 = (2x + m)(x - 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad x + 1 = 2x^2 + mx - 2x - m$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = 2x^2 + (m - 3)x - (m + 1) \qquad (1)$$

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok SPS

$$2f(1) = 2[2 + (m - 3) - m - 1]$$
$$= 2(-2) = -4 < 0$$

Vậy : (1) có 2 nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1 < 1 < x_2$.

**3.** Xác định m để AB ngắn nhất

Gọi $A(x_1; y_1)$ và $A(x_2; y_2)$

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$
$$= (x_2 - x_1)^2 + (2x_2 + m - 2x_1 - m)^2$$
$$= (x_2 - x_1)^2 + 4(x_2 - x_1)^2 = 5(x_2 - x_1)^2$$
$$= 5(x_2 + x_1)^2 - 4x_1x_2] = 5\left[\left(\frac{3-m}{2}\right)^2 + 4\,\frac{m+1}{2}\right]$$
$$= \frac{5}{4}[(3 - m)^2 + 8m + 8] = \frac{5}{4}[m^2 + 2m + 17]$$
$$= \frac{5}{4}[(m + 1)^2 + 15] \geq \frac{5}{4}.16 = 20$$
$$\Rightarrow \quad AB = 2\sqrt{5} \quad \Leftrightarrow \quad m = -1.$$

## 52. ĐH VĂN LANG - KHỐI A

Cho hàm số : $y = \dfrac{x^2\cos\alpha + x + \sin^2\alpha\cos\alpha + \sin\alpha}{x + \cos\alpha}$

trong đó tham số $\alpha \neq k\pi$. (k nguyên).

**a)** Tìm giá trị của α để hàm số có cực đại và cực tiểu.

**b)** Chứng minh rằng tiệm cận xiên của đồ thị hàm số luôn tiếp xúc với một parabol (P) cố định.

**c)** Tìm quỹ tích tiếp điểm của tiệm cận xiên với parabol (P).

### Giải

**a)** Tìm giá trị của a để hàm số có cực đại và cực tiểu

$$y = \frac{x^2\cos\alpha + x + \sin^2\alpha\cos\alpha + \sin\alpha}{x + \cos\alpha}$$

$$y' = \frac{x^2\cos\alpha + 2x\cos^2\alpha + \cos\alpha - \sin\alpha - \sin^2\alpha\cos\alpha}{(x + \cos\alpha)^2}$$

$$= \frac{g(x)}{(x + \cos\alpha)^2}$$

α thỏa mãn bài toán.



Facebook.com/TeacherSokPiseth www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

$$\begin{cases}\Delta'_g > 0\\ g(-\cos\alpha) \neq 0\\ \cos\alpha \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin\alpha\cos\alpha > 0\\ \alpha \neq k\pi\\ \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin 2\alpha > 0\\ \alpha \neq \dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}l2\pi < 2\alpha < \pi + l2\pi\\ \alpha \neq \dfrac{\pi}{2}\end{cases} \Leftrightarrow l\pi < \alpha < \frac{\pi}{2} + l\pi \quad (l \in Z).$$

Đường tiệm cận xiên tiếp xúc với parabol (P) cố định :

$$y = \frac{x^2\cos\alpha + \sin^2\alpha\cos\alpha + \sin\alpha}{x + \cos\alpha} = x\cos\alpha + \sin^2\alpha + \frac{\sin\alpha}{x + \cos\alpha}$$

Với $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin\alpha}{x + \cos\alpha} = 0$ nên $y = x\cos\alpha + \sin^2\alpha$ là đường tiệm cận xiên.

Suy ra : $y = x\cos\alpha + 1 - \cos^2\alpha = -\left(\cos\alpha - \dfrac{1}{2}x\right)^2 + \dfrac{1}{4}x^2 + 1$ (*)

(*) chứng tỏ đường tiêm cận xiên luôn tiếp xúc với parabol cố định :

$y = \dfrac{1}{4}x^2 + 1$ vì luôn có nghiệm kép $x = 2\cos\alpha$.

Quỹ tích tiếp điểm của đường tiệm cận xiên với (P)

Tọa độ tiếp điểm : $x_o = 2\cos\alpha$ ;

$y_o = \dfrac{1}{4}4\cos^2\alpha + 1 = \cos^2\alpha + 1$

Thay $\cos\alpha = \dfrac{x_o}{2}$ vào $y_o = 1 + \cos^2\alpha$, ta được : $y_o = \dfrac{x_o^2}{4} + 1$

Vậy : quỹ tích của tiếp điểm là parabol cố định ở trên với điều kiện

$$x_o \neq \frac{1}{2} \quad \text{và} \quad x_o \neq -\frac{1}{2} \ (\alpha \neq k\pi).$$

## 53. ĐH KỸ THUẬT CÔNG NGHỆ

Cho hàm số : $y = x^3 - mx + m - 2$ có đồ thị là $(C_m)$.

Tìm điểm cố định của $(C_m)$ khi m thay đổi.

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi m = 3.

Dùng đồ thị (C) biện luận theo k số nghiệm của phương trình :

$$x^3 - 3x - k + 1 = 0.$$

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

## Giải

**1.** Điểm cố định của $(C_m)$

$$(C_m): y = x^3 - mx + m - 2 \Leftrightarrow y = x^3 - m(x-1) - 2$$

(1) nghiệm đúng, $\forall m \in R \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y = x^3 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$

Vậy : $(C_m)$ qua $A(1; -1)$, cố định $\forall m \in R$.

**2.** Khảo sát và vẽ (C) khi m = 3

Ta có : (C) : $y = x^3 - 3x + 1$.

MXĐ : $D = R$

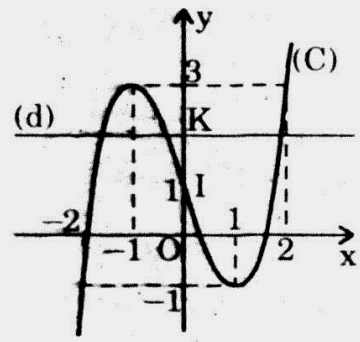
Đạo hàm : $y' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$

$y' = 0$

Điểm cực tiểu : $(1; -1)$.

Điểm cực đại : $(-1; 3)$.

Điểm uốn : $(0; 1)$.




Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | 0 | − | | − | 0 | + | |
| y | $-\infty$ | ↗ | 3 | ↘ | | ↘ | $-1$ | ↗ | $+\infty$ |

**3.** Biện luận số nghiệm : $x^3 - 3x - k + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x + 1 = k$$

Đặt : $y = x^3 - 3x + 1$ thì hàm số có đồ thị (C).

Lúc đó $y = k$ có đồ thị là đường thẳng (d) cùng phương với Ox, cắt Oy (0; k). Trên đồ thị ta có :

- $k > 3$ : (d) cắt (C) tại một điểm nên (1) có 1 nghiệm đơn.
- $k = 3$ : (d) tiếp xúc với (C) tại điểm $(-1; 3)$ và cắt (C) tại 1 điểm (2; nên (1) có 1 nghiệm kép $x_1 = x_2 = -1$, một nghiệm đơn $x = 2$.
- $3 > k > -1$ : (d) cắt (C) tại 3 điểm phân biệt nên (1) có 3 nghiệm đơ
- $k = -1$ : (d) tiếp xúc với (C) tại $(1, -1)$ và cắt (C) tại điểm $(-2; -1)$ n (1) có 1 nghiệm kép $x_1 = x_2 = 1$, một nghiệm đơn $x = -2$
- $-1 > k$ : (d) cắt (C) tại 1 điểm nên (1) có 1 nghiệm đơn.


www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

## 54. ĐH KIẾN TRÚC HÀ NỘI

Cho hàm số : $y = \dfrac{x^2 + 3mx + 3m^2}{x + 2m}$.

Trong trường hợp đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận, hãy chứng minh rằng giao điểm của hai đường tiệm cận đối xứng của đồ thị hàm số.

Tìm m để đồ thị hàm số có đường tiệm cận xiên đi qua A(–1, 2).

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số ứng với m = 1.

### Giải

Giao điểm của hai đường tiệm cận :

Hàm số có thể viết thành : $y = x + m + \dfrac{m^2}{x + 2m}$ (1)

Khi $m \neq 0$ thì hàm số có đường tiệm cận xiên : $y = x + m$.

Hàm số có đường tiệm cận đứng : $x = -2m$.

Giao điểm I của hai đường tiệm cận ấy có tọa độ : $(x = -2m; y = -m)$

Trong phép tịnh tiến $\overrightarrow{OI}$, công thức đổi trục : $\begin{cases} x = X - 2m \\ y = Y - m \end{cases}$

Thay vào (1), ta có : $Y = X + \dfrac{m^2}{X}$.

Đây là hàm số lẻ nên đồ thị nhận gốc I làm tâm đối xứng.

Khi $m \neq 0$, đồ thị của hàm số nhận giao điểm I của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.

Tìm m để đồ thị có đường tiệm cận xiên qua A(–1; 2)

Đường tiệm cận xiên $y = x + m$ qua A nên : $2 = -1 + m \Leftrightarrow m = 3$

Khảo sát và vẽ đồ thị khi m = 1

Khi m = 1 thì (1) trở thành : $y = x + 1 + \dfrac{1}{x + 2}$

- MXĐ : $D = R \setminus \{-2\}$
- Đạo hàm : $y' = 1 - \dfrac{1}{(x + 2)^2}$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -3 \end{array}\right.$$

- Điểm cực đại : (–3; –3).
- Điểm cực tiểu : (–1; 1).

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok SPS

• Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | $-3$ | | $-2$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | 0 | − | ‖ | − | 0 | + | |
| y | $-\infty$ | ↗ | $-3$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | 1 | ↗ | $+\infty$ |

• Giới hạn :

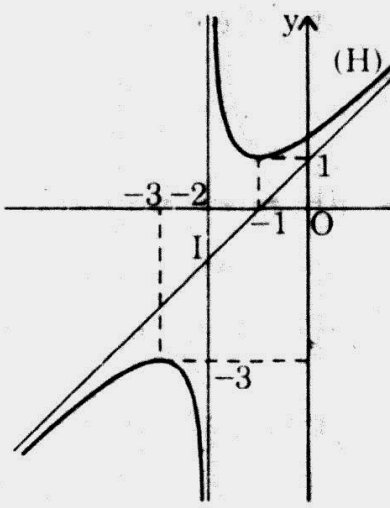
+ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \pm\infty$. Ngoài ra : $y = x + 1 + \dfrac{1}{x+2}$ có $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\dfrac{1}{x+2}\right) = 0$

nên $y = x + 1$ là đường tiệm cận xiên.

+ $\lim\limits_{x \to -2} y = \lim\limits_{x \to -2} \left(x + 1 + \dfrac{1}{x+2}\right) = \pm\infty$

nên $x = -2$ là đường tiệm cận đứng.

• Đồ thị là hyperbol xiên góc (H).




## 55. ĐH HÀNG HẢI

Cho hàm số : $y = -x^2 + 2x + 3$ (1) và $y = \dfrac{x^2}{2} - 4x + 3$ (2

**1.** Vẽ các đường parabol biểu diễn các hàm số (1) và (2) trên cùng một h trục tọa độ. Hãy xác định các giá trị của m sao cho đường thẳng y = cắt cả 2 đường parabol (1) và (2).

**2.** Giả sử m thỏa mãn điều kiện ở câu 1, gọi giao điểm của đường thẳng y = với parabol (1) là A và B, với parabol (2) là (C) và (D). Hãy xác định sao cho độ dài đoạn thẳng AB bằng độ dài đoạn thẳng CD. Tìm độ d các đoạn thẳng ấy trong trường hợp chúng bằng nhau.

### Giải

**1.** Vẽ parabol :

$(P_1) : y = -x^2 + 2x + 3$

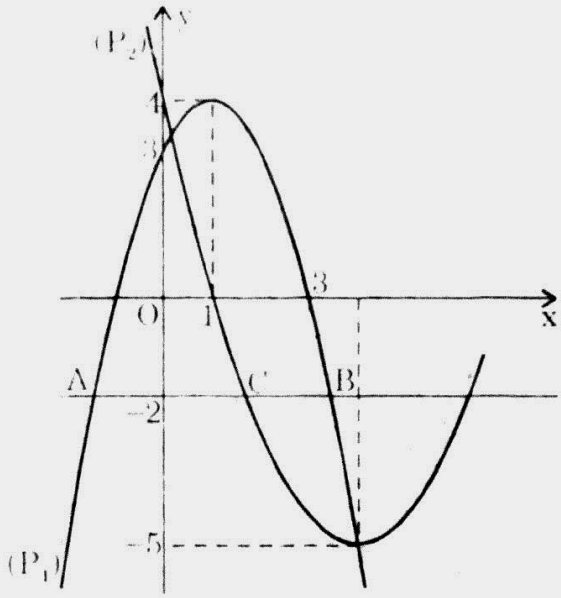
$(P_1)$ có điểm cực đại (1; 4) qua các điểm (0; 3), (2; 3).

$(P_2) : y = \dfrac{x^2}{2} - 4x + 3$

$(P_2)$ : có điểm cực tiểu (4; −5) qua các điểm (0; 3), (6; −3).

(d) : $y = m$ cắt $(P_1)$ và $(P_2)$ $\Leftrightarrow$ $-5 \le m \le 4$ (*)

Facebook.com/TeacherSokPiseth www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS




Xác định m

Phương trình hoành độ giao điểm của $(P_1)$ và đường thẳng (d) : y = m là:

$$-x^2 + 2x + 3 = m. \qquad (1)$$

Gọi $x_A$ và $x_B$ là hoành độ giao điểm của $(P_1)$ và (d) thì $x_A$ và $x_B$ là nghiệm của (1).

Mặt khác, AB cùng phương với Ox nên :

$$AB = |x_B - x_A| = 2\sqrt{4 - m} \qquad (2)$$

Tương tự, phương trình hoành độ giao điểm C, D của $(P_2)$ và (d) :

$$x^2 - 8x + 6 - 2m = 0$$

Suy ra : $CD = |x_D - x_C| = 2\sqrt{10 + 2m}$ (3)

Theo đề bài $AB = CD \Leftrightarrow \sqrt{4 - m} = \sqrt{10 + 2m}$ (do (2) và (3))

$\Leftrightarrow m = -2.$

m = −2 thỏa mãn (*), (2) và (3) nên nhận được.

Vậy : khi m = −2 thì (d) : y = m cắt $(P_1)$ và $(P_2)$

Độ dài đoạn thẳng AB

Ta có : $AB = 2\sqrt{4 - m}$ (do (2)) $\Leftrightarrow AB = 2\sqrt{6}$.

## 56. ĐH THỦY SẢN

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số : $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

Biện luận theo tham số m số nghiệm của phương trình $\dfrac{x^2 - 2x + 2}{|x - 1|} = m.$

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

## Giải

**1.** Khảo sát và vẽ đồ thị : $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} \Leftrightarrow y = x - 1 + \dfrac{1}{x - 1}$

MXĐ : $D = R \setminus \{1\}$

Đạo hàm : $y' = 1 - \dfrac{1}{(x-1)^2}$ ; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

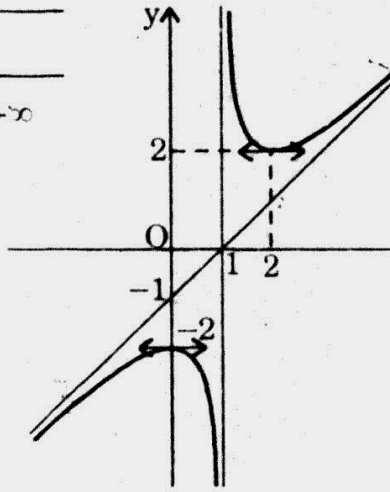
Điểm cực đại : (0; –2); điểm cực tiểu : (2; 2).

Giới hạn :

- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \pm\infty$; $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0$ nên $y = x - 1$ là đường tiệm cận xiên.
- $\lim\limits_{x \to 1} y = \pm\infty$ nên $x = 1$ là đường tiệm cận đứng.

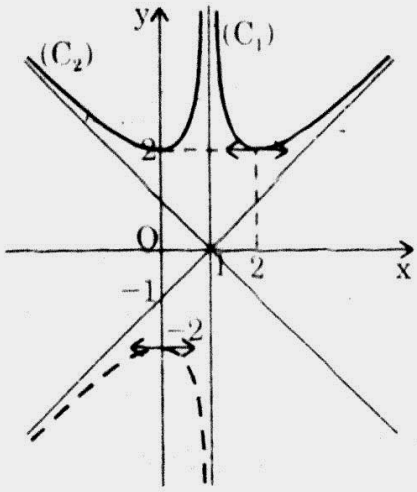
Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | 0 | | 1 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | 0 | – | ‖ | – | 0 | + | |
| y | $-\infty$ | ↗ | –2 | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | 2 | ↗ | $+\infty$ |




Đồ thị là 1 hyperbol xiên góc (H).

**2.** Biện luận :




Đặt : $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{|x - 1|} = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} \text{ khi } x > 1 & (1) \\ \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} \text{ khi } x < 1 & (2) \end{cases}$


www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

Do đó, đồ thị của $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{|x - 1|}$ gồm hai nhánh :

- Nhánh $(C_1)$ trùng với phần của (H) khi $x > 1$ [do (1)].
- Nhánh $(C_2)$ đối xứng của (H) qua Ox khi $x < 1$ [do (2)].

Mặt khác, vì $\dfrac{x^2 - 2x + 2}{|x - 1|} = m$ (3)

và $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{|x - 1|}$ nên $y = m$

Đồ thị của $y = m$ là đường thẳng (d) cùng phương với Ox.

Trên đồ thị, ta thấy :

- $m = 2$ : (d) tiếp xúc với $(C_1)$ tại (2; 2) và $(C_2)$ tại (0; 2) nên (3) có 2 nghiệm kép : $(x_1 = x_2 = 2) \vee (x_3 = x_4 = 0)$.
- $m > 2$ : (d) cắt $(C_1)$ và $(C_2)$ tại 4 điểm phân biệt nên (3) có 4 nghiệm phân biệt.

# NĂM 1997

## 57. CĐ KINH TẾ ĐỐI NGOẠI – KHỐI A

Cho hàm số : $y = \dfrac{x^2 - 3x + m}{x - 2}$, đồ thị là $(C_m)$.

Xác định m để hàm số y có cực trị. Tìm tập hợp các điểm cực trị của $(C_m)$.

Khảo sát và vẽ đồ thị $(C_3)$ của hàm số khi $m = 3$.

Tìm tiếp tuyến của $(C_3)$ đi qua điểm (1; 0).

### Giải

Xác định m để hàm số có cực trị

Miền xác định : $D = R \setminus \{2\}$

Đạo hàm: $y' = \dfrac{(x - 2)(2x - 3) - (x^2 - 3x + m)}{(x - 2)^2} = \dfrac{x^2 - 4x + 6 - m}{(x - 2)^2}$

Hàm số có cực trị $\Leftrightarrow$ $y' = 0$ và đổi dấu

$\Leftrightarrow$ $x^2 - 4x + 6 - m = 0$ có $\Delta' > 0$

Biệt số : $\Delta' = m - 2$. $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 2$.

Khi $m = 2$ thì $y' = 1$ (không đổi dấu) nên $m = 2$ (loại).

Facebook.com/TeacherSokPiseth www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

Vậy hàm số có cực trị khi m > 2.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm cực trị ta có : $y'(x_0) = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$

$$y'(x_0) = 0 \Rightarrow \frac{u}{v} = \frac{u'}{v'} \Rightarrow x_0 = \frac{u'}{v'} = 2x_0 - 3 \quad \forall m$$

**2.** Khảo sát và vẽ đồ thị $(C_3)$ khi m = 3

Khi m = 3, ta có : $y = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x - 2} = x - 1 + \dfrac{1}{x - 2}$

- Miền xác định : $D = R \setminus \{2\}$
- Đạo hàm : $y' = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2}$

  $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hay $x = 3$.

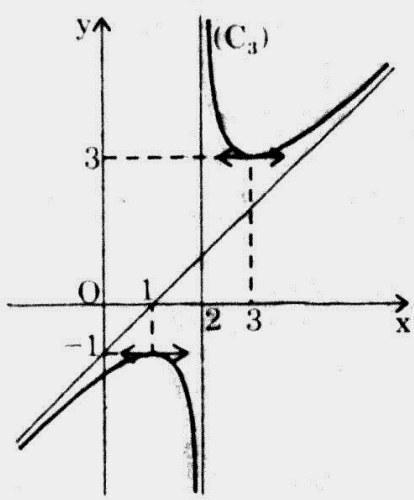
  Khi $x = 1$ thì : $y = -1$ (CĐ)

  Khi $x = 3$ thì : $y = 3$ (CT).
- $\lim\limits_{x \to 2} y = \pm\infty$ nên $x = 2$ là tiệm cận đứng.
- $\lim\limits_{x \to \infty} [y - (x - 1)] = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x - 2} = 0$ nên $y = x - 1$ là **tiệm cận** xiên.

Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | 1 | | 2 | | 3 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | 0 | − | ‖ | − | 0 | + | |
| y | $-\infty$ | ↗ | −1 | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | 3 | ↗ | $+\infty$ |

Đồ thị $(C_1)$ là một hyperbol **xiên góc**.






www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

3. Tiếp tuyến của $(C_3)$ đi qua điểm $(1; 0)$

Gọi d là đường thẳng qua $A(1; 0)$ có hệ số góc k.

Phương trình của d : $y = k(x - 1)$

Phương trình hoành độ giao điểm của $(C_3)$ và d :

$$\frac{x^2 - 3x + 3}{x - 2} = kx - k \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases}(1 - k)x^2 - 3(1 - k)x + 3 - 2k = 0 \\ x \neq 2\end{cases} \qquad (1)$$

Để cho d là tiếp tuyến của $(C_3)$, (1) phải có nghiệm số kép $(x \neq 2)$ nghĩa là :

$\Delta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k^2 + 2k - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = 1 \vee k = -3.$

$k = 1 \quad \Rightarrow \quad y = x - 1$ là đường tiệm cận xiên của $(C_3)$.

$k = 1$ bị loại.

Vậy tiếp tuyến của $(C_3)$ qua $(1; 0)$ là : $y = -3x + 3$.

## 58. ĐH DL VĂN LANG – KHỐI B, D

Cho hàm số : $y = \dfrac{x^2 + m(m^2 - 1)x - m^4 + 1}{x - m}$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = -1$.
2. Chứng tỏ rằng với mọi m, hàm số luôn luôn có cực trị.
3. Tìm tập hợp điểm cực đại của hàm số khi m thay đổi.

### Giải

1. Khảo sát và vẽ đồ thị khi $m = -1$

Khi $m = -1$ thì : $y = \dfrac{x^2}{x + 1} = x - 1 + \dfrac{1}{x + 1}$

- Miền xác định : $D = R \setminus \{-1\}$.
- Đạo hàm : $y' = 1 - \dfrac{1}{(x + 1)^2}$

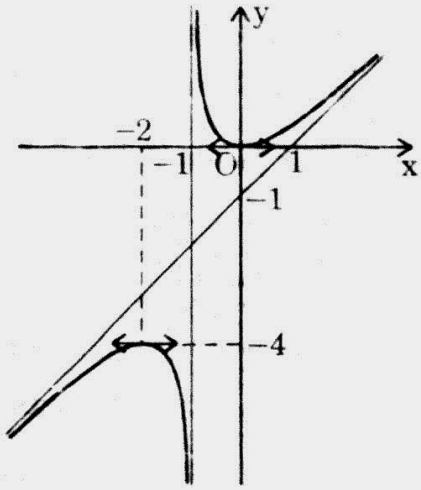
  $y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee x = -2$
- Khi $x = 0$ thì $y = 0$

  Khi $x = -2$ thì $y = -4$
- $\lim\limits_{x \to 1} y = \pm\infty \quad \Rightarrow \quad x = 1$ là đường tiệm cận đứng.
- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [y - (x - 1)] = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x + 1} = 0$

  $\Rightarrow \quad y = x - 1$ là đường tiệm cận xiên.

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

Đồ thị là hyperbol xiên góc.




**2.** Chứng tỏ rằng với mọi m, hàm số luôn luôn có cực trị

Ta có : $y = \dfrac{x^2 + (m^2 - 1)mx + 1 - m^4}{x - m}$

$$y' = \frac{(x - m)[2x + m(m^2 - 1)] - [x^2 + m(m^2 - 1)x + 1 - m^4]}{(x - m)^2}$$

$$y' = \frac{x^2 - 2mx + m^2 - 1}{(x - m)^2}$$

Ta thấy : $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$ có biệt số :

$\Delta' = m^2 - m^2 + 1 = 1 > 0, \forall m \in R.$

Vậy y luôn luôn có cực trị.

**3.** Tập hợp các điểm cực đại

Ta có : $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = m - 1 \vee x = m + 1.$

Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | $m - 1$ | | $m$ | | $m + 1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | 0 | − | ‖ | − | 0 | + | |
| y | | ↗ | CĐ | ↘ | ‖ | ↘ | CT | ↗ | |

Điểm cực đại của hàm số có tọa độ : $\begin{cases} x = m - 1 \\ y = 2x + m(m^2 - 1) \end{cases}$

Khử m giữa (x, y), ta được : $y = x(x^2 + 3x + 4)$

Vậy tập hợp những điểm cực đại là toàn bộ đồ thị của hàm số :

$$y = x(x^2 + 3x + 4).$$

Ro Ang - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

## 59. ĐH DL VĂN LANG – KHỐI A

Cho hàm số : $y = \dfrac{2x^2 + (1-m)x + 1 + m}{x - m}$ (1)

Với m = 1, hãy khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số.

Chứng minh rằng với mọi $m \neq -1$, đồ thị hàm số (1) luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định tại một điểm cố định.

Xác định m để hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

### Giải

Khảo sát và vẽ đồ thị

Khi m = 1 thì (1) $\Rightarrow$ $y = \dfrac{2x^2 + 2}{x - 1} = 2x + 2 + \dfrac{4}{x-1}$

- Miền xác định : $D = R \setminus \{1\}$
- Đạo hàm : $y' = 2 - \dfrac{4}{(x-1)^2}$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$$

– Khi $x = 1 + \sqrt{2}$ thì $y = 4 + 4\sqrt{2}$ (CT)

– Khi $x = 1 - \sqrt{2}$ thì $y = 4 - 4\sqrt{2}$ (CĐ)

- Bảng biến thiên :

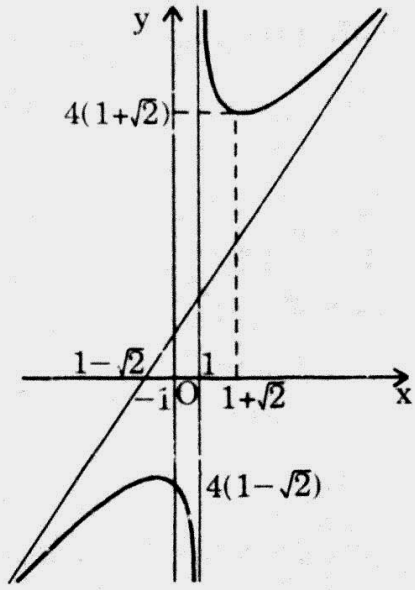
| x | $-\infty$ | | $1-\sqrt{2}$ | | 1 | | $1+\sqrt{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | 0 | – | ‖ | – | 0 | + | |
| y | $-\infty$ | ↗ | $4 - 4\sqrt{2}$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $4 + 4\sqrt{2}$ | ↗ | $+\infty$ |

- $\lim\limits_{x \to 1} y = \pm\infty$

x = 1 là đường tiệm cận đứng.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} [y - (2x + 2)] = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{x-1} = 0$

y = 2x + 2 là đường tiệm cận xiên góc.




Đồ thị của (1) tiếp xúc với một đường thẳng cố định tại một điểm cố định

Điểm cố định của đồ thị của (1).

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq m \\ (x - m)y = 2x^2 + (1-m)x + 1 + m \end{cases}$$

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq m \\ xy - 2x^2 - x - 1 = m(y - x + 1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy - 2x^2 - x - 1 = 0 \\ y - x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$$

Vậy đồ thị của (1) qua A(–1; –2) cố định.

- Đạo hàm của y : $y' = \dfrac{2x^2 - 4mx + m^2 - 2m - 1}{(x - m)^2}$

Khi x = –1 thì y' = 1, $\forall m \in R \setminus \{-1\}$.

Vậy tiếp tuyến tại A(–1; –2) của đồ thị của (1) có phương trình : y = x – 1 nên tiếp tuyến này cố định.

**c)** Xác định m

Ta có : $y' = \dfrac{2x^2 - 4mx + m^2 - 2m - 1}{(x - m)^2}$

Dấu của y' là dấu của $f(x) = 2x^2 - 4mx + m^2 - 2m - 1$.

Biệt số : $\Delta' = 4m^2 - 2(m^2 - 2m - 1) = 2m^2 + 4m + 2 = 2(m + 1)^2$.

f(x) có 2 nghiệm : $x_1 = \dfrac{2m + (m+1)\sqrt{2}}{2} = \dfrac{(2+\sqrt{2})m + \sqrt{2}}{2}$

$$x_2 = \frac{2m - (m+1)\sqrt{2}}{2} = \frac{(2-\sqrt{2})m - \sqrt{2}}{2}$$

Ta có : $2(x_1 - x_2) = 2m + (m + 1)\sqrt{2} - [2m - (m + 1)\sqrt{2}]$

$$2(x_1 - x_2) = 2(m + 1)\sqrt{2} \qquad (1)$$

Có 2 trường hợp :

**i)** $m \geq -1$. Lúc đó $x_1 > x_2$ [do (1)]

Để hàm có đồng biến trên (1; +∞), ta phải có :

$$x_1 \leq 1 \Leftrightarrow \frac{2m + (m+1)\sqrt{2}}{2} \leq 1 \Leftrightarrow 2m + m\sqrt{2} \leq 2 - \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow m \leq \frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \Leftrightarrow m \leq \frac{(2-\sqrt{2})^2}{2}$$

Vậy khi $-1 \leq m \leq \dfrac{(2-\sqrt{2})^2}{2}$ thì y đồng biến trên (1; +∞).

**ii)** $m < -1$. Lúc đó $x_2 > x_1$ [do (1)].

Để hàm số đồng biến trên (1; +∞), ta phải có :

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

$$x_2 \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2m - (m+1)\sqrt{2}}{2} \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad (2 - \sqrt{2})m \le 2 + \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad m \le \frac{(2+\sqrt{2})^2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad m \le 3 + 2\sqrt{2}.$$

Vậy khi $m \le -1$ thì y đồng biến trên $(1; +\infty)$.

Tóm lại, khi $m \le 3 - 2\sqrt{2}$ thì y đồng biến trên $(1; +\infty)$.

## 60. ĐH DL NGOẠI NGỮ – TIN HỌC

Cho hàm số : $y = x^3 + k(x + 1) + 1$ (1)

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số ứng với $k = -3$.

**2.** Biện luận theo tham số m nghiệm của phương trình : $x^3 - 3x = m$.

**3.** Gọi $(C_k)$ là đồ thị của hàm số (1). Tìm tất cả các giá trị của k để đường thẳng $y = x + 1$ tiếp xúc với $(C_k)$.

### Giải

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị khi $k = -3$

Khi $k = -3$, thì : $y = x^3 - 3(x + 1) + 1$.

- Miền xác định : $D = R$.
- Đạo hàm : $y' = 3x^3 - 3$

  $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

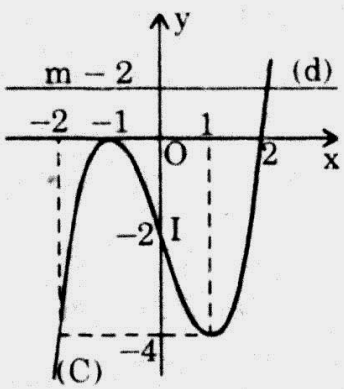
  Khi $x = 1$ thì $y = -4$.

  Khi $x = -1$ thì $y = 0$.
- Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | 0 | − | 0 | + | |
| y | $-\infty$ | ↗ | 0 | ↘ | $-4$ | ↗ | $+\infty$ |

- Điểm uốn : $y'' = 6x = 0 \Rightarrow x = 0$; $y = -2$

  $I(0; -2)$.
- Đồ thị : hình bên.




**2.** Biện luận : (C) : $y = x^3 - 3x - 2$.

(d) : $y = m - 2$.

thì $x^3 - 3x = m$ là phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d).



www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

Trên đồ thị, ta có :

- $m - 2 > 0 \Leftrightarrow m > 2$

  (C) và (d) có 1 giao điểm duy nhất nên $x^3 - 3x = m$ có một nghiệm đơn
- $m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$ thì (C) và (d) tiếp xúc nhau tại : $x = -1$ cắt nhau tại $x = 2$ nên $x^3 - 3x = m$ có 1 nghiệm kép $x = -1$ và nghiệm đơn tại $x = 2$.
- $-4 < m - 2 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 0$ thì (C) và (d) có ba giao điểm khác nhau nên $x^3 - 3x = m$ có ba nghiệm đơn.
- $-4 = m - 2 \Leftrightarrow m = -2$ thì $x^3 - 3x = m$ có một nghiệm kép $x = 1$ và một nghiệm đơn $x = -2$.
- $m - 2 < -4 \Leftrightarrow m < -2$ thì $x^3 - 3x = m$ có một nghiệm đơn.

**3.** Tìm tất cả các giá trị của k

Phương trình hoành độ giao điểm của $(C_k)$ và $(\Delta) : y = x + 1$ là :

$$x^3 + k(x + 1) + 1 = x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad (x + 1)(x^2 - x + 1 + k) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 & (1) \\ x^2 - x + 1 + k = 0 & (2) \end{cases}$$

$(C_k)$ và $(\Delta)$ tiếp xúc với nhau $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \text{ là nghiệm của } (2) \\ \text{Biệt số } \Delta \text{ của } (2) \text{ bằng } 0 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = -3 \\ \Delta = 1 - 4(1 + k) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow k = -\frac{3}{4}$$

Vậy khi $k = -3 \vee k = -\frac{3}{4}$ thì $(C_k)$ tiếp xúc với $(\Delta)$.

## 61. ĐH AN NINH – ĐH CẢNH SÁT – KHỐI A

Cho hàm số : $y = x^3 - (m + 2)x^2 + (1 - m)x + 3m - 1$ (1)

**1.** Với giá trị nào của m thì hàm số (1) đạt cực trị tại $x_1$, $x_2$ thỏa mãn điều kiện : $|x_1 - x_2| = 2$.

**2.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi $m = 1$.

### Giải

**1.** Giá trị của m

Đạo hàm : $y' = 3x^2 - 2(m + 2)x + 1 - m$

$x_1$, $x_2$ là các nghiệm của $y' = 0$.

Mà : $|x_1 - x_2| = 2$ nên $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 - 4 = 0 \quad (*)$$



www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

Theo định lí Viét, ta có : $x_1 + x_2 = \dfrac{2(m+2)}{3}$ và $x_1.x_2 = \dfrac{1-m}{3}$

Nên (*) trở thành : $\dfrac{4}{9}(m+2)^2 - \dfrac{4}{3}(1-m) - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1 \vee m = -8.$

Mặt khác, $y' = 0$ có 2 nghiệm $x_1, x_2$ phân biệt khi :

$$\Delta' = (m+2)^2 - 3(1-m) > 0 \Leftrightarrow m^2 + 7m + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow m < \frac{-7-3\sqrt{5}}{2} \vee m > \frac{-7+3\sqrt{5}}{2}.$$

Ta nhận được cả 2 giá trị của m, đó là : $m = -8 \vee m = 1$.

**2.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C)

Khi m = 1 thì (1) trở thành : $y = x^3 - 3x^2 + 2$

- Miền xác định : D = R.
- Đạo hàm : $y' = 3x^2 - 6x$

  $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$

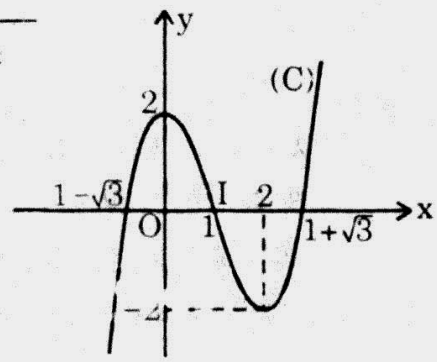
- Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | 0 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | 0 | − | 0 | + | |
| y | $-\infty$ | ↗ | 2 | ↘ | −2 | ↗ | $+\infty$ |

- Điểm uốn : $y'' = 0 \Leftrightarrow 6x - 6 = 0$

  $\Leftrightarrow x = 1$

  I(1; 0)




## 62. ĐH THỦY SẢN

Cho hàm số : $y = 2x^3 + 3x^2 - 1$

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số.

**2** Biện luận theo m số nghiệm của phương trình : $2x^3 + 3x^2 - 1 - m = 0$.

### Giải

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị : $y = 2x^3 + 3x^2 - 1$

- Miền xác định : D = R
- Đạo hàm : $y' = 6x^2 + 6x$

  $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1.$

  Khi $x = 0$ thì $y = -1$

  Khi $x = -1$ thì $y = 0$



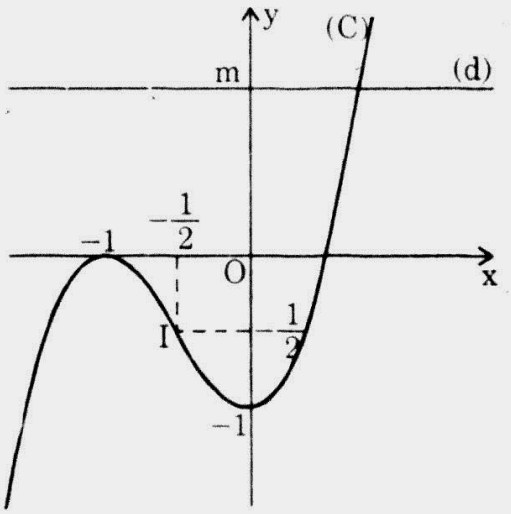
www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

- Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | 0 | − | 0 | + | |
| y | $-\infty$ | ↗ | 0 | ↘ | $-1$ | ↗ | $+\infty$ |

- Điểm uốn : $I\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

- Đồ thị là đường cong (C).




**2.** Biện luận số nghiệm của : $2x^3 + 3x^2 - 1 - m = 0$ (1)

Ta có : $2x^3 + 3x^2 - 1 = m$

Đặt $y = 2x^3 + 3x^2 - 1$ có 1 đồ thị là (C) thì $y = m$ có đồ thị là đường thẳng (d) // Ox.

Trên đồ thị ta thấy :

- $m > 0$ : (C) và (d) có 1 giao điểm duy nhất nên (1) có 1 nghiệm đơn.
- $0 = m$ : (C) và (d) tiếp xúc với nhau tại $x = -1$ và cắt nhau tại 1 điểm nên (1) có 1 nghiệm đơn và 1 nghiệm kép.
- $-1 < m < 0$ : (C) và (d) có 3 giao điểm phân biệt nên (1) có 3 nghiệm đơn.
- $m = -1$ : (1) có 1 nghiệm đơn và 1 nghiệm kép.
- $m < -1$ : (1) có 1 nghiệm đơn.

## 63. TRUNG HỌC KỸ THUẬT Y TẾ 3

Cho hàm số : $y = \dfrac{x^2 + x - 3}{x + 2}$.

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

**2.** Tìm các giao điểm của (C) với đường thẳng (D) : $5x - 6y - 13 = 0$.


www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

**3.** Xác định m để đường thẳng $(\Delta)$ : $y = 2x + m$ tiếp xúc với (C). Dùng kết quả này biện luận theo m số nghiệm của phương trình :

$$\frac{x^2 + x - 3}{x + 2} = 2x + m.$$

**4.** Tìm trên trục hoành những điểm từ đó kẻ được đúng 2 tiếp tuyến đến (C).

## Giải

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số : $y = \dfrac{x^2 + x - 3}{x + 2}$

- Miền xác định : $D = R \setminus \{-2\}$
- Đạo hàm : $y = x - 1 - \dfrac{1}{x + 2} > 0, \quad \forall x \in D.$
- Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | $-2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | ‖ | + | |
| y | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

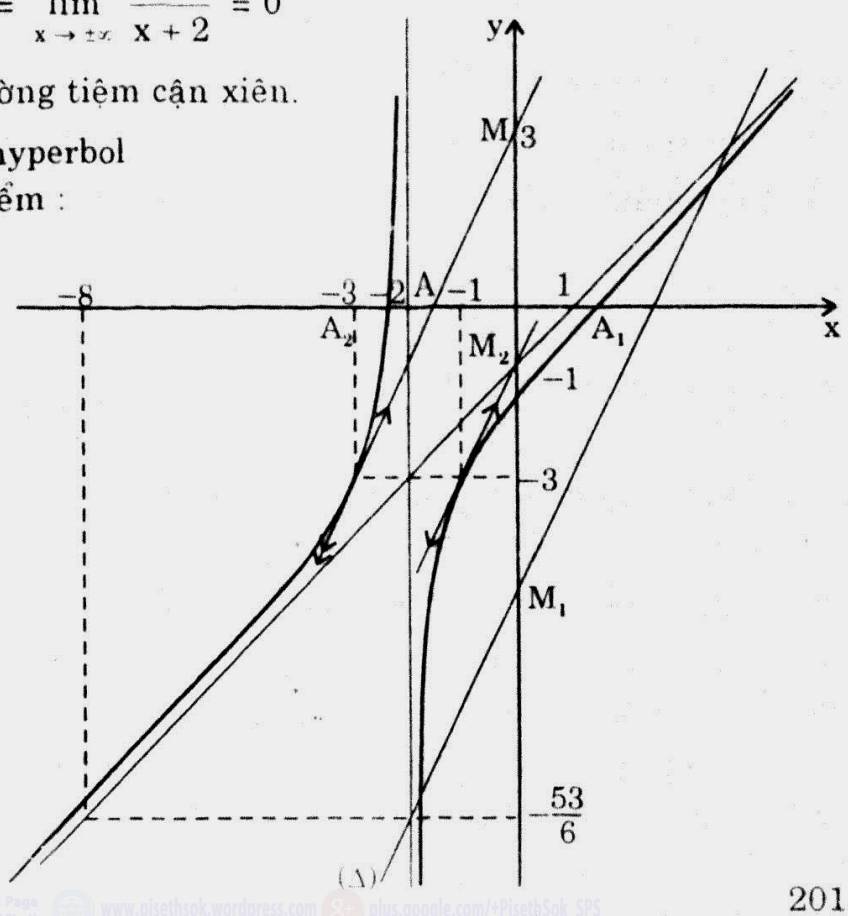
- $\lim\limits_{x \to -2} y = \pm\infty$ nên $x = -2$ là đường tiệm cận đứng.
- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \pm\infty$
- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [y - (x - 1)] = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{-1}{x + 2} = 0$

  nên $y = x - 1$ là đường tiệm cận xiên.
- Đồ thị (C) là một hyperbol xiên góc qua các điểm :

  $\left(0, -\dfrac{3}{2}\right)$,

  $(-1; -3)$,

  $(-3; -3)$.




www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

**2.** Giao điểm của (C) và (D) :

Phương trình của (D) : $5x - 6y - 13 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{5}{6}x - \frac{13}{6}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (D) :

$$\frac{x^2 + x - 3}{x + 2} = \frac{5}{6}x - \frac{13}{6} \Leftrightarrow 6(x^2 + x - 3) = (5x - 13)(x + 2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 9x + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = -8$$

Vậy : (C) và (D) cắt nhau tại : $(-1; -3)$ và $\left(-8, -\frac{53}{6}\right)$.

**3.** Xác định m để (Δ) tiếp xúc với (C) :

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (Δ) :

$$\frac{x^2 + x - 3}{x + 2} = 2x + m \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ x^2 + x - 3 = (x + 2)(2x + m) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ x^2 + (m + 3)x + 2m + 3 = 0 \ (*) \end{cases}$$

Để cho (Δ) tiếp xúc với (C), ta phải có :

$$\begin{cases} (*) \text{ có nghiệm } x \neq -2 & (1) \\ \Delta = 0 \text{ (biệt số)} & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1) \text{ thuộc } (*) \text{ với mọi } m \in R \\ (2) \Leftrightarrow m = -1 \vee m = 3 \end{cases}$$

Vậy khi $m = -1$ hay $m = 3$ thì (Δ) tiếp xúc với (C).

- Biện luận theo m số nghiệm của phương trình :

$$\frac{x^2 + x - 3}{x + 2} = 2x + m \qquad (3)$$

Đặt : $y = \frac{x^2 + x - 3}{x + 2}$ thì hàm số này có đồ thị (C) đã vẽ ở trên

Lúc đó, đường (Δ) : $y = 2x + m$ song song với các tiếp tuyến của (C) lần lượt có phương trình : $(\Delta_1) : y = 2x - 1$

$(\Delta_2) : y = 2x + 3$.

Gọi M, $M_1$, $M_2$ lần lượt là giao điểm của (Δ), $(\Delta_1)$, $(\Delta_2)$ với trục tung ta thấy

- Khi $M \in$ tia $M_1y$ thì (Δ) cắt (C) tại 2 điểm phân biệt. Do đó, khi $m > 3$ thì phương trình (3) có 2 nghiệm phân biệt.



www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

Tương tự, khi $M \in M_2y'$. Do đó : khi $m < -1$, phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt.

- Khi $m = 3$ hay $m = -1$ thì $(\Delta)$ trùng $(\Delta_1)$ hay $(\Delta_2)$ nên phương trình (3) có nghiệm số kép : $x_1 = x_2 = -3$ hay $x_1 = x_2 = -1$.
- Khi $m \in$ đoạn $M_1M_2$ (bỏ $M_1$ và $M_2$) thì $(\Delta)$ không cắt (C).

  Do đó, khi $-1 < m < 3$ thì phương trình (3) vô nghiệm.

Tóm lại :

- *$m < -1$ hay $m > 3$ :* phương trình (3) có 2 nghiệm phân biệt.
- *$m = -1$ hay $m = 3$ :* phương trình (3) có 1 nghiệm kép :

  $x_1 = x_2 = -3$ hay $x_1 = x_2 = -1$
- *$-1 < m < 3$ :* phương trình (3) vô nghiệm.

**4.** Điểm trên trục hoành từ đó kẻ được đúng 1 tiếp tuyến (C) :

Gọi $A(x_o; 0)$ là điểm trên Ox, và (d) là đường thẳng qua A có hệ số góc k.
Phương trình của (d) : $y = k(x - x_o) \Leftrightarrow y = kx - kx_o$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (C) :

$$\frac{x^2 + x - 3}{x + 2} = kx - kx_o \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ x^2 + x - 3 = (kx - kx_o)(x + 2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ (k - 1)x^2 + (2k + kx_o - 1)x + 3 - 2kx_o = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Để cho (d) tiếp xúc với (C), ta phải có :

$$\begin{cases} k - 1 \neq 0 \\ (4) \text{ có } \Delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 1 \\ (2k - kx_o - 1)^2 - 4(k - 1)(3 - 2kx_o) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 1 \\ (x_o + 2)^2 k^2 - 2(3x_o + 8)k + 13 = 0 \end{cases} \quad (5)$$

- Với $k \neq 1$, (5) $\Leftrightarrow (x_o + 2)^2 - 2(3x_o + 8) + 13 \neq 0$

  $\Leftrightarrow x_o - 2x_o + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x_o \neq 1$ (6)
- Với $x_o + 2 = 0$, (5) $\Leftrightarrow -4k + 13 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{13}{4}$.

  Vậy khi $x_o = -2$ thì qua A, ta có đúng một tiếp tuyến của (C), phương trình là : $y = \frac{13}{4}x - \frac{13}{4}(-2) \Leftrightarrow y = \frac{13}{4}x - \frac{13}{2}$
- Với $x_o + 2 \neq 0$ (5) phải có nghiệm kép, nghĩa là :

  biệt số $\Delta' = (3x_o + 8)^2 - 13(x_o + 2)^2 = 0$

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

$$\Leftrightarrow \quad x_0^2 + x_0 - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x_0 = \dfrac{-1+\sqrt{13}}{2} \\ x_0 = \dfrac{-1-\sqrt{13}}{2} \end{array}\right.$$

So với (6), hai nghiệm này đều khác 1 nên nhận được.

Tóm lại, có tất cả ba điểm trên trục hoành, từ đó, ta vẽ được đúng một tiếp tuyến của (C), đó là các điểm

$$A(-2; 0), \quad A_1\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, 0\right), \quad A_2\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, 0\right).$$

Các điểm $A_2$, $A_3$ chính là giao điểm của (C) và trục hoành.

## 64. ĐH QUỐC GIA TPHCM – KHỐI A – ĐỢT 1

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số : $y = \dfrac{x^2+x+2}{x-1}$.

**2.** Tìm tất cả các cặp điểm $M_1$, $M_2$ ở trên (C) và đối xứng với nhau qua điểm $I\left(0, \dfrac{5}{2}\right)$.

### Giải

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của $y = \dfrac{x^2+x+2}{x-1}$

- Miền xác định : $D = R \setminus \{1\}$
- Đạo hàm : $y = x + 2 + \dfrac{4}{x-1} \Rightarrow y' = 1 - \dfrac{4}{(x-1)^2}$

  $y' = 0 \Rightarrow x = -1$ hay $x = 3$
- Khi $x = -1$ thì $y = -1$ (cực đại),

  Khi $x = 3$ thì $y = 7$ (cực tiểu).
- Bảng biến thiên :

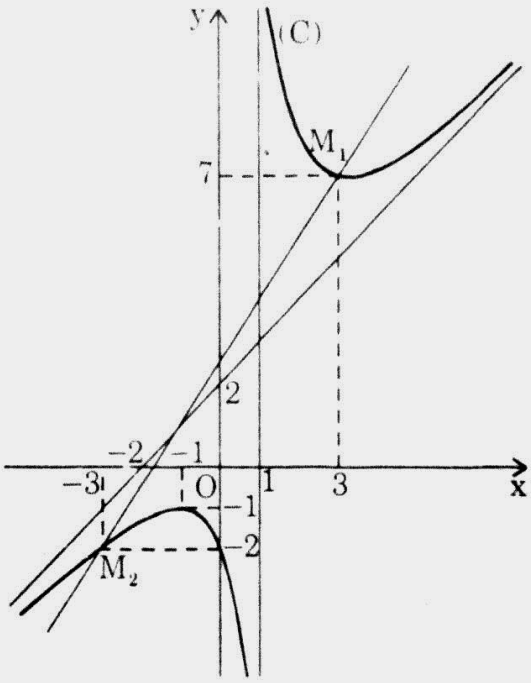
| x | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | 0 | − | ‖ | − | 0 | + | |
| y | $-\infty$ | ↗ | $-1$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | 7 | ↗ | $+\infty$ |

- Tiệm cận đứng : $x = 1$
- Tiệm cận xiên : $y = x + 2$.



www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

- Đồ thị (C) :




**2.** Xác định các cặp điểm $M_1$, $M_2$

Gọi d là đường thẳng qua $I\left(0, \frac{5}{2}\right)$ có hệ số góc k.

Phương trình của d : $y = kx + \frac{5}{2}$

Phương trình hoành độ giao điểm $M_1$, $M_2$ của d và (C) :

$$\frac{x^2 + x + 2}{x - 1} = kx + \frac{5}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (1-k)x^2 + \left(k - \frac{3}{2}\right)x + \frac{9}{2} = 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \qquad (1)$$

Gọi $x_1$, $x_2$ lần lượt là hoành độ của $M_1$, $M_2$ thì $x_1$, $x_2$ là nghiệm của (1).

Suy ra : $$x_1 + x_2 = \frac{k - \frac{3}{2}}{1 - k} \qquad (2)$$

Mặt khác, I là trung điểm của $M_1$, $M_2$ nên :

$$x_I = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 + x_2 = 0 \qquad (3)$$

(2) và (3) cho : $k - \frac{3}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{3}{2}$

Lúc này (1) $\Leftrightarrow$ $x^2 = 9$ $\Leftrightarrow$ $x = \pm 3$.

Vậy : có cặp điểm $M_1(3; 7)$, $M_2(-3; -2)$ thỏa mãn đề bài.

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

## 65. ĐH QUỐC GIA TPHCM – KHỐI B – ĐỢT 1

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số : $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$.

**2.** M là một điểm bất kì trên (C) có hoành độ $x_M = m$, tiếp tuyến tại M với (C) cắt các tiệm cận tại A, B. Gọi I là giao điểm của các tiệm cận. Chứng minh rằng M là trung điểm của AB và $\Delta IAB$ có diện tích không đổi khi m thay đổi.

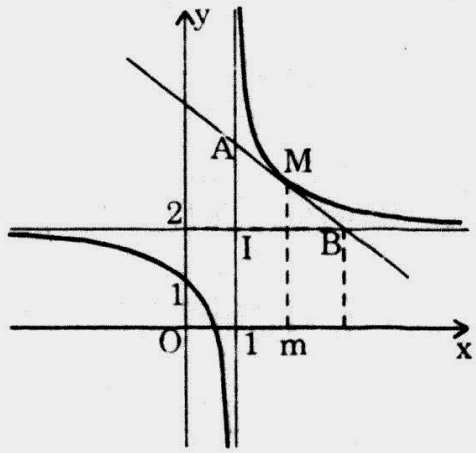
### Giải

$$y = f(x) = \frac{2x-1}{x-1} \qquad (C).$$

**1.** Khảo sát và vẽ đồ thị (C)

- Miền xác định : $D = R \setminus \{1\}$.
- $f(x) = \dfrac{-1}{(x-1)^2} < 0.$
- Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f' | | − | ‖ | − | |
| f | 2 | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | 2 |




- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2$ : tiệm cận ngang : $y = 2$.
- $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \infty$ : tiệm cận đứng : $x = 1$.
- Điểm đặc biệt : $x = 0 \Rightarrow y = 1$

  $y = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$

**2.** $M(x_o; y_o)$

Phương trình tiếp tuyến tại M : $y - y_o = f(x_o)(x - x_o)$

$$y = \frac{-1}{(m-1)^2}(x-m) + \frac{2m-1}{m-1} \qquad (1)$$

Vì $y_B = 2$ nên (1) cho : $x_B = 2m - 1$.

Vì $x_A = 1$ nên : $\dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{1+2m-1}{2} = m$

Suy ra : $\dfrac{x_A + x_B}{2} = x_M$. Vậy : MA = MB.

Facebook.com/TeacherSokPiseth www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok SPS

Vì $x_A = 1$ nên (1) cho : $y_A = \dfrac{m-1}{(m-1)^2} + \dfrac{2m-1}{m-1} \Leftrightarrow y_A = \dfrac{2m}{m-1}$

Ta có : $I(1; 2) \Rightarrow \begin{cases} IA = |y_A - y_I| \\ IB = |x_B - x_I| \end{cases}$

Do đó : $S_{\Delta IAB} = \dfrac{1}{2} IA.IB = \dfrac{1}{2} |(x_B - x_I)(y_A - y_I)|$

$$= \frac{1}{2}\left|(2m-1-1)\left(\frac{2m}{m-1} - 2\right)\right| = \frac{1}{2}\left|2(m-1).\frac{2}{(m-1)}\right|$$

$S_{\Delta IAB} = 2.$

Vậy : $\Delta IAB$ có diện tích không đổi khi m thay đổi.

## 66. ĐH QUỐC GIA TPHCM – KHỐI A – ĐỢT 3

Cho họ đường cong $(C_m)$ : $y = \dfrac{x^2 + mx - 1}{x - 1}$ (m là tham số).

**1.** Xét đường thẳng $(L_m)$ : $y = mx + 2$. Tìm m sao cho $(C_m)$ cắt $(L_m)$ tại hai điểm phân biệt.

**2.** Gọi $(D_m)$ là tiệm cận xiên của $(C_m)$. Tìm m sao cho $(D_m)$ tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 8 (đơn vị diện tích).

### Giải

$$(C_m) : y = \frac{x^2 + mx - 1}{x - 1}$$

**1.** $(L_m)$ : $y = mx + 2$.

Phương trình hoành độ giao điểm của $(C_m)$ và $(L_m)$

$$\frac{x^2 + mx - 1}{x - 1} = mx + 2 \qquad (x \neq 1)$$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + mx - 1 = mx^2 + 2x - mx - 2$

$\Leftrightarrow \quad (m-1)x^2 + 2(1-m)x - 1 = 0 \qquad (1)$

$(C_m)$ cắt $(L_m)$ tại hai điểm phân biệt :

$\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ \Delta' > 0 \\ (m-1) + 2(1-m) - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m^2 - m > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > 1. \end{array}\right.$$

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

**2.** $(C_m) : y = x + m + 1 + \dfrac{m}{x-1}$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{m}{x-1} = 0$

$(C_m)$ có tiệm cận xiên : $y = x + m + 1$ $(D_m)$

$(D_m)$ cắt Ox tại $A(-m-1; 0)$

$(D_m)$ cắt Oy tại $B(0; m+1)$.

$S_{\Delta OAB} = 8 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} OA \times OB = 8 \Leftrightarrow (m+1)^2 = 16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m = -5. \end{array}\right.$

## 67. ĐH QUỐC GIA TPHCM – ĐH KINH TẾ – KHỐI A

Cho hàm số : $y = \dfrac{4(m+1)x^2 - 4mx - (m^3 - m^2 + 2)}{2x - m}$ có đồ thị là đường cong $(C_m)$.

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị $(C_1)$ ứng với $m = 1$.

**2.** Trong trường hợp tổng quát, chứng tỏ rằng tiệm cận xiên của $(C_n)$ luôn luôn tiếp xúc với một parabol cố định khi m thay đổi.

### Giải

$$y = \frac{4(m+1)x^2 - 4mx - (m^3 - m^2 + 2)}{2x - m}$$

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị $(C_1)$ khi $m = 1$

$$y = f(x) = \frac{8x^2 - 4x - 2}{2x - 1} \qquad (C_1).$$

Miền xác định : $D = R \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

$$f'(x) = \frac{16x^2 - 16x + 8}{(2x-1)^2}$$

$$f'(x) > 0 \ \forall x \in D \qquad (\text{vì } \Delta' < 0).$$

Ta có bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f' | | + | ‖ | + | |
| f | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

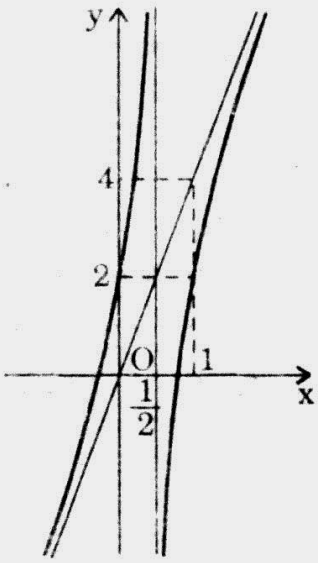


www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

- $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = \infty$ : Tiệm cận đứng $x = \frac{1}{2}$.

- $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ : (1) $\Leftrightarrow$ $f(x) = 4x - \frac{2}{2x-1}$.

- $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2}{2x-1} = 0$ : Tiệm cận xiên $y = 4x$.




Đồ thị : (hình bên).

**2.** Khi m thay đổi, chứng minh rằng tiệm cận xiên của $(C_m)$ luôn tiếp xúc với một parabol cố định

Ta có : $y = 2(m+1)x + m^2 - m - \frac{2}{2x-m}$ $(C_m)$.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2}{2x-m} = 0$$

$(C_m)$ có tiệm cận xiên $(\Delta_m)$ có phương trình là :

$$y = 2(m+1)x + m^2 - m \qquad (*)$$

Ta có :

$$(\Delta_m) : y = m^2 + 2m\left(\frac{2x-1}{2}\right) + \left(\frac{2x-1}{2}\right)^2 - \left(\frac{2x-1}{2}\right)^2 + 2x$$

$$y = \left[m + \frac{2x-1}{2}\right]^2 + \left(-x^2 + 3x - \frac{1}{4}\right)$$

**Đặt (P) :** $y = -x^2 + 3x - \frac{1}{4}$

**Phương trình hoành độ giao điểm của $(\Delta_m)$ và (P) :**

$$\left[m + \frac{2x-1}{2}\right]^2 + \left(-x^2 + 3x - \frac{1}{4}\right) = \left(-x^2 + 3x - \frac{1}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[m + \frac{2x-1}{2}\right]^2 = 0 \qquad (1)$$

Phương trình (1) luôn có nghiệm kép $x_o = \frac{1-2m}{2}$, $\forall m$.

Vậy : $(\Delta_m)$ luôn tiếp xúc với parabol cố định.

- (P) : $y = -x^2 + 3x - \frac{1}{4}$.

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

## 68. ĐH Y DƯỢC TPHCM

Cho hàm số : $y = \dfrac{ax^2 + (2a+1)x + a + 3}{x+2}$ với $a \neq -1$ (1)

1. Chứng minh tiệm cận xiên của đồ thị hàm số (1) luôn đi qua một điểm cố định.
2. Với giá trị nào của a thì đồ thị của (1) tiếp xúc với đường thẳng : $y = a + 4$ ?

### Giải

$$y = f(x) = \frac{ax^2 + (2a+1)x + a + 3}{x+2} \quad (C) \quad (a \neq -1)$$

1. Ta có : $f(x) = ax + 1 + \dfrac{a+1}{x+2}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a+1}{x+2} = 0$$

Vậy đồ thị có tiệm cận xiên : (d) : $y = ax + 1$.

Ta thấy (d) luôn đi qua M(0; 1) cố định.

2. (C) luôn tiếp xúc với (D) : (D) : $y = a + 4$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (D) :

$$\frac{ax^2 + (2a+1)x + a + 3}{x+2} = a + 4 \quad (x \neq -2)$$

$$\Leftrightarrow \quad ax^2 + (a-3)x - a - 5 = 0 \quad (2)$$

Đặt : $g(x) = ax^2 + (a-3)x - a - 5$

(D) tiếp xúc với (C) $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm kép khác $-2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ g(-2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-3)^2 + 4a(a+5) = 0 \\ 4a - 2(a-3) - a - 5 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a^2 + 14a + 9 = 0 \\ a + 1 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad a = -\frac{9}{5}$$

Vậy để (C) tiếp xúc với (D) ta phải có : $a = -\dfrac{9}{5}$.

## 69. ĐH NGOẠI THƯƠNG - KHỐI D

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số : $y = \dfrac{x+1}{x-2}$.
2. Tìm trên đồ thị hàm số điểm M sao cho tổng các khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ là nhỏ nhất.


www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

## Giải

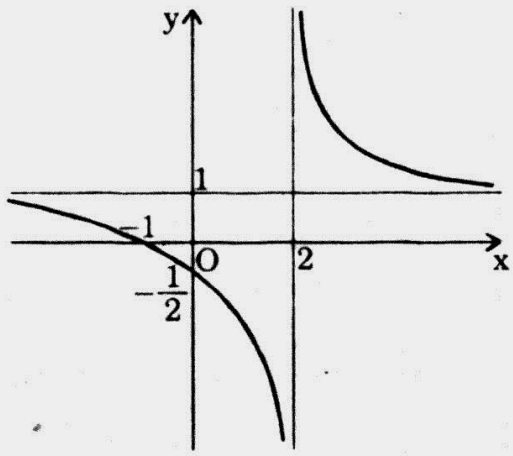
**1.** Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số : $y = f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$.

- Miền xác định : $D = R\backslash\{2\}$.
- $f'(x) = \dfrac{-3}{(x-2)^2}$.
- Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f' | | − | ‖ | − | |
| f | 1 | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | 1 |

- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$ : tiệm cận ngang : $y = 1$
- $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \infty$ : tiệm cận đứng : $x = 2$.
- Điểm đặc biệt : $x = 0 \Rightarrow y = -\dfrac{1}{2}$.

  $y = 0 \Rightarrow x = -1$.
- Đồ thị : hình bên.




**2.** Tìm trên đồ thị điểm m sao cho tổng các khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ là nhỏ nhất

$M(x; y) \in (H) \quad \Leftrightarrow \quad y = \dfrac{x+1}{x-2}$

Đặt : $S = d(M; Ox) + d(M; Oy) \Rightarrow \quad S = |y| + |x| = \left|\dfrac{x+1}{x-2}\right| + |x|$

Do : $M_0\left(0, \dfrac{1}{2}\right) \in (H)$

Ta có : $|x_0| + |y_0| = \dfrac{1}{2}$ Nên ta chỉ cần xét $-\dfrac{1}{2} \le x \le \dfrac{1}{2}$

*Trường hợp 1* : $0 \le x \le \dfrac{1}{2}$

$$S(x) = -\left(\frac{x+1}{x-2}\right) + x = \frac{x^2 - 3x - 1}{x-2}$$

$$[S(x)]' = \frac{x^2 - 4x + 7}{(x-2)^2} > 0.$$

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

Ta có :

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{2}$ |
|---|---|---|---|
| $[S(x)]'$ | | $+$ | |
| $S(x)$ | $\frac{1}{2}$ | $\nearrow$ | |

*Trường hợp 2* : $-\frac{1}{2} \le x \le 0$

$$S(x) = -\left(\frac{x+1}{x-2}\right) - x = \frac{-x^2 + x - 1}{x-2}$$

$$[S(x)]' = \frac{-x^2 + 4x - 1}{(x-2)^2}$$

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right], \quad [S(x)]' < 0$$

Ta có :

| $x$ | $-\frac{1}{2}$ | | $0$ |
|---|---|---|---|
| $[S(x)]'$ | | $-$ | |
| $S(x)$ | | $\searrow$ | $\frac{1}{2}$ |

**Vậy :** **S nhỏ nhất** $\Leftrightarrow$ $S = \frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$

**Điểm M cần tìm là** $M\left(0, -\frac{1}{2}\right)$.

# NĂM 1996

## 70. ĐH QUỐC GIA TPHCM – ĐH LUẬT

Cho hàm số : $y = x^4 - 2mx^2 + m^3 - m^2$ $(C_m)$.

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị và vẽ đồ thị hàm số khi $m = 1$.

**2.** Xác định m để đồ thị $(C_m)$ tiếp xúc với trục hoành tại hai điểm phân biệt.

### Giải

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m = 1$



www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

Khi m = 1 thì hàm số trở thành : $y = x^4 - 2x^2$

MXĐ : $D = R$

Đạo hàm : $y' = 4x^3 - 4x$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 ; x = \pm 1$

Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | |
| y | $+\infty$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $0$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $+\infty$ |

Điểm uốn : $y'' = 12x^2 - 4$

$y'' = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

Suy ra : $y = -\frac{5}{9}$

Có hai điểm uốn : $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{5}{9}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{5}{9}\right)$

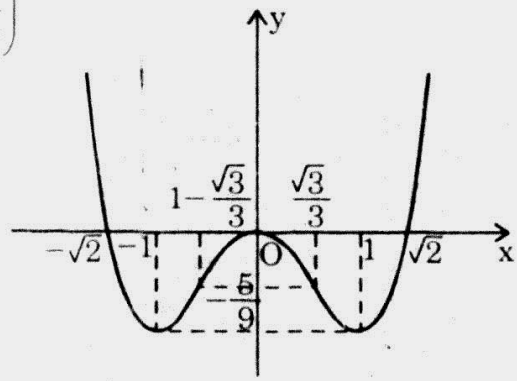
Điểm cực tiểu : $(-1; -1)$;

Điểm cực đại : $(1; -1)$

Điểm đặc biệt :

$y = 0 \Rightarrow x = 0, \quad x = \pm\sqrt{2}$

Đồ thị : hình bên.




**2.** Xác định m để $(C_m)$ tiếp xúc với trục hoành tại hai điểm phân biệt

Phương trình hoành độ giao điểm của $(C_m)$ và Ox :

$$x^4 - 2mx^2 + m^3 - m^2 = 0 \qquad (1)$$

Đặt : $t = x^2$ thì (1) trở thành : $\begin{cases} t^2 - 2mt + m^3 - m^2 = 0 \\ t \geq 0 \end{cases}$ (2)

Để $(C_m)$ tiếp xúc với Ox tại hai điểm phân biệt, ắt có và đủ là (2) có nghiệm kép dương, nghĩa là :

$$\begin{cases} m^2 - (m^4 - m^2) = 0 \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \text{ hay } m = 2 \\ t > 0 \end{cases}$$

Mà t = m (nghiệm kép) nên m > 0.

Vậy : khi m = 2 thì (2) có 1 nghiệm kép dương. Suy ra (1) có 2 nghiệm kép phân biệt khác nhau. Nghĩa là $(C_m)$ tiếp xúc với Ox tại hai điểm phân biệt A(−2; 0), B(2; 0).

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok-SPS

## 71. ĐH Y DƯỢC TPHCM

Cho hàm số : $y = x^3 - 3ax^2 + 4a^3$.

1. Tìm a để các điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị đối xứng qua đường thẳng y = x.
2. Tìm a để đường thẳng y = x cắt đồ thị tại 3 điểm phân biệt A, B, C với AB = BC.

### Giải

**1. Tìm a để điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị đối xứng với nhau qua đường thẳng y = x**

Ta có : MXĐ : $D = R$.

Đạo hàm : $y' = 3x^2 - 6ax$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hay $x = 2a$.

Điều kiện để hàm số có cực đại và cực tiểu là $a \neq 0$. Tọa độ điểm cực đại và cực tiểu :

$(x = 0; y = 4a^3)$ và $(x = 2a; y = 0)$ hoặc ngược lại.

Điều kiện để hai điểm này đối xứng qua đường thẳng y = x là :

$$4a^3 = 2a \Leftrightarrow a = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{(loại } a = 0\text{)}.$$

**2. Tìm a để đồ thị cắt đường thẳng y = x tại A, B, C với AB = BC**

- Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị và đường thẳng y = x là :

$$x^3 - 3ax^2 - x + 4a^3 = 0 \qquad (1)$$

Gọi $x_A$, $x_B$, $x_C$ là hoành độ của A, B, C thì $x_A$, $x_B$, $x_C$ là nghiệm của (1) và

$$x_A + x_C = 2x_B \text{ (AB = BC)} \qquad (2)$$

Mà theo định lí Viét, ta có : $x_A + x_B + x_C = 3a$

(2) và (3) cho : $3x_B = 3a \Leftrightarrow x_B = a$.

Thay vào (1) ta có : $2a^3 - a = 0 \Leftrightarrow a = 0$ hoặc $a = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

- Khi a = 0 thì (1) cho : $x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ x = -1,\ x = +1$.

Vậy : A, B, C lần lượt có hoành độ là −1; 0; 1.

- Khi $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ thì (1) cho : $x^3 - \frac{3\sqrt{2}}{2}x^2 - x + \sqrt{2} = 0$

$$\Leftrightarrow x_A = \frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{2}};\quad x_B = \frac{\sqrt{2}}{2};\quad x_C = \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$$



Facebook.com/TeacherSokPiseth www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

• Khi $a = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ thì (1) cho : $x^3 + \frac{3\sqrt{2}}{2}x^2 - x - \sqrt{2} = 0$

$$\Leftrightarrow \quad x_A = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \quad x_B = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad x_C = \frac{-1+\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$$

Vậy giá trị của a phải tìm là : $a = 0$ hay $a = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

## 72. ĐH NGOẠI THƯƠNG

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số : $y = \frac{x^2 + x + 2}{x - 1}$.

**2.** Tìm điểm A thuộc trục hoành sao cho qua A chỉ vẽ được duy nhất một tiếp tuyến với đồ thị ở phần 1.

### Giải

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của : $y = \frac{x^2 + x + 2}{x - 1} = x + 2 + \frac{4}{x - 1}$

• MXĐ : $D = R\backslash\{1\}$

• Đạo hàm : $y' = 1 - \frac{4}{(x-1)^2}$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ hay } x = 3.$$

• Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | 0 | − | ‖ | − | 0 | + | |
| y | $-\infty$ | ↗ | $-1$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | 7 | ↗ | $+\infty$ |

• Điểm cực đại : $x = -1$; $y = -1$

• Điểm cực tiểu : $x = 3$; $y = 7$

• Tiệm cận đứng :

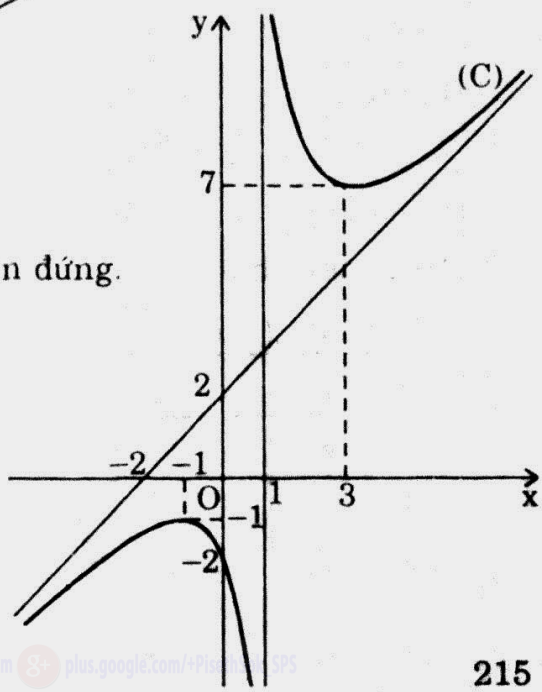
$\lim\limits_{x \to 1} y = \pm\infty$ nên $x = 1$ là đường tiệm cận đứng.

• Tiệm cận xiên :

$y = x + 2 + \frac{4}{x - 1}$ có $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4}{x - 1} = 0$

nên $y = x + 2$ là đường tiệm cận xiên.

• Đồ thị : (hình vẽ).




www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok SPS

**2.** Tìm điểm A trên x'Ox

Gọi a là hoành độ của A trên x'Ox. Tọa độ của A(a; 0).

Gọi k là hệ số góc của đường thẳng (d) qua A.

Phương trình của (d) : $y = kx - ka$.

Phương trình hoành độ của (d) và (C), đồ thị ở câu 1 :

$$\frac{x^2 + x + 2}{x - 1} = kx - ka \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (1 - k)x^2 + (1 + ka + k)x + 2 - ka = 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \qquad (1)$$

(d) tiếp xúc với (C) $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm số kép :

$$\Leftrightarrow \quad (1 + ka + k)^2 - 4(1 - k)(2 - ka) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (a - 1)^2k^2 + 2(3a + 5)k - 7 = 0 \qquad (2)$$

Điều kiện : (2) có 1 nghiệm duy nhất theo k. Có 2 trường hợp :

**i)** (2) có 1 nghiệm đơn $\Leftrightarrow$ $(a - 1)^2 = 0$ $\Leftrightarrow$ $a = 1$.

**ii)** (2) có 1 nghiệm kép theo k $\Leftrightarrow$ $(3a + 5)^2 + 7(a - 1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow$ vô nghiệm.

Vậy, khi a = 1 thì qua A, ta chỉ vẽ được một tiếp tuyến cho (C).

Hệ số góc của tiếp tuyến này là : $k = \frac{7}{16}$.

## 73. ĐH ĐẠI CƯƠNG

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số : $y = x^3 - 6x^2 + 9x$.

**2.** Tìm tất cả các đường thẳng đi qua điểm A(4; 4) và cắt (C) tại ba điểm phân biệt.

### Giải

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số : $y = x^3 - 6x^2 + 9x$

MXĐ : $D = R$

Đạo hàm : $y' = 3x^2 - 12x + 9$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hay $x = 3$

Điểm uốn : $y'' = 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2; y = 2$.

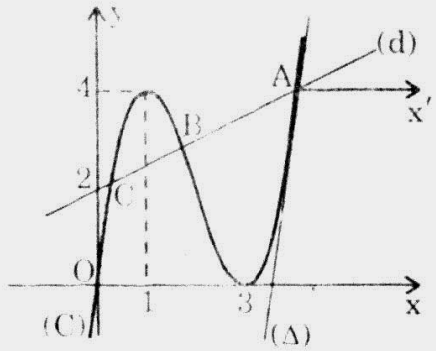
Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | 1 | | 2 | | 3 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y'' | | − | | − | 0 | + | | + | |
| y' | | + | 0 | − | | − | 0 | + | |
| y | $-\infty$ | ↗ | 4 | ↘ | 2 | ↘ | 0 | ↗ | $+\infty$ |



www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

Đồ thị (C) :




**2.** Đường thẳng qua A(4; 4) cắt (C)

*Cách 1* : Dùng đồ thị (C).

Đường thẳng (d) qua A(4; 4) ∈ (C) cắt đồ thị tại ba điểm phân biệt khi (d) nằm trong góc x'Ay' tạo bởi Ax' // Ox và Ay' // Oy, không trùng với (Δ) là tiếp tuyến của (C) tại A.

Hệ số góc của tiếp tuyến (Δ) là : $y'(x_A) = 9$.

Vậy (d) có hệ số góc thuộc khoảng $(0; +\infty) \setminus \{9\}$.

*Cách 2* : Gọi k là hệ số góc của đường thẳng (d) qua A(4; 4).

Phương trình của (d) : $y = k(x - 4) + 4$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) :

$$x^3 - 6x^2 + 9x = kx - 4k + 4$$

$$\Leftrightarrow \quad x^3 - 6x^2 + (9 - k)x + 4k - 4 = 0 \qquad (*)$$

Vì A(4; 4) ∈ (C) nên (*) có một nghiệm bằng 4.

Suy ra : $(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 4 & (1) \\ x^2 - 2x + 1 - k = 0 & (2) \end{array}\right.$

Để cho (*) có 3 nghiệm phân biệt, ta phải có :

**i)** x = 4 không là nghiệm của (2) $\Leftrightarrow 16 - 8 + 1 - k \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 9$

**ii)** (2) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 1 - (1 - k) > 0$

$\Leftrightarrow k > 0$

Tóm lại, (d) cắt (C) tại 3 điểm phân biệt khi (d) qua A có hệ số thỏa $k > 0$ và $k \neq 9$.

## 74. CĐ SƯ PHẠM TPHCM

Cho hàm số : $y = \dfrac{2x + 1}{x + 2}$.

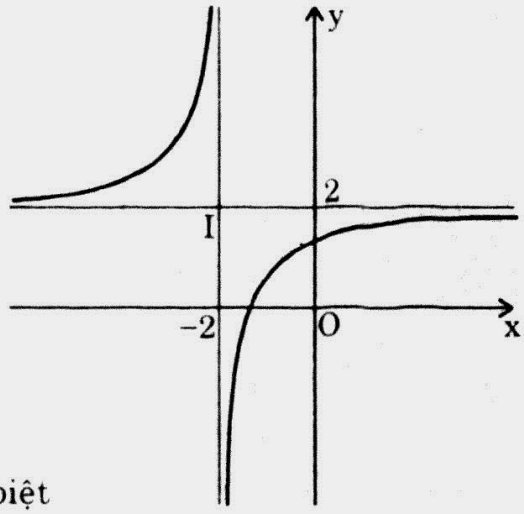
**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số đó.

**2.** Chứng minh rằng đường thẳng $y = -x + m$ luôn cắt đồ thị hàm số tại 2 điểm phân biệt.

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

## Giải

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị : $y = \dfrac{2x+1}{x+2}$




- MXĐ : $D = R\backslash\{-2\}$
- Đạo hàm $y' = \dfrac{3}{(x+2)^2} > 0$

  $\Rightarrow$ y luôn luôn tăng
- Tiệm cận đứng : $x = -2$;

  tiệm cận ngang : $y = 2$.
- Đồ thị là một hyperbol vuông góc có $I(-2; 2)$ là tâm đối xứng.

**2.** Đường thẳng cắt đồ thị tại 2 điểm phân biệt

Phương trình hoành độ giao điểm :

$$\frac{2x+1}{x+2} = -x + m \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ x^2 + (4-m)x + 1 - 2m = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

(2) có : $\Delta = (4-m)^2 - 4(1-2m) = 12 + m^2 > 0; \forall m \in R$.

Vậy, (2) có 2 nghiệm phân biệt, $\forall m \in R$ và 2 nghiệm đó đều khác $-2$, $\forall m \in R$ [vì $x^2 + (4-m)x + 1 - 2m \neq 0$ khi $x = -2$].

Tóm lại, đường thẳng $y = -x + m$ luôn luôn cắt đồ thị của $y = \dfrac{2x+1}{x+2}$ tại hai điểm phân biệt, $\forall m \in R$.

## 75. CĐ HẢI QUAN

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số : $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

**2.** Tìm a để đồ thị của hàm số f(x) cắt đồ thị hàm số :

$g(x) = a(3a^2 - 3ax + a)$ tại ba điểm phân biệt với hoành độ dương.

## Giải

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số: $y = x^3 - 3x + 1$.

MXĐ : $D = R$

Đạo hàm : $y' = 3x^2 - 3$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Điểm uốn : $y'' = 6x = 0 \Rightarrow x = 0; \quad y = 1$

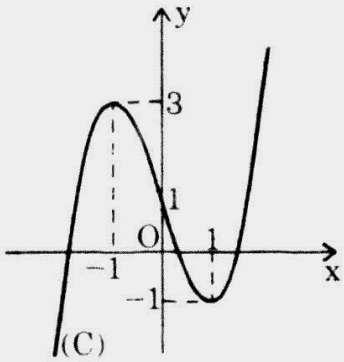


www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y'' | | $-$ | \| | | \| | $+$ | \| | $+$ | |
| y' | | $+$ | $0$ | $-$ | \| | $-$ | $0$ | $+$ | |
| y | $-\infty$ | ↗ | $3$ | ↘ | $1$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $+\infty$ |

Đồ thị :




**2.** Tìm a để f(x) và g(x) có đồ thị cắt nhau tại ba điểm có hoành độ dương

Phương trình hoành độ giao điểm :

$$x^3 - 3x + 1 = a(3x^2 - 3ax + a)$$

$$\Leftrightarrow \quad x^3 - 3ax^2 - 3(1 - a^2)x + 1 - a^2 = 0 \qquad (1)$$

Đặt : $\quad y = x^3 - 3ax^2 - 3(1 - a^2)x + 1 - a^2$

(1) có 3 nghiệm phân biệt dương khi đồ thị $(C_a)$ của hàm số này cắt tia Ox tại ba điểm phân biệt. Các điều kiện là :

**i)** $(C_a)$ cắt tia đối của tia Oy.

**ii)** $(C_a)$ có $y_{max} > 0$ và có $y_{min} < 0$.

Do đó :

**i)** $(C_a)$ cắt tia Oy tại $A(0; 1 - a^2)$ nên :

$$1 - a^2 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad a < -1 \quad \text{hay} \quad 1 < a \qquad (2)$$

**ii)**

$$y' = 3x^2 - 6ax - 3(1 - a^2)$$

$$\Delta' = 9a^2 + 9(1 - a^2) = 9$$

$$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad x = a + 1 \quad \text{hay} \quad x = a - 1.$$

Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | $a - 1$ | | $a + 1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| y | $-\infty$ | ↗ | $y_{max}$ | ↘ | $y_{min}$ | ↗ | $+\infty$ |

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

- $y_{max} = (a^2 - 3)(a - 1) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\sqrt{3} < a < 1$ hay $a > \sqrt{3}$ (3)
- $y_{min} = (a^2 - 2a - 1)(a + 1) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad a < -1$ hay $1 - \sqrt{2} < a < 1 + \sqrt{2}$ (4)

(2), (3), (4) cho :

| a | | $-\sqrt{3}$ | $-1$ | $1-\sqrt{2}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | $1+\sqrt{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (2) | | | | | | | |
| (3) | | | | | | | |
| (4) | | | | | | | |
| KQ | | | | | | | |

Vậy : $-\sqrt{3} < a < -1$ hay $\sqrt{3} < a < 1 + \sqrt{2}$.

## 76. ĐH QUỐC GIA TPHCM

Cho hàm số : $y = \dfrac{2x^2 + (1 - m)x + 1 + m}{-x + m}$ (1)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi m = 1.
2. Xác định m để hàm số (1) nghịch biến trong khoảng $2 < x < +\infty$.
3. Chứng minh rằng với mọi $m \neq -1$, các đường cong (1) đều tiếp xúc với một đường thẳng cố định tại một điểm cố định.

### Giải

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị khi m = 1

Khi m = 1 thì : $y = \dfrac{2x^2 + (1 - m)x + 1 + m}{-x + m}$ (1)

trở thành : $y = \dfrac{2x^2 + 2}{-x + 1} = -2x - 2 + \dfrac{4}{-x + 1}$

MXĐ : $D = R\backslash\{1\}$

Đạo hàm : $y' = -2 + \dfrac{4}{(-x + 1)^2}$

$y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \pm \sqrt{2}$

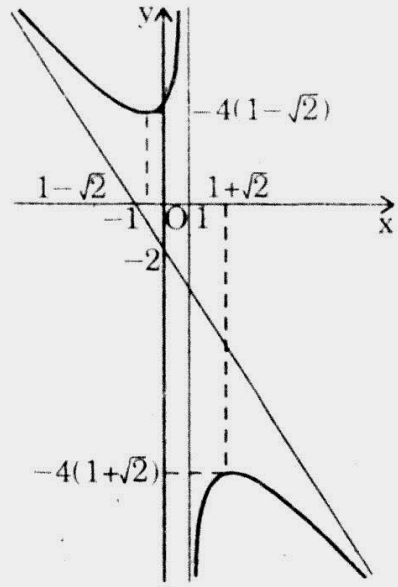
Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | $1-\sqrt{2}$ | | $1$ | | $1+\sqrt{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | $-$ | 0 | $+$ | ‖ | $+$ | 0 | $-$ | |
| y | $+\infty$ | ↘ | $-4(1-\sqrt{2})$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $-4(1+\sqrt{2})$ | ↘ | $-\infty$ |

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

Đồ thị :

- Tiệm cận đứng : $x = 1$
- Tiệm cận xiên : $y = -2x - 2$




**2.** Xác định m để hàm số nghịch biến trong khoảng $2 < x < +\infty$.

Các điều kiện :

**i)** $x \neq m$

**ii)** Đạo hàm $y' < 0$, $\forall x \in R \setminus \{m\}$ hoặc $y' = 0$ có 2 nghiệm $x_1$, $x_2$ (giả sử $x_1 < x_2$) với $x_1 < x_2 < 2$. Khi đó, $y' < 0$ với $2 < x$.

Ta có : $$y' = \frac{-2x^2 + 4mx - m^2 + 2m + 1}{(-x+m)^2}$$

Suy ra :

**i)** $x \neq m$ nên : $-2(m)^2 + 4m(m) - m^2 + 2m + 1 \neq 0$

$\Leftrightarrow \quad m^2 + 2m + 1 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \neq -1$

**ii)** $y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2x^2 + 4mx - m^2 + 2m + 1 = 0$

$\Delta' = 4m^2 + 2(-m^2 + 2m + 1) = 2m^2 + 4m + 2 = 2(m+1)^2$

$\Delta' > 0 \quad \forall m \neq -1.$

**Gọi $x_1$, $x_2$ là 2 nghiệm của $y' = 0$. Ta phải có :**

$$x_1 < x_2 < 2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} af(2) > 0 \\ \dfrac{S}{2} - 2 < 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -2(-8 + 8m - m^2 + 2m + 1) > 0 \\ 2m - 2 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -m^2 + 10m - 7 < 0 \\ m < 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad m < 5 - 3\sqrt{2}$$

Tóm lại : khi $m < 5 - 3\sqrt{2}$ và $m \neq -1$ thì hàm số nghịch biến trong $(2; +\infty)$.

**3.** Chứng minh các đường cong (1) luôn luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định tại một điểm cố định

Ta làm hai việc :

**i)** Đồ thị của (1) đi qua một điểm cố định.

**ii)** Đạo hàm của (1) tại điểm cố định đó là 1 hằng số.

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

Ta có :

**i)** (1) $\Leftrightarrow \begin{cases}(x + y - 1)m = 2x^2 + x + 1 - xy \\ x \neq m\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x + y - 1 = 0 \\ 2x^2 + x + 1 + xy = 0 \\ x \neq m\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = -1 \\ y = 2 \\ m \neq -1\end{cases}$

Vậy : đồ thị của (1) luôn luôn đi qua A(–1; 2) với $\forall m \neq -1$.

**ii)** Khi x = –1 thì : $y' = \dfrac{-2x^2 + 4mx - m^2 + 2m + 1}{(-x + m)^2}$

trở thành : $y' = \dfrac{-2 - 4m - m^2 + 2m + 1}{(1 + m)^2} = -1 \quad (m \neq -1)$

Vậy : $y' = -1$ tại A.

Tóm lại, các đồ thị của (1) luôn luôn tiếp xúc với đường thẳng qua A(–1; 2) có hệ số góc $y' = -1$. Đường thẳng này cố định và có phương trình :

$$y = -x + 1.$$

## 77. ĐH QUỐC GIA TPHCM

Cho hàm số : $y = x^3 + mx^2 + 1 \quad (C_m)$.

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi m = –3.

**2.** Tìm m để $(C_m)$ cắt đường thẳng y = –x + 1 tại 3 điểm phân biệt A(0; 1); B; C sao cho các tiếp tuyến với $(C_m)$ tại B và C vuông góc với nhau.

### Giải

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị khi m = –3

Khi m = –3 thì hàm số $y = x^3 + mx^2 + 1$ trở thành : $y = x^3 - 3x^2 + 1$

MXĐ : D = R

Đạo hàm : $y' = 3x^2 - 6x$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hay $x = 2$

Điểm uốn : $y'' = 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1; y = -1$.

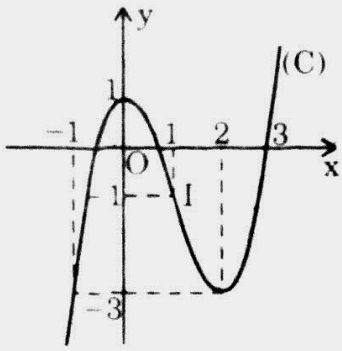
Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | 0 | | 1 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y'' | | – | \| | – | 0 | + | \| | + | |
| y' | | + | 0 | – | \| | – | 0 | + | |
| y | $-\infty$ | ↗ | 1 | ↘ | –1 | ↘ | –3 | ↗ | $+\infty$ |



www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

Đồ thị :




**2.** Tìm m để $(C_m)$ cắt đường thẳng (D) : $y = -x + 1$

Phương trình hoành độ giao điểm của $(C_m)$ và (D) :

$$x^3 + mx^2 + 1 = -x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x(x^2 + mx + 1) = 0 \qquad (1)$$

$(C_m)$ cắt (D) tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có 3 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \text{ có 3 nghiệm phân biệt.} \\ x^2 + mx + 1 = 0 \qquad (2) \end{array}\right.$$

Vì (2) không nhận $x = 0$ làm nghiệm

do đó, ta chỉ cần (2) có $\Delta > 0 \quad \Leftrightarrow \quad m < -2$ hay $m > 2$.

Theo đề bài, A(0; 1) nên B, C có hoành độ là nghiệm của (2).

Hệ số góc của tiếp tuyến của $(C_m)$ tại B : $y'(x_B)$.

Hệ số góc của tiếp tuyến của $(C_m)$ tại C : $y'(x_C)$.

Hai tiếp tuyến này vuông góc với nhau

$$\Leftrightarrow \quad y'(x_B).\ y'(x_C) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad (3x_B^2 + 2mx_B)(3x_C^2 + 2mx_C) = -1$$

$$\Leftrightarrow \quad x_Bx_C[9x_Bx_C + 6m(x_B + x_C) + 4m^2] = -1$$

$$\Leftrightarrow \quad 9 + 6m(-m) + 4m^2 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad 2m^2 = 10 \quad \Leftrightarrow \quad m = \pm\sqrt{5}$$

Hai giá trị này của m thỏa : $m < -2$ hay $m > 2$ nên được nhận.

(Nhớ : $y' = 3x^2 + 2mx$; $\quad x_B.x_C = 1$; $\quad x_B + x_C = = -m$).

Vậy : khi $m = \pm\sqrt{5}$ thì hai tiếp tuyến của $(C_m)$ tại B và C vuông góc với nhau.

# NĂM 1995

## 78. ĐH TỔNG HỢP TPHCM

Cho hàm số : $f(x) = x^3 - 2x - (m - 1)x + m$.

**1.** Tìm m để đồ thị $y = f(x)$ tiếp xúc với trục hoành Ox.

**2.** Tìm m để $f(x) \geq \dfrac{1}{x}$ với mọi $x \geq 2$.

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

## Giải

Cho hàm số $f(x) = x^3 - 2x^2 - (m-1)x + m \qquad (C_m)$

**1.** Tìm m để đồ thị $y = f(x)$ tiếp xúc với trục hoành Ox

Phương trình hoành độ giao điểm của $(C_m)$ và Ox :

$$x^3 - 2x^2 - (m-1)x + m = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)(x^2 - x - m) = 0 \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2 - x - m = 0 \end{array}\right. \qquad (2)$$

$(C_m)$ tiếp xúc với Ox $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \text{Hoặc (2) có nghiệm } x = 1 \\ \text{Hoặc (2) có nghiệm kép} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} 1 - 1 - m = 0 \\ \Delta = 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = -\dfrac{1}{4} \end{array}\right..$$

**2.** Tìm m để $f(x) \geq \dfrac{1}{x}$ với mọi $x \geq 2$

Ta có : $\quad f(x) \geq \dfrac{1}{x} \qquad (1)$

$$\Leftrightarrow \quad x^3 - 2x^2 - (m-1)x + m \geq \frac{1}{x} \qquad (x \geq 2)$$

$$\Leftrightarrow \quad x^4 - 2x^3 + x^2 - 1 \geq m(x^2 - x)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x^4 - 2x^3 + x^2 - 1}{x^2 - x} \geq m \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x^2 - x)^2 - 1}{x^2 - x} \geq m$$

**Đặt :** $\quad t = x^2 - x.$

**Ta có :** $\quad x \geq 2 \Leftrightarrow \quad t \geq 2.$

$$(1) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{t^2 - 1}{t} \geq m \qquad (t \geq 2)$$

**Đặt :** $\quad g(t) = \dfrac{t^2 - 1}{t} \qquad$ **Ta có :** $\quad g'(t) = \dfrac{t^2 + 1}{t^2} > 0 \qquad \forall t \geq 2$

| $t$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $g'(t)$ | $+$ | |
| $g(t)$ | $\dfrac{3}{2}$ ↗ | |

Vậy ta phải có $m \geq \dfrac{3}{2}$.



www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

## 79. ĐH KINH TẾ

Cho hàm số : $y = \dfrac{x^2 + 2x\cos\alpha + 1}{x + 2\sin\alpha}$.

1. Xác định tiệm cận xiên và tâm đối xứng của đồ thị.
2. Tìm $\alpha$ để hàm số có điểm cực đại và cực tiểu.
3. Tìm $\alpha$ để từ gốc tọa độ có thể kẻ đến đồ thị 2 tiếp tuyến phân biệt. Khi đó gọi $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ là tọa độ các tiếp điểm, chứng tỏ rằng :

$$x_1x_2 + y_1y_2 = 0.$$

### Giải

$$y = f(x) = \frac{x^2 + 2x\cos\alpha + 1}{x + 2\sin\alpha}$$

1. Xác định tiệm cận xiên và tâm đối xứng của đồ thị

Chia đa thức ta được : $y = x + 2(\cos\alpha - \sin\alpha) + \dfrac{1 - 4\sin\alpha(\cos\alpha - \sin\alpha)}{x + 2\sin\alpha}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1 - 4\sin\alpha(\cos\alpha - \sin\alpha)}{x + 2\sin\alpha} = 0$$

Vậy đồ thị có tiệm cận xiên là : $y = x + 2(\cos\alpha - \sin\alpha)$

Tâm đối xứng $I(x_1; y_1)$ là giao điểm của hai tiệm cận nên ta có :

$$\begin{cases} x_1 = -2\sin a \\ y_1 = -2\sin a + (\cos a - \sin a) = 2\cos a - 4\sin a. \end{cases}$$

2. Tìm $\alpha$ để hàm số có cực đại và cực tiểu

Ta có : $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x\sin\alpha + 4\sin\alpha.\cos\alpha - 1}{(x + 2\sin\alpha)^2}$

Hàm số có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow \Delta' > 0$

$\Leftrightarrow 4\sin^2\alpha - 4\sin\alpha.\cos\alpha + 1 > 0$

$\Leftrightarrow (2\sin\alpha - \cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha > 0$ (1)

(1) đúng $\forall\alpha$. Vậy với mọi $\alpha$ hàm số luôn có cực đại và cực tiểu.

3. Tìm $\alpha$ để từ gốc tọa độ có thể kẻ đến đồ thị 2 tiếp tuyến phân biệt.

Gọi k là hệ số góc của tiếp tuyến qua O ta có phương trình tiếp tuyến là $(\Delta) : y = kx$

Phương trình hoành độ giao điểm của $(\Delta)$ và (C) : $\dfrac{x^2 + 2x\cos\alpha + 1}{x + 2\sin\alpha} = kx$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x\cos\alpha + 1 = kx^2 + 2kx\sin\alpha$

$\Leftrightarrow (1 - k)x^2 + 2(\cos\alpha - k\sin\alpha)x + 1 = 0$

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

Điều kiện $k \neq 1$ và $\Delta' = 0$

$$\Delta' = 0 \Leftrightarrow (\cos\alpha - k\sin\alpha)^2 - (1 - k) = 0$$

$$\Leftrightarrow k^2\sin^2\alpha + (1 - 2\sin\alpha.\cos\alpha)k + \cos^2\alpha - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow k^2\sin^2\alpha + (1 - 2\sin2\alpha)k - \sin^2\alpha = 0$$

Để từ gốc tọa độ có thể kẻ đến đồ thị 2 tiếp tuyến phân biệt ta phải có (1) có 2 nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow \sin\alpha \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq k\pi, \quad k \in Z$$

Gọi $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$ là 2 tiếp tuyến, ta có :

$$y_1 = k_1x_1 \; ; \qquad y_2 = k_2x_2.$$

Do $k_1$ và $k_2$ là nghiệm của (1) nên ta có :

$$k_1k_2 = \frac{c}{a} = -\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = -1.$$

Suy ra : $x_1x_2 + y_1y_2 = x_1x_2 + k_1x_1 + k_2k_2 = x_1x_2(1 + k_1k_2)$

$$= x_1x_2(1 - 1) = 0.$$

## 80. ĐH NGOẠI THƯƠNG

Cho hàm số : $y = \dfrac{mx^2 + 3mx + 2m + 1}{x + 2}$.

1. Chứng minh rằng tiệm cận xiên của đồ thị của hàm số đã cho luôn đi qua một điểm cố định với mọi m.
2. Với giá trị nào của m thì đồ thị của hàm số tiếp xúc với đường thẳng $y = m$.
3. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = -1$.

### Giải

Cho hàm số : $y = f(x) = \dfrac{mx^2 + 3mx + 2m + 1}{x + 2}$ $(C_m)$

1. Chứng minh rằng tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho luôn đi qua một điểm cố định với mọi m

Ta có : $y = mx + m + \dfrac{1}{x + 2}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x + 2} = 0$$

Vậy đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là : $(\Delta_m) : y = mx + m$

Gọi $M_o(x_o; y_o)$ là điểm cố định, ta có : $M_o \in \Delta_m \quad \forall m$


www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

$\Leftrightarrow \quad y_o = mx_o + m \quad \forall m \quad \Leftrightarrow \quad m(x_o + 1) - y_o = 0 \quad \forall m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_o + 1 = 0 \\ y_o = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_o = -1 \\ y_o = 0 \end{cases}$$

Vậy $(\Delta_m)$ luôn đi qua điểm $M_o(-1; 0)$ với mọi m.

**2.** Với giá trị nào của m thì đồ thị của hàm số tiếp xúc với đường thẳng $y = m$

Phương trình hoành độ giao điểm của $(C_m)$ và đường thẳng $y = m$.

$$\frac{mx^2 + 3mx + 2m + 1}{x + 2} = m \quad (x \neq -2)$$

$$\Leftrightarrow \quad mx^2 + 3mx + 2m + 1 = mx + 2m \quad \Leftrightarrow \quad mx^2 + 2mx + 1 = 0 \quad (1)$$

$(C_m)$ tiếp xúc với $y = m$ $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm kép khác $-2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = 0 \\ 4m - 4m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2 - m = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad m = 1$$

Vậy để $(C_m)$ tiếp xúc với $y = m$ ta phải có $m = 1$.

**3.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = -1$

$$y = f(x) = \frac{-x^2 - 3x - 1}{x + 2}$$

MXĐ : $D = R\backslash\{-2\}$

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 4x - 5}{(x + 2)^2}$$

$$\Delta' = 4 - 5 = -1 < 0 \Rightarrow \quad f'(x) < 0 \quad \forall x \in D$$

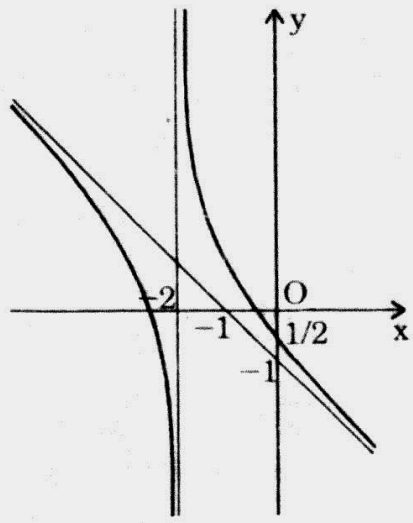
Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | $-2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f' | | $-$ | ‖ | $-$ | |
| f | $+\infty$ ↘ | $-\infty$ | ‖ | $+\infty$ ↘ | $-\infty$ |

$\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \infty \Rightarrow$ tiệm cận đứng $x = -2$.

$$y = -x - 1 + \frac{1}{x + 2}$$

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x + 2} = 0 \Rightarrow$ tiệm cận xiên $y = -x - 1$.




Đồ thị : hình bên.

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

## 81. ĐH TÀI CHÍNH – KẾ TOÁN

Cho hàm số : $y = \dfrac{x^2 - 3x + 4}{2x - 2}$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2. Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận, M là một điểm tùy ý thuộc (C). Tiếp tuyến với (C) tại M cắt tiệm cận đứng và tiệm cận xiên lần lượt tại A và B. Chứng tỏ rằng M là trung điểm của đoạn AB và diện tích tam giác IAB không phụ thuộc vào M.
3. Tìm trên (C) hai điểm đối xứng nhau qua đường thẳng y = x.

### Giải

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số

MXĐ : D = R

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 4x - 2}{(2x - 2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \pm \sqrt{2}$$

Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | $1-\sqrt{2}$ | | 1 | | $1+\sqrt{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f ' | | + | 0 | − | ‖ | − | 0 | + | |
| f | $-\infty$ | ↗ | CĐ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | CT | ↗ | $+\infty$ |

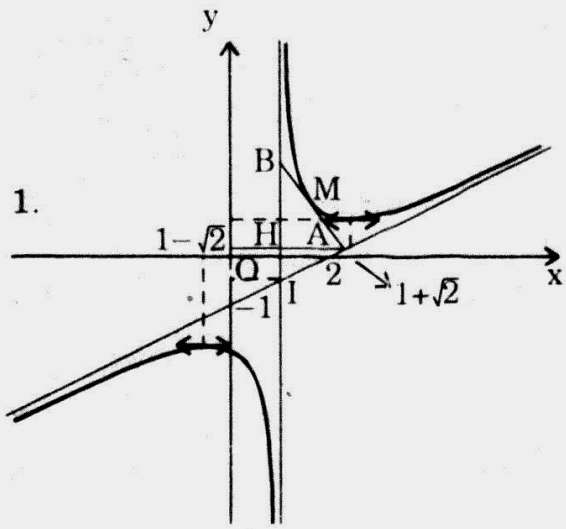
CĐ : $f(1 - \sqrt{2}) = \dfrac{-1 - 2\sqrt{2}}{2}$

$f(1 + \sqrt{2}) = \dfrac{-1 + 2\sqrt{2}}{2}$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \infty$ : tiệm cận đứng x = 1.

$y = \dfrac{1}{2}x - 1 + \dfrac{2}{2x - 2}$

$\Rightarrow y = \dfrac{1}{2}x - 1$ : tiệm cận xiên.




Đồ thị : hình bên.

2. $M(x_o; y_o) \in (C)$

Phương trình tiếp tuyến tại M : (d) : $y = y_o = f'(x_o)(x - x_o)$

(d) cắt tiệm cận đứng tại B, suy ra $x_B = 1$.

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

Phương trình hoành độ giao điểm của tiệm cận xiên và (d) :

$$\frac{1}{2}x - 1 = y_o + f'(x_o)(x - x_o)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}x - 1 = \frac{x_o^2 - 3x_o + 4}{2x_o - 2} + \frac{2x_o^2 - 4x_o - 2}{(2x_o - 2)^2}(x - x_o)$$

$$x = 2x_o - 1$$

Vậy : $x_A = 2x_o - 1$

Suy ra : $\dfrac{x_A + x_B}{2} = x_o$

Vậy M là trung điểm của AB.

Ta có : $S = S_{ABI} = \dfrac{1}{2}BI.HA$ (1)

$$S = \frac{1}{2}[(y_B - y_I)(x_A - x_B)]$$

Mà : $x_A = 2x_o - 1, \quad x_B = 1, \quad y_I = -\dfrac{1}{2}$

và : $y_B = \dfrac{x_o^2 - 3x_o + 4}{2x_o - 2} + \dfrac{2x_o^2 - 4x_o - 2}{(2x_o - 2)^2}(1 - x_o)$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x_o^2 - 3x_o + 4 - x_o^2 + 2x_o + 1}{2x_o - 2} \quad \Leftrightarrow \quad y_B = \frac{5 - x_o}{2x_o - 2}$$

Do đó : (1) $\Leftrightarrow \quad S = \dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{5 - x_o}{2x_o - 2} + \dfrac{1}{2}\right)(2x_o - 1 - 1)\right] = 2$ đvdt.

Vậy diện tích tam giác IAB không phụ thuộc vào M.

**3.** Tiệm cận (C) hai điểm đối xứng nhau qua đường thẳng (a) : y = x.

Xét đường thẳng Δ vuông góc với a, ta có Δ : y = − x + m

Phương trình hoành độ giao điểm của Δ và (C) :

$$\frac{x^2 - 3x + 4}{2x - 2} = -x + m \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 3x + 4 = -2x^2 + 3mx + 2x - 2m$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x^2 - (5 + 2m)x + 2m + 4 = 0 \qquad (1)$$

Giả sử Δ cắt (C) tại $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$.

Gọi M là trung điểm của $M_1M_2$ ta có : $M \begin{cases} x_M = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{5 + 2m}{6} \\ y_M = -x_M + m = \dfrac{4m - 5}{6} \end{cases}$



www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PjsethSok_SPS

$M_1$ và $M_2$ đối xứng nhau qua (d).

$\Leftrightarrow \quad M \in d \quad \Leftrightarrow \quad y_M = x_M \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{5+2m}{6} = \dfrac{4m-5}{6} \quad \Leftrightarrow \quad m = 5$

Thay vào (1), ta có : $3x^2 - 15x + 14 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \dfrac{15 \pm \sqrt{57}}{6}$

Vậy 2 điểm trên (C) đối xứng nhau qua y = x là :

$$M_1\left(\frac{15+\sqrt{57}}{6}, \frac{15-\sqrt{57}}{6}\right); \qquad M_2\left(\frac{15-\sqrt{57}}{6}, \frac{15+\sqrt{57}}{6}\right).$$

## 82. ĐH SƯ PHẠM TPHCM

Cho hàm số : $y = \dfrac{-x^2 + x + a}{x + a}$ trong đó a là tham số.

1. Xác định a để đồ thị của hàm số có tiệm cận xiên đi qua điểm A(2; 0).
2. Xác định tất cả các giá trị của a để đồ thị của hàm số cắt đường thẳng y = x – 1 tại hai điểm phân biệt. Khi đó gọi $y_1$, $y_2$ là tung độ của hai giao điểm, hãy tìm mối quan hệ giữa $y_1$, $y_2$ không phụ thuộc a.

### Giải

Cho hàm số : $y = \dfrac{-x^2 + x + a}{x + a}$

1. Xác định a để đồ thị của hàm số có tiệm cận xiên đi qua điểm A(2; 0)

Ta có : $y = -x + a + 1 - \dfrac{a^2}{x + a}$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-a^2}{x + a} = 0 \quad \Rightarrow$ hàm số có tiệm cận xiên.

$(\Delta) : \; y = -x + a + 1$

$A \in (\Delta) \quad \Leftrightarrow \quad 0 = -2 + a + 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = 1$

Khi đó ta có : $y = f(x) = \dfrac{-x^2 + x + 1}{x + 1}$

MXĐ : $D = R \backslash \{-1\}$

$f'(x) = \dfrac{-x^2 - 2x}{(x+1)^2}$

$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right.$



www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

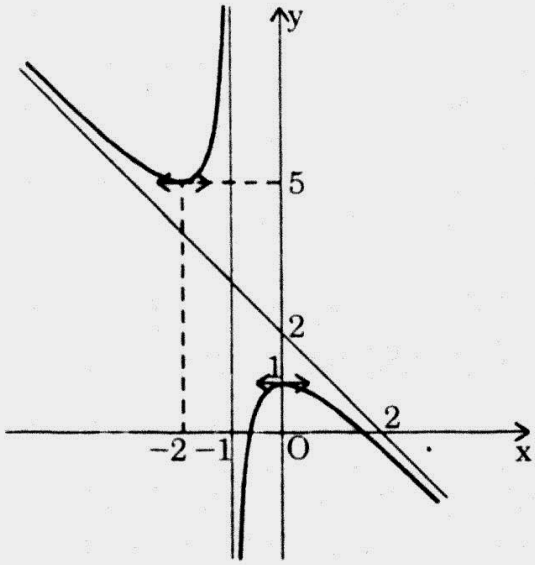
Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f' | | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| f | $+\infty$ | ↘ | $5$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $1$ | ↘ | $-\infty$ |

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \infty$ : tiệm cận đứng $x = -1$.

Đồ thị có tiệm cận xiên $y = -x + 2$.

Đồ thị :




**2.** Xác định tất cả các giá trị của a để đồ thị của hàm số cắt đường thẳng $y = x - 1$ tại hai điểm phân biệt

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d).

$$\frac{-x^2 + x + a}{x + a} = x - 1 \qquad (x \neq -a)$$

$$\Leftrightarrow \quad -x^2 + x + a = x^2 + ax - a - x$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x^2 + (a - 2)x - 2a = 0 \qquad (1)$$

$$\Delta = (a - 2)^2 + 16a = a^2 + 12a + 4$$

(C) cắt (d) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm khác $-a$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a < -6 - 4\sqrt{2} \\ a > -6 + 4\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Gọi $x_1$, $x_2$ là 2 nghiệm của (1) theo Viét ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2 - a}{2} & (1) \\ x_1x_2 = -a & (2) \end{cases}$

$$(2) \quad \Rightarrow \quad a = -x_1x_2.$$

$$(1) \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 = \frac{2 + x_1x_2}{2}$$

$$2(x_1 + x_2) = 2 + x_1x_2 \qquad (3)$$

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

Ta lại có : $\begin{cases} y_1 = x_1 - 1 \\ y_2 = x_2 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 + 1 \\ x_2 = y_2 + 1 \end{cases}$

(3) $\Rightarrow$ $2(y_1 + y_2 + 2) = 2 + (y_1 + 1)(y_2 + 1)$

$\Rightarrow$ $2(y_1 + y_2) + 4 = 2 + y_1 y_2 + y_1 + y_2 + 1$

$\Rightarrow$ $y_1 y_2 - (y_1 + y_2) - 1 = 0.$

## 83. ĐH KIẾN TRÚC

Cho tham số thực m và $(C_m)$ là đồ thị của hàm số :

$$y = -x^3 + (m - |m|)x^2 + 4x - 4(m - |m|).$$

**1.** Tìm các điểm cố định của họ đường cong $(C_m)$.

**2.** Tìm m sao cho $(C_m)$ tiếp xúc với trục hoành.

**3.** Tìm quỹ tích điểm uốn $I_m$ của $(C_m)$ khi m thay đổi.

### Giải

Cho tham số thực m và $(C_m)$ là đồ thị của hàm số :

$$y = -x^3 + (m - |m|)x^2 + 4x - 4(m - |m|)$$

**1.** Tìm các điểm cố định của họ đường cong $(C_m)$

$M(x; y) \in (C_m)$ $\forall m$ $\Leftrightarrow$ $y = -x^3 + (m - |m|)x^2 + 4x - 4(m - |m|)$

$\Leftrightarrow$ $(m - |m|)(x^2 - 4) + (-x^3 + 4x - y) = 0$ $\forall m$

$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x^2 - 4 = 0 \\ -x^3 + 4x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \vee y = 0 \\ x = -2 \vee y = 0 \end{array}\right.$

Vậy các điểm cố định của $(C_m)$ là : $M_1(2; 0)$, $M_2(-2; 0)$.

**2.** Tìm m sao cho $(C_m)$ tiếp xúc với trục hoành

Phương trình hoành độ giao điểm của $(C_m)$ và Ox :

$$-x^3 + (m - |m|)x^2 + 4x - 4(m - |m|) = 0$$

$\Leftrightarrow$ $(m - |m|)(x^2 - 4) - x(x^2 - 4) = 0$

$\Leftrightarrow$ $(x^2 - 4)(m - |m| - x) = 0$ (1) $\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 \\ x = m - |m| \end{array}\right.$

$(C_m)$ tiếp xúc với Ox :

$\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm kép $\Leftrightarrow$ $-2 = m - |m|$ $\Leftrightarrow$ $m = -1.$

**3.** Tìm quỹ tích điểm uốn $I_m$ của $(C_m)$ khi m thay đổi

$I_m(x; y)$ là điểm uốn $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} y = f(x) \\ f''(x) = 0 \end{cases}$

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

$$f'(x) = -3x^2 + 2(m - |m|)x + 4$$

$$f''(x) = -6x + 2(m - |m|)$$

$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m - |m| = 3x$$

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad y = -x^3 + 3x^3 + 4x - 12x$$

$$\Leftrightarrow \quad y = 2x^3 - 8x$$

Do : $\quad m - |m| \le 0 \quad \Rightarrow \quad x \le 0$

Vậy quỹ tích $I_m$ là phần của đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 8x$ thỏa điều kiện giới hạn $x \le 0$.

# NĂM 1994

## 84. ĐH TỔNG HỢP TPHCM – KHỐI A, B

Cho hàm số : $\quad y = \dfrac{x^2 + (m+2)x + 3m + 2}{x + 1}$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với $m = 0$.
2. Xác định m để hàm số có cực đại, cực tiểu.
3. Giả sử y có giá trị cực đại $y_{CĐ}$ và giá trị cực tiểu $y_{CT}$. Chứng minh rằng :

$$y_{CĐ}^2 + y_{CT}^2 > \frac{1}{2}.$$

### Giải

$$y = f(x) = \frac{x^2 + (m+2)x + 3m + 2}{x + 1}$$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số với $m = 0$

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$$

MXĐ : $\quad D = R\backslash\{-1\}$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên :

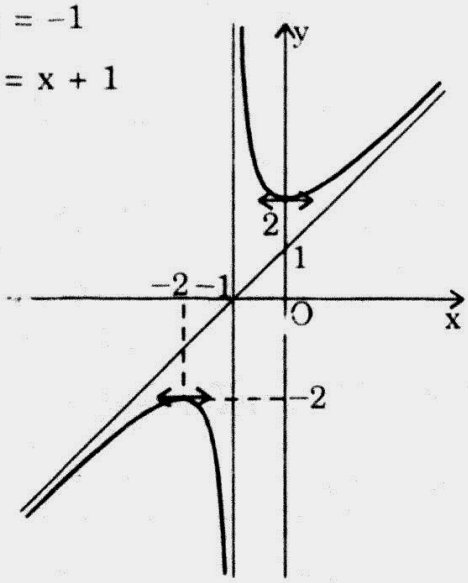
| x | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f' | | + | 0 | − | ‖ | − | 0 | + | |
| f | $-\infty$ | ↗ | $-2$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | 2 | ↗ | $+\infty$ |

Facebook.com/TeacherSokPiseth www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

Tiệm cận đứng $x = -1$

Tiệm cận xiên $y = x + 1$

Đồ thị :




**2.** Xác định m để hàm số có cực đại và cực tiểu

Ta có : $f'(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 2m}{(x+1)^2}$

f có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow$ $\Delta' > 0$ $\Leftrightarrow$ $1 + 2m > 0$ $\Leftrightarrow$ $m > -\dfrac{1}{2}$.

**3.** Chứng minh rằng : $y_{CĐ}^2 + y_{CT}^2 > \dfrac{1}{2}$

Giả sử : $m > \dfrac{-1}{2}$

f đạt cực trị tại $x_1 > x_2$.

Theo Viét ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ x_1x_2 = -2m \end{cases}$

$$y_{CĐ}^2 + y_{CT}^2 = |2x_1 + m + 2|^2 + |2x_2 + m + 2|^2$$

$$= 4(x_1^2 + x_2^2) + 4(m + 2)(x_1 + x_2) + 2(m+2)^2$$

$$= 4|4 + 4m| - 8(m+2) + 2(m+2)^2 = 2m^2 + 16m + 8$$

Đặt : $g(m) = 2m^2 + 16m + 8$ $\Rightarrow$ $g'(m) = 4m + 16 = 0$ $\Leftrightarrow$ $m = -4$

| x | $-\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| g' | | + | |
| g | $\frac{1}{2}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Vậy : $y_{CĐ}^2 + y_{CT}^2 > \dfrac{1}{2}$.



www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

## 85. ĐH TỔNG HỢP TPHCM – KHỐI D

Cho hàm số : $y = \dfrac{ax^2 - (3a-1)x + 2a}{x-1}$ (1)

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với a = 1.

**2.** Viết phương trình tiệm cận xiên của đồ thị (1). Chứng minh rằng tiệm cận xiên này luôn đi qua một điểm cố định với mọi a.

### Giải

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với a = 1

Ta có : $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x-1}$

MXĐ : $D = R\backslash\{1\}$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

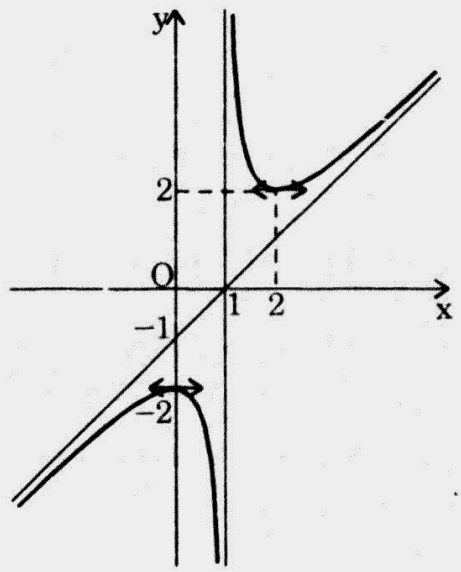
Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | 0 | | 1 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f' | | + | 0 | − | ‖ | − | 0 | + | |
| f | $-\infty$ | ↗ | −2 | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | 2 | ↗ | $+\infty$ |

Tiệm cận đứng x = 1.

Tiệm cận xiên y = x − 1.

Đồ thị : hình bên.




**2.** Tiệm cận xiên Δ : y = ax + 1 − 2a

$M_o(x_o; y_o) \in \Delta \quad \forall a$

$\Leftrightarrow \quad y_o = ax + 1 - 2a, \quad \forall a$

$\Leftrightarrow \quad a(x_o - 2) + 1 - y_o = 0 \ \forall a$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_o - 2 = 0 \\ 1 - y_o = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_o = 2 \\ y_o = 1 \end{cases}$$

Vậy Δ luôn đi qua điểm cố định $M_o(2; 1)$.

## 86. ĐH KINH TẾ

Cho hàm số : $y = x^3 + 3x^2 + mx + 1$ có đồ thị $(C_m)$.

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi m = 3.

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

**2.** Chứng minh rằng với mọi m, đồ thị $(C_m)$ của hàm số đã cho luôn luôn cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + 2x^2 + 7$ (L) tại hai điểm phân biệt A và B. Tìm quỹ tích trung điểm I của đoạn thẳng AB.

**3.** Xác định m để đồ thị $(C_m)$ cắt đường thẳng $y = 1$ tại ba điểm phân biệt C(0; 1), D, E. Tìm m để các tiếp tuyến tại D và E với $(C_m)$ vuông góc với nhau.

## Giải

$$y = f(x) = x^3 + 3x^2 + mx + 1 \qquad (C_m)$$

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi m = 3

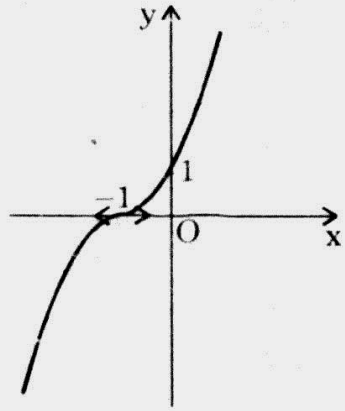
$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

MXĐ : $D = R$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x + 3$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow x = -1$$

| x | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f' | | + | | − | |
| f | $-\infty$ | ↗ | 0 | ↘ | $-\infty$ |




Đồ thị : hình bên.

**2.** $y = x^3 + 2x^2 + 7$

Phương trình hoành độ giao điểm của $(C_m)$ và (L).

$$x^3 + 3x^2 + mx + 1 = x^3 + 2x^2 + 7 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + mx - 6 = 0 \qquad (1)$$

$$\Delta = m^2 + 24 \quad \Rightarrow \quad \Delta > 0, \quad \forall m$$

Vậy $(C_m)$ cắt (L) tại 2 điểm $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$.

Theo Viét ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1x_2 = -6 \end{cases}$

Gọi I là trung điểm của AB ta có :

$$I \begin{cases} x = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = -\dfrac{m}{2} \\ y = \dfrac{y_1 + y_2}{2} = \dfrac{(x_1^3 + x_2^3) + (x_1^2 + x_2^2) + 14}{2} \end{cases}$$

$$I \begin{cases} x = -\dfrac{m}{2} & (1) \\ y = \dfrac{1}{2}[-m(m^2 + 18) + 2m^2 + 38] & (2) \end{cases}$$


www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

(1) $\Rightarrow$ $m = -2x$

(2) $\Rightarrow$ $y = \frac{1}{2}[2x(4x^2 + 18) + 8x^2 + 38]$

$\Rightarrow$ $y = 4x^3 + 4x^2 + 18x + 19$

Vậy quỹ tích trung điểm I của AB là đường : $y = 4x^3 + 4x^2 + 18x + 19$.

**3.** Phương trình hoành độ giao điểm của $(C_m)$ và đường thẳng $y = 1$

$$x^3 + 3x^2 + mx + 1 = 1 \Leftrightarrow x(x^2 + 3x + m) = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 + 3x + m = 0 \end{array}\right. \quad (2)$$

$(C_m)$ cắt $y = 1$ tại ba điểm phân biệt C(0; 1), D, E

$\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 9 - 4m > 0 \\ 0^2 + 3.0 + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{9}{4} \\ m \neq 0 \end{cases}$$

Theo Viét ta có : $\begin{cases} x_D + x_E = -3 \\ x_D . x_E = m \end{cases}$

Tiếp tuyến tại D và E vuông góc

$$\Leftrightarrow f'(x_D) f'(x_E) = -1 \Leftrightarrow 4m^2 - 9m = -1$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 9m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{9 \pm \sqrt{65}}{8}.$$

## 87. ĐH BÁCH KHOA TPHCM

Cho hàm số : $y = \frac{x^2 + 2mx + 1}{x - 1}$ (m : tham số).

**1.** Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số tương ứng với m = 1.

**2.** Chứng minh rằng nếu đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại $x = x_o$ thì $y'(x_o) = \frac{2(x_o + m)}{x_o - 1}$.

**3.** Tìm số a nhỏ nhất để $a(x^2 + x - 1) \leq (x^2 + x + 1)^2$ được thỏa mãn với mọi $x \in [0; 1]$.

### Giải

Cho hàm số : $y = \frac{x^2 + 2m + 1}{x - 1}$

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

**1.** $m = 1$

Ta có : $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x - 1}$

MXĐ : $D = R\setminus\{1\}$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right.$$

| x | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f' | | + | 0 | − | ‖ | − | 0 | + | |
| f | $-\infty$ | ↗ | 0 | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | 8 | ↗ | $+\infty$ |

Đồ thị : (học sinh tự vẽ).

**2.** $y = \dfrac{u(x)}{v(x)}$

Ta có : $u(x_o) = 0$

$$y' = \frac{u'y - uy'}{v^2} \Rightarrow y'(x_o) = \frac{u'(x_o)}{v(x_o)} = \frac{2(x_o + m)}{x_o - 1}$$

**3.** $a(x^2 + x - 1) \le (x^2 + x + 1)^2 \quad \forall x \in [0; 1]$ (1)

Đặt : $X = x^2 + x$

$$0 \le x \le 1 \Leftrightarrow 0 \le X \le 2$$

$(1) \Leftrightarrow \quad a(X - 1) \le (X + 1)^2$ (2)

*TH 1* : $X = 1$, ta có (2) đúng $\forall a$.

*TH 2* : $0 \le X \le 1$ : (2) $\Leftrightarrow a \ge \dfrac{(X+1)^2}{X-1} \Leftrightarrow a \ge -1$

*TH 3* : $1 < X \le 2$ : (2) $\Leftrightarrow a \le \dfrac{(X+1)^2}{X-1} \Leftrightarrow a \le 9$

Vậy : $-1 \le a \le 9$.

## 88. ĐH KIẾN TRÚC TPHCM

Cho hàm số : $y = 4x^3 + mx$.

**1.** Tùy theo giá trị của m, hãy xét sự biến thiên của hàm số .

**2.** Xác định m để $|y| \le 1$ khi $|x| \le 1$.

**Giải**

$$y = 4x^3 + mx$$

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

**1.** Tùy theo giá trị của m, hãy xét sự biến thiên của hàm số

MXĐ : $D = R$

$y' = 12x^2 + m$

*TH 1* : $m \geq 0 \Rightarrow y' \geq 0$ Hàm số luôn luôn đồng biến.

*TH 2* : $m < 0$ $y' = 0 \Leftrightarrow x = x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{-m}{12}}$

| x | $-\infty$ | | $x_1$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | 0 | − | 0 | + | |
| y | $-\infty$ | ↗ | $\frac{-2m}{3}\sqrt{\frac{-m}{12}}$ | ↘ | $\frac{2m}{3}\sqrt{\frac{-m}{12}}$ | ↗ | $+\infty$ |

**2.** Xác định m để $|y| \leq 1$ khi $|x| \leq 1$

Cho : $x = 1$ Ta có : $4 + m \leq 1 \Leftrightarrow m \leq -3$

Cho : $x = \frac{1}{2}$ Ta có : $-1 \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}m \Rightarrow m \geq -3$

$$\begin{cases} m \leq -3 \\ m \geq -3 \end{cases} \Rightarrow m = -3$$

Đảo lại giả sử $m = -3$

$y = 4x^3 - 3x \quad \forall x \in [-1; 1]$

Đặt : $x = \cos\alpha \Rightarrow y = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = \cos 3\alpha.$

$\Rightarrow |y| = |\cos 3\alpha| \leq 1.$

## 89. ĐH Y DƯỢC TPHCM

**1.** Cho hàm số : $y = x + \sqrt{1 - x^2} - m$.

Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số nhận giá trị không dương với mọi $x \in [-1; 1]$.

**2.** Trong hệ trục tọa độ xOy, hãy vẽ tất cả các điểm M(x; y) có tọa độ thỏa điều kiện : $|y| \geq \frac{x^2 - x + 2}{x - 1}$.

**3.** Cho hàm số $y = x^4 + (m + 3)x^3 + 2(m + 1)$.

Tìm m để hàm số có cực đại. Khi đó chứng tỏ rằng, điểm cực đại của đồ thị hàm số không có hoành độ dương.

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

## Giải

**1.** Cho hàm số : $y = x + \sqrt{1 - x^2} - m$

Tất cả các giá trị của m để hàm số nhận giá trị không dương $\forall x \in [-1; 1]$.

$$y = f(x) = x + \sqrt{1 - x^2} - m$$

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = \frac{\sqrt{1 - x^2} - x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{1 - x^2} = x \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Bảng biến thiên :

| x | $-1$ | | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f' | | + | 0 | − | |
| f | | ↗ | $\sqrt{2} - m$ | ↘ | |

$$f(x) \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2} - m \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \ge \sqrt{2}.$$

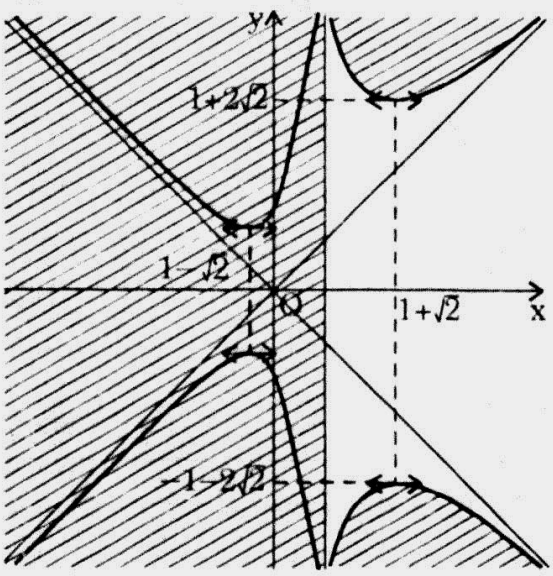
**2.** $|y| \ge \dfrac{x^2 - x + 2}{x - 1}$

Đặt : $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 2}{x - 1}$

Ta có : $|y| \ge f(x)$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y \ge 0 \\ y \ge f(x) \end{cases} \vee \begin{cases} y \le 0 \\ y \le -f(x) \end{cases}$$

Tập hợp những điểm M(x; y) thỏa điều kiện $|y| \ge f(x)$ là phần gạch chéo dưới đây của một mặt phẳng tọa độ.




**3.** $y = f(x) = x^4 + (m + 3)x^3 + 2(m + 1)x^2$

$$f'(x) = 4x^3 + 3(m + 3)x^2 + 4(m + 1)x$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ 4x^2 + 3(m + 3)x + 4(m + 1) = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

f(x) có cực đại $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm khác 0.

Đặt : $g(x) = 4x^2 + 3(m + 3)x + 4(m + 1)$


www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

$\Delta > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 9(m+3)^2 - 64(m+1) > 0$

$\Leftrightarrow \quad 9m^2 - 10m + 17 > 0$ đúng $\forall m$

$g(0) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \neq -1$

Vậy : $m \neq -1$, $g(x)$ luôn có 2 nghiệm $x_1$, $x_2$ :

$g(0) = 4(m+1)$

$\frac{S}{2} = -\frac{3}{2}(m+1)$

*TH 1* : $g(0) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad m < -1$

Ta có bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | $x_1$ | | 0 | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f ' | | − | 0 | + | 0 | − | 0 | + | |
| $f_{CĐ}$ | ↘ | | CT | ↗ | CĐ | ↘ | CT | ↗ | |

*TH 2* : $g(0) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad m > -1 \quad \Rightarrow \quad -\frac{3}{4}(m+3) < 0$

Ta có bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | $x_1$ | | $x_2$ | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f | | − | 0 | + | 0 | − | 0 | + | |
| $f_{CĐ}$ | ↘ | | CT | ↗ | CĐ | ↘ | CT | ↗ | |

Vậy điểm cực đại của đồ thị hàm số không có hoành độ dương.

## 90. ĐH SƯ PHẠM TPHCM

Cho hàm số : $y = \dfrac{2x^2 + (1-m)x + 1 + m}{-x + m}$ (1)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m = 1$.
2. Xác định m để hàm số (1) nghịch biến trong khoảng $2 < x < +\infty$.
3. Chứng minh rằng với mọi $m \neq -1$, các đường cong (1) đều tiếp xúc với một đường thẳng cố định tại một điểm cố định.

### Giải

$$y = f(x) = \frac{2x^2 + (1-m)x + 1 + m}{-x + m}$$

1. Khảo sát và vẽ đồ thị khi $m = 1$

Học sinh tự vẽ.

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

**2.** Xác định m để hàm số nghịch biến trong khoảng $2 < x < +\infty$

$$f(x) = \frac{-2x^2 + 4mx - m^2 - 2m + 1}{(-x + m)^2}$$

Đặt : $g(x) = -2x^2 + 4mx - m^2 + 2m + 1$

$\Delta' = 4m^2 + 2(-m^2 + 2m + 1) = 2(m + 1)^2$

*TH 1* : $m = -1$

$g'(x) < 0 \quad \forall x \in D \quad \Rightarrow$ f(x) nghịch biến trên $(2; +\infty)$.

*TH 2* : $m \neq -1$

g(x) có 2 nghiệm $x_1$, $x_2$.

Ta có bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | $x_1$ | | m | | $x_2$ | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f ' | | − | 0 | + | | + | 0 | − | | | |
| f | | ↘ | | ↗ | | ↗ | | ↘ | | | |

f(x) nghịch biến trong $(2; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 < x_2 \le 2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a.g(2) \ge 2 \\ \dfrac{S}{2} < 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} m^2 - 10m + 7 > 0 \\ m < 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad m < 5 - \sqrt{18}.$$

**3.** Gọi $M_o(x_o; y_o)$ là điểm cố định

$$M_o \in (C_m) \ \forall m \quad \Leftrightarrow \quad y_o = \frac{2x_o^2 + 1 - m)x_o + 1 + m}{-x_o + m}$$

$$\Leftrightarrow \quad m(x_o + y_o - 1) - x_oy_o - 2x_o^2 - x_o - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_o + y_o - 1 = 0 \\ 2x_o^2 + y_ox_o + x_o + 1 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_o = -1 \\ y_o = 2 \end{cases}$$

Ta có : $f'(x) = \dfrac{-2x^2 + 4mx + 2m - m^2 + 1}{(-x + m)^2}$

$f'(x) = \dfrac{-m^2 - 2m - 1}{(m + 1)^2}$ (vì $x_o = -1$)

Phương trình tiếp tuyến Δ với $(C_m)$ tại $M_o(-1; 2)$ :

$$\Delta : y - 2 = (-1)(x - 2) \quad \Leftrightarrow \quad y = -x + 4$$

Vậy : $(C_m)$ luôn tiếp xúc với đường thẳng cố định $\Delta : y = -x + 4$ tại điểm cố định $M_o(-1; 2)$.



www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok SPS

## 91. ĐH NGOẠI THƯƠNG

Cho hàm : $y = x^3 - 3(m + 1)x^2 + 2(m^2 + 4m + 1)x - 4m(m + 1)$.

**1.** Chứng minh rằng khi m thay đổi, đồ thị của hàm số luôn đi qua một điểm cố định.

Xác định tham số m để đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn 1.

**2.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi m = 0. Tìm điểm $M \in (C)$ sao cho qua M chỉ vẽ được duy nhất một tiếp tuyến với (C).

### Giải

Cho hàm số : $y = f(x) = x^3 - 3(m + 1)x^2 + 2(m^2 + 4m + 1)x - 4m(m + 1)$

**1.** Chứng minh rằng khi m thay đổi, đồ thị của hàm số luôn đi qua một điểm cố định

$M_0(x_0; y_0) \in (C_m)$, $\forall m$.

$$\Leftrightarrow \quad y_0 = x_0^3 - 3(m + 1)\, x_0^2 + 2(m^2 + 4m + 1)x_0 - 4m(m + 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad m^2(2x_0 - 4) + m(-3x_0^2 + 8x_0 - 4) - x_0^3 - 3x_0^2 + 2x_0 - y_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x_0 - 4 = 0 \\ -3x_0^2 + 8x_0 - 4 = 0 \\ x_0^3 - 3x_0^2 + 2x_0 - y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

Vậy $(C_m)$ luôn đi qua $M_0(2; 0)$.

Xác định tham số m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn 1.

Ta có : $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - 2)[x^2 - (3m + 1)x + 2m(m + 1)] = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x^2 - (3m + 1)x + 2m(m + 1) = 0 \end{array}\right.$$

Đặt : $g(x) = x^2 - (3m + 1)x + 2m(m + 1)$.

Để f(x) có 3 nghiệm phân biệt thì g(x) phải có 2 phân biệt nghiệm khác 2 thỏa mãn : $1 < x_1 < x_2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ 2f(1) > 0 \\ \dfrac{S}{2} > 1 \\ f(2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m + 1 > 0 \\ 2m^2 - m > 0 \\ \dfrac{3m + 1}{2} > 1 \\ 2m^2 - 4m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \vee m > \dfrac{1}{2} \\ m > \dfrac{1}{3} \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{1}{2} \\ m \neq 1 \end{cases}$$

**2.** m = 0

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$$

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

MXĐ : D = R

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2 \Rightarrow \quad f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$$

Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$ | | $\frac{3+\sqrt{3}}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f' | | + | 0 | − | 0 | + | |
| f | $-\infty$ | ↗ | CĐ | ↘ | CT | ↗ | $+\infty$ |

Học sinh tự vẽ đồ thị.

Xét : $M_o(x_o; y_o) \in (C)$.

Phương trình tiếp tuyến Δ tại $M_o(x_o; y_o)$ : $y = f'(x_o)(x - x_o) + f(x_o)$

Phương trình hoành độ giao điểm của Δ và (C) :

$$f(x) = f(x_o)(x - x_o) + f(x_o)$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x) - f(x_o) - f'(x_o)(x - x_o) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^3 - x_o^3 - 3(x^2 - x_o^2) + 2(x - x_o) - (3x_o^2 - 6x_o + 2)(x - x_o) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x - x_o)[x^2 + x_o x + x_o^2 - 3(x + x_o) + 2 - 3x_o^2 + 6x_o - 2] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x - x_o)[x^2 + (x_o - 3)x - 2x_o^2 + 3x_o] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = x_o \\ x^2 + (x_o - 3)x - 2x_o^2 + 3x_o = 0 \end{array}\right. \qquad (1)$$

Qua M chỉ vẽ được duy nhất một tiếp tuyến đến (C)

$\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm kép $x_o$ $\Leftrightarrow$ $\frac{3 - x_o}{2} = x_o$ $\Leftrightarrow x_o = 1$.

Vậy $M_o(1; 0)$ là điểm cần tìm.

## 92. ĐH BÁCH KHOA TPHCM

Cho hàm số : $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số. Từ đó suy ra đồ thị của hàm số :

$$y = \frac{x^2 - x + 1}{|x - 1|} \qquad \text{(vẽ hình riêng).}$$

Facebook.com/TeacherSokPiseth www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

**2.** Tìm tất cả các giá trị của m để cho phương trình :

$$x^2 - (m + 1)x + m + 1 = 0 \quad \text{có nghiệm.}$$

**3.** Tìm tất cả các giá trị của m để cho phương trình sau đây có ba nghiệm phân biệt nằm trong đoạn [–3; 0] :

$$(t^2 + 2t)^2 - (m + 1)(t^2 + 2t) + m + 1 = 0.$$

## Giải

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số. Từ đó suy ra đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{|x - 1|}$

Ta có : $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$

MXĐ : $D = R\backslash\{1\}$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

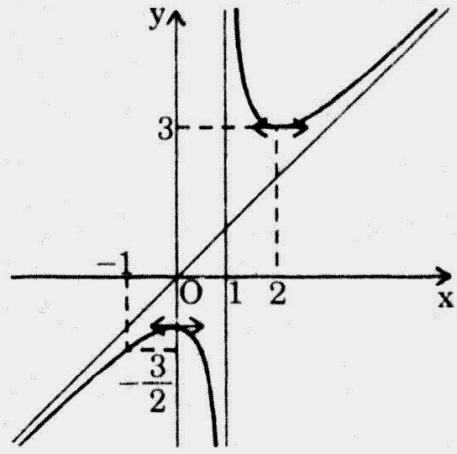
Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | 0 | | 1 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f' | | + | 0 | – | ‖ | – | 0 | | |
| f | $-\infty$ | ↗ | –1 | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | 3 | ↗ | $+\infty$ |

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) \to \infty \quad \Rightarrow$ đồ thị có tiệm cận đứng x = 1.

$$\left.\begin{array}{l} y = x + \dfrac{1}{x - 1} \\ \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x - 1} = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \text{đồ thị có tiệm cận xiên } y = x.$$

Ta có : đồ thị (C) của hàm số như sau :




Ta có : $y = g(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{|x - 1|}$

$$= \left[\begin{array}{ll} \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1} & (x > 1) \\ \dfrac{-(x^2 - x + 1)}{x - 1} & (x < 1) \end{array}\right.$$

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x > 1) \\ -f(x) & (x < 1) \end{cases}$$

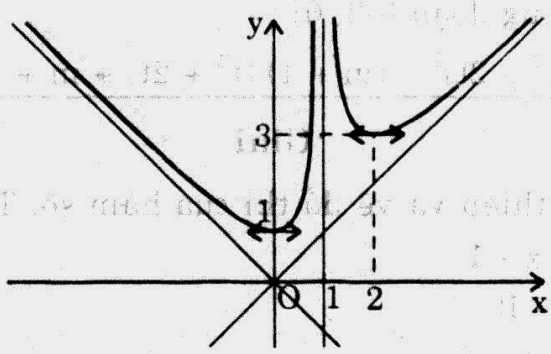
Đồ thị $(C_1)$ của g(x) suy ra từ đồ thị (C) của f(x) bằng cách :

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

– Giữ nguyên phần có $x > 1$.

– Lấy đối xứng của phần có $x < 1$ qua Ox.

Ta có đồ thị $(C_1)$ như sau :




**2.** Tìm tất cả các giá trị của m để cho phương trình sau có nghiệm :

$$x^2 - (m + 1)x + m + 1 = 0 \qquad (1)$$

Ta có (1) $\Leftrightarrow$ $x^2 - x + 1 = m(x - 1)$ $(x \neq 1)$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = m \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = m$$

Với : $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = f(x) \\ y = m \end{cases}$

Số nghiệm của phương trình (1) chính là số giao điểm của (C) và đường thẳng $y = m$. Theo đồ thị ta có : (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ $m \leq -1 \vee m \geq 3$.

**3.** Tìm tất cả các giá trị của m để cho phương trình sau đây có 3 nghiệm phân biệt nằm trong đoạn $[-3; 0]$

$$(t^2 + 2t)^2 - (m + 1)(t^2 + 2t) + m + 1 = 0 \qquad (1)$$

Đặt : $u = t^2 + 2t \Rightarrow u' = 2t + 2$. Ta có :

| t | −3 | | −1 | | 0 |
|---|---|---|---|---|---|
| u' | | − | 0 | + | |
| u | 3 | ↘ | −1 | ↗ | |
| | | 0 | | | |

Ta có : (1) $\Leftrightarrow$ $u^2 - (m + 1)u + m + 1 = 0$

$\Leftrightarrow$ $u^2 - u + 1 = m(u - 1)$ $(u \neq 1)$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{u^2 - u + 1}{u - 1} = m \qquad (2)$$

(1) có 3 nghiệm phân biệt nằm trong đoạn $[-3; 0]$ $\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm $u_1$, $u_2$ thỏa : $-1 \leq u_1 \leq u_2 \leq 3 \quad \Leftrightarrow \quad -\dfrac{3}{2} \leq m \leq -1$.


Facebook.com/TeacherSokPiseth www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

# NĂM 1993

## 93. ĐH SƯ PHẠM KĨ THUẬT – KHỐI B

Cho hàm số : $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số. Xác định các giao điểm của đồ thị với trục hoành.

b) Viết phương trình các tiếp tuyến kẻ đến đồ thị từ điểm $A\left(\frac{23}{9}, -2\right)$.

c) Tìm trên đường thẳng $y = -2$ các điểm từ đó có thể kẻ đến đồ thị hai tiếp tuyến vuông góc với nhau.

### Giải

Cho hàm số : $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

**a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số :**

MXĐ : $D = R$.

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

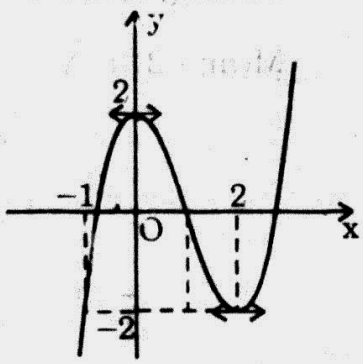
Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | 0 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f' | | + | 0 | − | 0 | + | |
| f | $-\infty$ | ↗ | 2 | ↘ | −2 | ↗ | $+\infty$ |

$f''(x) = 6x - 6$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$f(1) = 0$ Điểm uốn I(1; 0).




Giao điểm với Ox :

$y = 0 \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 2 = 0$

$\Rightarrow (x - 1)(x^2 - 2x - 2) = 0$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 1 \pm \sqrt{3} \end{array}\right.$

Đồ thị : hình bên.

**b)** Viết phương trình các tiếp tuyến kẻ đến đồ thị từ điểm $A\left(\frac{23}{9}, -2\right)$

Phương trình đường thẳng d đi qua A và có hệ số số góc k :

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

$$d : y + 2 = k\left(x - \frac{23}{9}\right) \quad \Leftrightarrow \quad y = k\left(x - \frac{23}{9}\right) - 2$$

d tiếp xúc với (C) khi hệ sau có nghiệm.

$$x^3 - 3x^2 + 2 = k\left(x - \frac{23}{9}\right) - 2 \qquad (1)$$

$$3x^2 - 6x = k \qquad (2)$$

$$\Rightarrow \quad x^3 - 3x + 2 = (3x^2 - 6x)\left(x - \frac{23}{9}\right) - 2$$

$$\Leftrightarrow \quad x^3 - 3x^2 + 4 = 3x(x - 2)\left(x - \frac{23}{9}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad (x + 1)(x - 2)^2 = 3x - 2\left(x - \frac{23}{9}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 3 \\ x = \frac{1}{3} \end{array}\right.$$

* Với $x = 2 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow d : y = -2$

* Với $x = 3 \Rightarrow k = 9 \Rightarrow d : y = 9x - 25$

* Với $x = \frac{1}{3} \Rightarrow k = -\frac{5}{3} \Rightarrow d : y = -\frac{5x}{3} + \frac{61}{27}$.

**c)** Tìm trên đường thẳng $y = -2$ các điểm từ đó có thể kẻ đến đồ thị hai tiếp tuyến vuông góc với nhau

Gọi : $M(m, -2)$ là một điểm trên đường thẳng $y = -2$. Giả sử từ M ta kẻ được tiếp tuyến $\Delta$ tiếp xúc với(C) tại $M_o(x_o, y_o)$.

Phương trình $\Delta : y = (3x_o^2 - 6x_o)(x - x_o) + x_o^3 - 3x_o^2 + 2$

$$M(m; -2) \in \Delta \quad \Rightarrow \quad -2 = (3x_o^2 - 6x_o)(m - x_o) + x_o^3 - 3x_o^2 + 2$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x_o^3 - 3(m + 1)x_o^3 + mx_o - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x_o - 2)[2x_o^2 - (3m - 1)x_o + 2] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_o = 2 \\ 2x_o^2 - (3m - 1)x_o + 2 = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Gọi $x_1$, $x_2$ là nghiệm của (1) ta có : $\begin{cases} x_1 . x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = \frac{1}{2}(3m - 1) \end{cases}$

Từ M kẻ được 2 tiếp tuyến vuông góc đến (C), suy ra :


www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

$$f'(x_1).f'(x_2) = -1 \Rightarrow (3x_1^2 - 6x_1)(3x_2^2 - 6x_2) = -1$$

$$\Rightarrow 9x_1x_2[x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4] = -1$$

$$\Rightarrow 9[5 - (3m - 1)] = -1 \Rightarrow m = \frac{55}{27}.$$

Thử lại với $m = \frac{55}{27}$, (1) có nghiệm.

Vậy : $M\left(\frac{55}{27}; -2\right)$ là điểm cần tìm.

## 94. ĐH NÔNG LÂM

Cho hàm số : $y = \dfrac{2x^2 + (1-m)x + 1 + m}{x - m}$ (1)

**1.** Với m = 1, khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số.

**2.** Chứng minh rằng với mọi $m \neq -1$, đồ thị hàm số (1) luôn luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định tại một điểm cố định.

**3.** Xác định m để hàm số (1) tăng trên $(1; +\infty)$.

### Giải

**1.** Với m = 1, khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

Ta có : $f(x) = \dfrac{2x^2 + 2}{x - 1}$

MXĐ : $D = R \setminus \{1\}$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 4x - 2}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 - \sqrt{2} \\ x = 1 + \sqrt{2} \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | $1-\sqrt{2}$ | | 1 | | $1+\sqrt{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f' | | + | 0 | − | ‖ | − | 0 | + | |
| f | $-\infty$ | ↗ | CĐ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | CT | ↗ | $+\infty$ |

CĐ : $f(1 - \sqrt{2}) = 4(1 - \sqrt{2})$

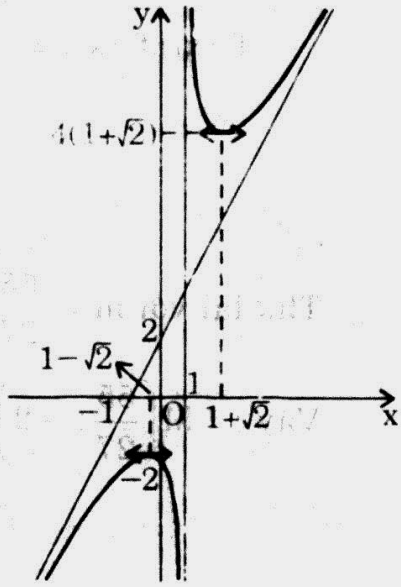
CT : $f(1 + \sqrt{2}) = 4(1 + \sqrt{2})$

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

Tiệm cận đứng : $x = 1$

Tiệm cận xiên : $y = 2x + 2$

Đồ thị : (hình vẽ bên).




**2.** Chứng minh rằng với mọi $m \neq -1$, đồ thị hàm số luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định tại một điểm cố định

Gọi $M_o(x_o; y_o)$ là điểm cố định.

Ta có : $M_o \in (C_m)$

$$\Leftrightarrow \quad y_o = \frac{2x_o^2 + (1-m)x_o + 1 + m}{x_o - m} \quad (\forall m \neq x_o)$$

$$\Leftrightarrow \quad y_o(x_o - m) = 2x_o^2 + (1-m)x_o + 1 + m \quad (\forall m \neq x_o)$$

$$\Leftrightarrow \quad (x_o - y_o - 1)m + y_o x_o - 2x_o^2 - x_o - 1 = 0 \quad (\forall m \neq x_o)$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_o - y_o = 1 \\ y_o x_o - 2x_o^2 - x_o - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_o = -1 \\ y_o = -2 \end{cases}$$

Vậy : $\forall m \neq -1$ $(C_m)$ qua $M_o(-1; -2)$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 4mx + m^2 - 2m - 1}{(x-m)^2}$$

$$f'(-1) = \frac{(m+1)^2}{(m+1)^2} = 1 \quad (\forall m \neq -1)$$

Phương trình tiếp tuyến với $(C_m)$ tại $M_o(-1; -2)$

$$y + 2 = (x + 1)$$

$$y = x - 1 \quad (\Delta)$$

Vậy : $\forall m \neq -1$ $(C_m)$ luôn tiếp xúc với đường $(\Delta)$ cố định tại $M_o$ cố định.

**3.** Xác định m để hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$

Ta có : $$f'(x) = \frac{2x^2 - 4mx + m^2 - 2m - 1}{(x-m)^2}$$

Đặt : $g(x) = 2x^2 - 4mx + m^2 - 2m - 1$

$\Delta' = 2(m+1)^2$

*TH 1* : $m = -1$ Ta có : f tăng trên $(1; +\infty)$.

*TH 2* : $m \neq -1$ $f'(x)$ có 2 nghiệm $x_1$, $x_2$.


www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

| x | $-\infty$ | | $x_1$ | | m | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f ' | | + | 0 | − | ‖ | − | 0 | + | |
| f | | ↗ | | ↘ | ‖ | ↘ | | ↗ | |

f tăng trên $(1; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 < x_2 \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2g(1) \ge 0 \\ \dfrac{4m}{4} < 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} m^2 - 6m + 1 \ge 0 \\ m < 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} m \le 3 - 2\sqrt{2} \\ m < 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad m < 1.$$

## 95. ĐH TỔNG HỢP – KHỐI A, B

Cho hàm số : $y = \dfrac{(m-1)(x^2 - 2x) + m + 4}{mx + m}$,

với tham số m lấy mọi giá trị khác 0 và $-\dfrac{1}{4}$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số ứng với m = 2.
2. Với những giá trị nào của m thì đồ thị của hàm số tiếp xúc với đường thẳng y = 1.
3. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu. Xác định m để giá trị cực đại và cực tiểu cùng dấu nhau.

### Giải

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số ứng với m = 2

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x + 6}{2x + 2}$$

MXĐ : $D = R\backslash\{-1\}$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 4x - 16}{(2x+2)^2}; \qquad f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = -4 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | $-4$ | | $-1$ | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f ' | | + | 0 | − | ‖ | − | 0 | + | |
| f | $-\infty$ | ↗ | $-5$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | 1 | ↗ | $+\infty$ |

www.pisethsok.wordpress.com

Tiệm cận đứng : $x = -1$.

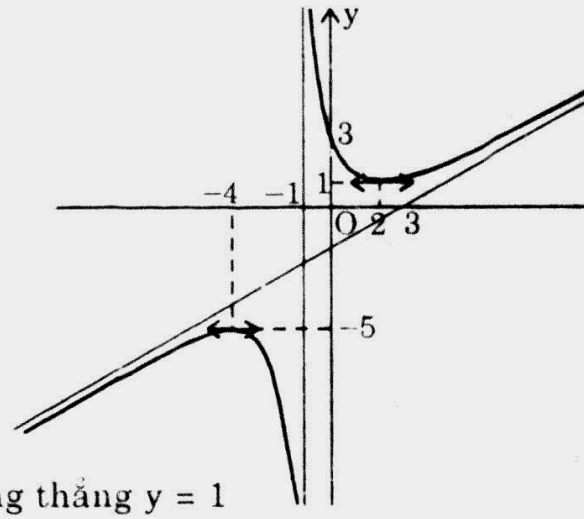
Tiệm cận xiên : $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$.

Cực đại : $f(-4) = -5$.

Cực tiểu : $f(2) = 1$.

Điểm đặc biệt : $x = 0 \Rightarrow y = 3$.

Đồ thị : hình bên




**2.** Với những giá trị nào của m thì đồ thị của hàm số tiếp xúc với đường thẳng $y = 1$

Phương trình hoành độ giao điểm của $(C_m)$ và $\Delta : y = 1$ là :

$$\frac{(m-1)(x^2-2x)+m+4}{mx+m} = 1 \qquad (mx + m \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \quad (m-1)(x^2-2x)+m+4 = mx+m$$

$$\Leftrightarrow \quad (m-1)x^2+(2-3m)x+4 = 0 \qquad ($$

(1) có nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ (2-3m)^2 - 16(m-1) = \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \frac{10}{9} \\ m = 2. \end{array}\right.$$

**3.** Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có cực đại và cực tiểu

Xác định m để giá trị cực đại và cực tiểu cùng dấu nhau.

$$f(x) = \frac{(m-1)(x^2-2x)+m+4}{mx+m}$$

$$f(x) = \frac{(m-1)x^2-2(m-1)x+m+4}{mx+m}$$

$$f'(x) = \frac{m(m-1)x^2+2m(m-1)x-3m^2-2m}{(mx+m)^2}$$

f có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow \begin{cases} m(m-1) \neq 0 & (1) \\ \Delta' > 0 & (2) \end{cases}$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -\frac{1}{4} \\ m > 1 \end{array}\right.$$



www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

Vậy : f có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < \dfrac{-1}{4} \\ m > 1 \end{array}\right.$ (3)

Đồ thị của f cắt Ox tại 2 điểm

$\Leftrightarrow$ Phương trình $(m-1)x^2 - 2(m-1)x + m + 4 = 0$ có 2 nghiệm khác $-1$.

$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 - (m-1)(m+4) > 0 \Leftrightarrow m < 1$ (4)

Đồ thị của f có 2 giá trị cực trị cùng dấu $\Leftrightarrow$ (3) và (4)

$\Leftrightarrow m < \dfrac{-1}{4}$

Vậy : $m < \dfrac{-1}{4}$.

## 96. ĐH KINH TẾ

Cho hàm số : $y = \dfrac{x^2\cos 2a + 2x\sin 2a + 1}{x+2}$.

. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi a = 0.

. Xác định a để đường tròn có tâm ở gốc tọa độ và tiếp xúc với tiệm cận xiên của đồ thị hàm số có bán kính lớn nhất.

### Giải

. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi a = 0

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x+2}$$

MXĐ : $D = R \setminus \{-2\}$

$$f'(x) = \frac{x^2+4x-1}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2-\sqrt{5} \\ x = -2+\sqrt{5} \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | $-2-\sqrt{5}$ | | $-2$ | | $-2+\sqrt{5}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f' | | + | 0 | − | ‖ | − | 0 | + | |
| f | $-\infty$ | ↗ | CĐ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | CT | ↗ | $+\infty$ |

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

CĐ : $f(-2-\sqrt{5}) = 2(-2-\sqrt{5})$

CT : $f(-2+\sqrt{5}) = 2(-2+\sqrt{5})$

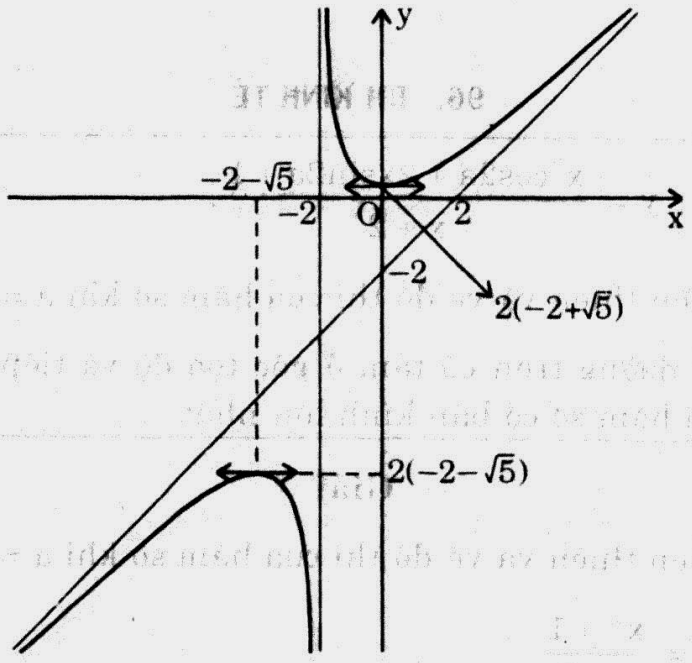
$\lim\limits_{x \to -2} = \infty$ : Tiệm cận đứng $x = -2$.

$$y = f(x) = x - 2 + \frac{5}{x+2}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5}{x+2} = 0$ : Tiệm cận xiên $y = x - 2$.

Điểm đặc biệt : $x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}$

Đồ thị :




**2. Xác định a để đường tròn có tâm ở gốc tọa độ và tiếp xúc với tiệm cận xiên của đồ thị hàm số có bán kính lớn nhất**

**Ta chia đa thức :**

$$\begin{array}{l|l} x^2\cos 2a + 2x\sin 2a + 1 & x + 2 \\ \hline -x^2\cos 2a - 2x\cos 2a & x\cos 2a + 2(\sin 2a - \cos 2a) \\ \hline \quad 2x(\sin 2a - \cos 2a) + 1 & \\ \quad -2x(\sin 2a - \cos 2a) - 4(\sin 2a - \cos 2a) & \\ \hline \qquad\qquad 1 - 4(\sin 2a - \cos 2a) & \end{array}$$

**Tiệm cận xiên : $\Delta$ : $y = x\cos 2a + 2(\sin 2a - \cos 2a)$**

$$\Leftrightarrow \quad x\cos 2a - y + 2(\sin 2a - \cos 2a) = 0$$

$$R = d(O; \Delta) = \frac{|2(\sin 2a - \cos 2a)|}{\sqrt{\cos^2 2a + 1}}$$


www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

*Cách 1* : (Dùng bất đẳng thức Bunhiacốpski)

$$R = \frac{2\left|(1)(\sin 2a) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\sqrt{2}\cos 2a\right|}{\sqrt{2\cos^2 2a + \sin^2 2a}}$$

$$R \le \frac{2\sqrt{\left(1 + \frac{1}{2}\right)(2\cos^2 2a + \sin^2 2a)}}{\sqrt{2\cos^2 2a + \sin^2 2a}}$$

$$R \le \sqrt{6}$$

Vậy : R lớn nhất $\Leftrightarrow$ $R = \sqrt{6}$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{\sin 2a}{\sqrt{2\cos 2a}} = -\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow$ $tg2a = -2$ $\Leftrightarrow$ $2a = arctg(-2) + k\pi$

$\Leftrightarrow$ $a = \dfrac{1}{2}arctg(-2) + \dfrac{k\pi}{2}$, $k \in Z$

*Cách 2* : (Dùng đạo hàm)

$$R^2 = \frac{4(tg2a - 1)^2}{(tg^2 2a + 2)}$$

Đặt : $t = tg2a$.

$$R^2 = \frac{4(t^2 - 2t + 1)}{t^2 + 2}$$

Đặt : $g(t) = \dfrac{t^2 - 2t + 1}{t^2 + 2}$

$g'(t) = \dfrac{2t^2 + 2t - 4}{(t^2 + 2)^2}$ ; $g'(t) = 0$ $\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l} t = -2 \\ t = 1 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên :

| t | $-\infty$ | | $-2$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| g' | | + | 0 | − | 0 | + | |
| g | 1 | ↗ | $\frac{3}{2}$ | ↘ | 0 | ↗ | 1 |

R lớn nhất $\Leftrightarrow$ $t = -2$

$\Leftrightarrow$ $tg2a = -2$ $\Leftrightarrow$ $a = \dfrac{1}{2}arctg(-2) + \dfrac{k\pi}{2}$, $k \in Z$.

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

## 97. ĐH BÁCH KHOA TPHCM

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số : $y = \dfrac{x^2 - 2x + 9}{x - 2}$.

**2.** Tìm K để đường thẳng $y = Kx + 10 - 5K$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt nhận I(5; 10) làm trung điểm.

**3.** Biện luận theo tham số a số nghiệm $x < 0$ của phương trình :

$$\frac{x^2 - 2|x| + 9}{|x| - 2} = a(x - 2) + 2.$$

### Giải

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số

$$y = f(x) = \frac{x^2 - 2x + 9}{x - 2}$$

MXĐ : $D = R\backslash\{2\}$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x - 5}{(x-2)^2}; \qquad f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 5 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | $-1$ | | $2$ | | $5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f ' | | + | 0 | − | ‖ | − | 0 | + | |
| f | $-\infty$ | ↗ | $-4$ (CĐ) | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | 8 (CT) | ↗ | $+\infty$ |

CĐ : $f(-1) = -4$

CT : $f(5) = 8$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \infty$: Tiệm cận đứng $x = 2$

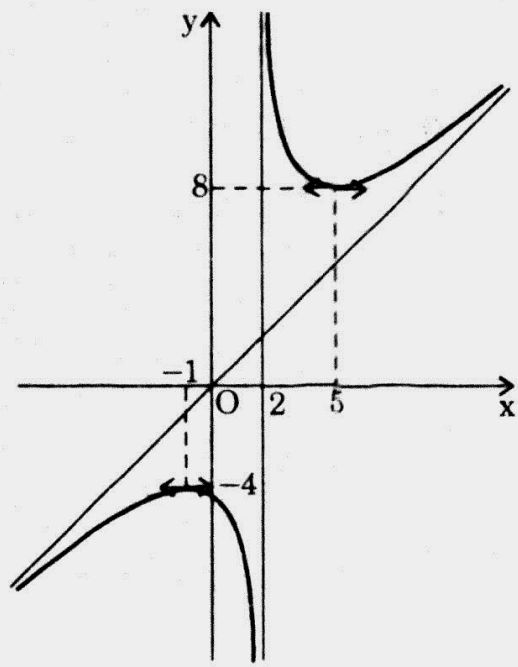
$f(x) = x + \dfrac{9}{x - 2}$.

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{9}{x - 2} = 0$ : Tiệm cận xiên $y = x$.

Điểm đặc biệt :

$x = 0; \quad y = -\dfrac{9}{2}$.

Đồ thị : hình bên.






www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

**2.** Tìm K để đường thẳng d : $y = Kx + 10 - 5K$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt nhận I(5; 10) làm trung điểm

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (C) :

$$\frac{x^2 - 2x + 9}{x - 2} = Kx + 10 - 5K \qquad (x \neq 2)$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 9 = Kx^2 + 10x - 5Kx - 2Kx - 20 + 10K.$$

$$\Leftrightarrow \quad (K - 1)x^2 + (12 - 7K)x + 10K - 29 = 0$$

$$\Delta = (12 - 7K)^2 - 4(K - 1)(10K - 29)$$

$$\Delta = 9K^2 - 12K + 28 > 0$$

I là trung điểm của $M_1(x_1; y_1)$; $M_2(x_2; y_2)$.

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x_1 + x_2}{2} = 5 \quad \Rightarrow \quad \frac{7K - 12}{2(K - 1)} = 5$$

$$\Leftrightarrow \quad 7K - 12 = 10K - 10 \quad \Leftrightarrow \quad K = -\frac{2}{3}$$

Vậy : $K = -\frac{2}{3}$.

**3.** Biện luận theo a số nghiệm $x < 0$ của phương trình :

$$\frac{x^2 - 2|x| + 9}{|x| - 2} = a(x - 2) + 2 \qquad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \quad \frac{x^2 + 2x + 9}{-x - 2} = a(x - 2) + 2$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + 2x + 9 = -ax^2 + 2ax - 2x - 2ax + 4a - 4$$

$$\Leftrightarrow \quad (a + 1)x^2 + 4x + 13 - 4a = 0.$$

*TH 1* : $a = -1$ : (1) $\Leftrightarrow$ $4x + 17 = 0$ $\Leftrightarrow$ $x = -\frac{17}{4}$ (nhận).

*TH 2* : $a \neq -1$

$$\Delta' = 4 - (a + 1)(13 - 4a) = 4a^2 - 9a - 9$$

$$\delta = 81 + 144 = 225$$

$$\left[\begin{array}{l} a_1 = \dfrac{9 - 15}{8} = -\dfrac{3}{4} \\ a_2 = \dfrac{9 + 15}{8} = 3 \end{array}\right.$$

$$P = x_1.x_2 = \frac{13 - 4a}{a + 1}; \qquad S = -\frac{4}{a + 1}$$

www.pisethsok.wordpress.com -plus.google.com/+PisethSok_SPS

| a | 4 | P | S | $x_1, x_2$ so với 0 | Số nghiệm của (1) |
|---|---|---|---|---|---|
| $+\infty$ | + | − | − | $x_1 < 0 < x_2$ | 1 |
| $\frac{13}{4}$ | | 0 | | $x_1 < x_2 = 0$ | 1 |
| | + | + | − | $x_1 < x_2 < 0$ | 2 |
| 3 | 0 | | | $x_1 = x_2 < 0$ | 1 |
| | − | + | − | VÔ NGHIỆM | 0 |
| $-\frac{3}{4}$ | 0 | | | $x_1 = x_2 < 0$ | 1 |
| | + | + | − | $x_1 < x_2 < 0$ | 2 |
| −1 | | 0 | 0 | $x_0 < 0$ | 1 |
| | + | − | + | $x_1 < 0 < x_2$ | 1 |
| $-\infty$ | | | | | |

## 98. ĐH Y DƯỢC TPHCM

Gọi $(C_m)$ là đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x^2 + mx + m}{x + 1}$.

**1.** Vẽ đồ thị $(C_{-1})$ ứng với $m = -1$.

Từ đó suy ra đồ thị (P) của hàm số $y = \dfrac{|x - 1|(2x + 1)}{x + 1}$.

**2.** Xác định các giá trị m sao cho qua điểm A(0; 1) không có đường thẳng nào tiếp xúc với $(C_m)$.

**3.** Xác định các giá trị của m để $(C_m)$ cắt Ox tại hai điểm và hai tiếp tuyến tại hai điểm đó vuông góc với nhau.

### Giải

$$y = f(x) = \frac{2x^2 + mx + m}{x + 1}$$

**1.** Vẽ đồ thị $(C_{-1})$ ứng với $m = -1$

Từ đó suy ra đồ thị (P) của hàm số : $y = \dfrac{|x - 1|(2x + 1)}{x + 1}$

$$m = -1 \Rightarrow f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x + 1}$$

MXĐ : $D = R\backslash\{-1\}$



www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 4x}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f' | | + | 0 | − | ‖ | − | 0 | + | |
| f | $-\infty$ | ↗ | $-9$ (CĐ) | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $-1$ (CT) | ↗ | $+\infty$ |

CĐ : $f(-2) = -9$

CT : $f(0) = -1$

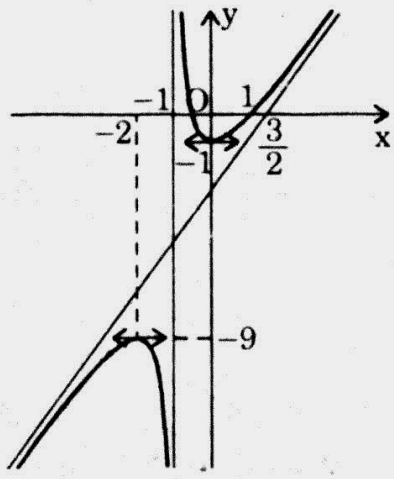
Tiệm cận đứng : $x = -1$

Tiệm cận xiên : $y = 2x - 3$.

Đồ thị $(C_{-1})$ :

Ta có : $(C_{-1}) : y = \dfrac{(x-1)(2x+1)}{x+1}$

$$(P) : y = \frac{|x-1|(2x+1)}{x+1}$$




Đồ thị (P) suy ra từ đồ thị (C) bằng cách giữ nguyên phần có $x > 1$ và lấy đối xứng của phần có $x < 1$ qua Oy.

**2.** Xác định m sao cho qua A(0; 1) không có đường thẳng nào tiếp xúc với $(C_m)$

Xét đường thẳng d đi qua A(0; 1), phương trình của d có dạng :

$$d : y - 1 = Kx$$

$$y = Kx + 1$$

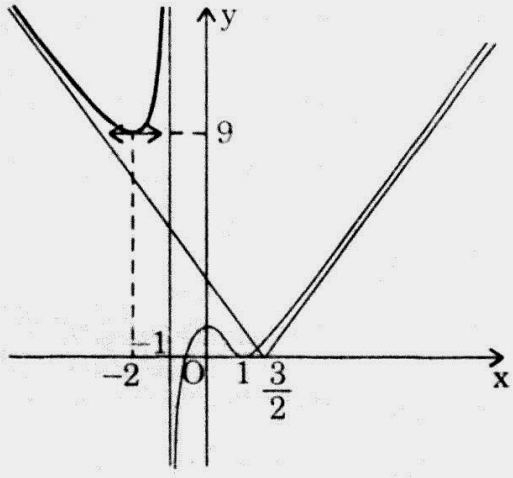
Phương trình hoành độ giao điểm của d và $(C_m)$ :

$$Kx + 1 = \frac{2x^2 + mx + m}{x+1} \quad (x \neq -1)$$

$$Kx^2 + x + Kx + 1 = 2x^2 + mx + m$$

$$\Leftrightarrow \quad (K-2)x^2 + (K + 1 - m)x + 1 - m = 0$$

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS




d tiếp xúc với $(C_m)$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} K \neq 2 \\ \Delta = 0 \end{cases}$

$\Delta = 0 \Leftrightarrow [K + 1 - m]^2 - 4(K - 2)(1 - m) = 0$

$\Leftrightarrow (K + 1)^2 - 2m(K - 1) + m^2 - 4(1 - m)K + 8(1 - m) = 0$

$\Leftrightarrow K^2 + 2(m - 1)K + m^2 - 10m + 9 = 0$ (1)

Để không có đường thẳng qua A và tiếp xúc với $(C_m)$, (1) phải vô nghiệm.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta' < 0 \\ 4 + 4(m - 1) + m^2 - 10m + 9 = 0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (m - 1)^2 - m^2 + 10m - 9 < 0 \\ m^2 - 6m + 9 = 0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8m - 8 < 0 \\ m = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 1 \\ m = 3. \end{array}\right.$

**3.** Phương trình hoành độ giao điểm của $(C_m)$ và Ox : $2x^2 + mx + m = 0$ (1)

(1) có 2 nghiệm $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 - 8m > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > 8 \end{array}\right.$

Gọi $x_1$, $x_2$ là 2 nghiệm của (1) ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{m}{2} \\ x_1 x_2 = \dfrac{m}{2} \end{cases}$

$$f'(x_1) = \frac{u'(x_1)v(x_1) - u(x_1)v'(x_1)}{|v(x_1)|^2} = \frac{u'(x_1)}{v(x_1)} \quad \text{vì } u(x_1) = 0$$

$$f'(x_1) = \frac{4x_1 + m}{x_1 + 1}$$

$$f'(x_2) = \frac{4x_2 + m}{x_2 + 1}$$


www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

Hai tiếp tuyến tại $M_1(x_1; 0)$ và $M_2(x_2; 0)$ vuông góc.

$$\Leftrightarrow \quad f'(x_1)\,f'(x_2) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(4x_1 + m)(4x_2 + m)}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} = -1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{16x_1x_2 + 4m(x_1 + x_2) + m^2}{x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1} = -1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{16\left(\frac{m}{2}\right) + 4m\left(\frac{-m}{2}\right) + m^2}{\frac{m}{2} + \left(\frac{-m}{2}\right) + 1} = -1$$

$$\Leftrightarrow \quad m^2 - 8m - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{ll} m = 4 - \sqrt{17} & \text{(nhận)} \\ m = 4 + \sqrt{17} & \text{(nhận).} \end{array}\right.$$

## 99. TRUNG TÂM ĐÀO TẠO VÀ BỒI DƯỠNG CÁN BỘ Y TẾ

Cho hàm số : $y = \dfrac{x^2 + 5x + 15}{x + 3}$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số.
2. Tìm điểm thuộc đồ thị sao cho tọa độ của điểm đó là các số nguyên.
3. Tìm điểm M thuộc đồ thị sao cho khoảng cách từ M tới trục hoành gấp hai lần khoảng cách từ M tới trục tung.

**Giải**

$$y = f(x) = \frac{x^2 + 5x + 15}{x + 3}$$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

MXĐ : $D = R \setminus \{-3\}$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 6x}{(x + 3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -6 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | $-6$ | | $-3$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f' | | + | 0 | − | ‖ | − | 0 | + | |
| f | $-\infty$ | ↗ | $-7$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | 5 | ↗ | $+\infty$ |

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

CĐ : $f(-6) = -7$

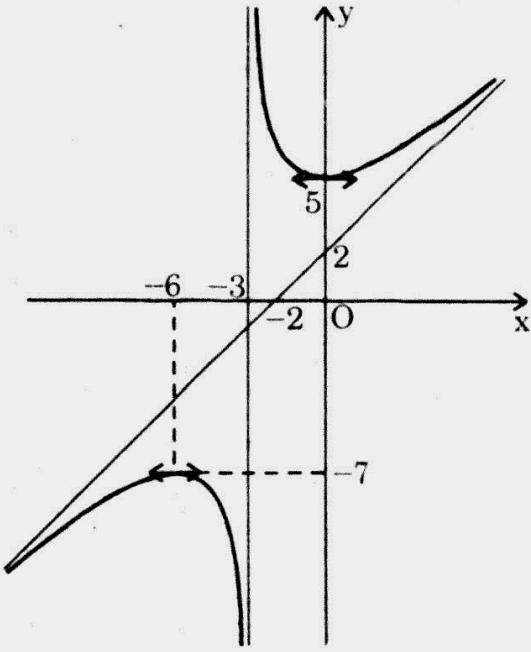
CT : $f(0) = 5$

$\lim\limits_{x \to -3} f(x) = \infty$ : tiệm cận đứng $x = -3$.

$y = x + 2 + \dfrac{9}{x+3}$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{9}{x+3} = 0$ : tiệm cận xiên $y = x + 2$.

Đồ thị hàm số : (hình vẽ).




**2.** $y = x + 2 + \dfrac{9}{x+3}$

$y \in Z \Rightarrow \dfrac{9}{x+3} \in Z$

$\Leftrightarrow (x + 3) \in [\pm 1; \pm 3; \pm 9]$

Ta được các điểm sau :

| x | −12 | −6 | −4 | −2 | 0 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| y | −11 | −7 | −11 | 9 | 5 | 9 |

**3.** M(x; y) có tọa độ là nghiệm của hệ : $\begin{cases} y = \dfrac{x^2 + 5x + 15}{x+3} \\ |y| = 2|x| \end{cases}$

*TH 1* : $\begin{cases} y = \dfrac{x^2 + 5x + 15}{x+3} \\ y = 2x \end{cases}$

Ta được 2 điểm : $M_1\left(\dfrac{-1-\sqrt{61}}{2}; -1-\sqrt{61}\right)$, $M_2\left(\dfrac{-1+\sqrt{61}}{2}; -1+\sqrt{61}\right)$

*TH 2* : $\begin{cases} y = \dfrac{x^2 + 5x + 15}{x+3} \\ y = -2x \end{cases}$. Hệ vô nghiệm.

## 100. ĐH KIẾN TRÚC

Cho hàm số : $y = x^4 + ax^2 + b$ (1)

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi : $a = \dfrac{3}{10}$, $b = 1$.

**2.** Giả sử đồ thị của hàm số (1) cắt trục hoành tại 4 điểm có hoành độ lập thành một cấp số cộng. Chứng minh rằng khi đó $9a^2 - 100b = 0$.



www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

## Giải

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số : $y = f(x) = x^4 + ax^2 + b$ khi $a = \frac{3}{10}$, $b = 1$

$$f(x) = x^4 + \frac{3}{10}x^2 + 1$$

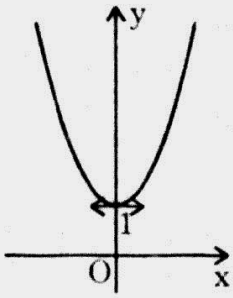
MXĐ : $D = R$

$$f'(x) = 4x^3 + \frac{3}{5}x$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(20x^2 + 3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

| x | $-\infty$ | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f' | | − | 0 | + | |
| f | $+\infty$ | ↘ | 1 | ↗ | $+\infty$ |

Đồ thị :




**2.** Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Ox

$$x^4 + ax^2 + b = 0 \qquad (1)$$

Đặt : $t = x^2$, $t \geq 0$ ta có : $t^2 + at + b = 0$ (2)

Gọi $t_1$ và $t_2$ là 2 nghiệm của (2), ta có : $\begin{cases} t_1 t_2 = b \\ t_1 + t_2 = -a \end{cases}$

Theo giả thiết $-\sqrt{t_2}$, $-\sqrt{t_1}$, $\sqrt{t_1}$, $\sqrt{t_2}$ tạo thành một cấp số cộng nên ta có :

$$\sqrt{t_2} = 3\sqrt{t_1} \quad \Rightarrow \quad t_2 = 9t_1$$

$$\Rightarrow \quad t_1 + 9t_1 = -a \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} t_1 = -\frac{a}{10} \\ t_2 = \frac{9a}{10} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \quad \left(-\frac{a}{10}\right)\left(-\frac{9a}{10}\right) = b \quad \Rightarrow \quad 9a^2 - 100b = 0.$$

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok SPS

## 101. ĐH NGOẠI THƯƠNG

Cho hàm số : $y = x^3 - 3x^2 - 9x + m$.

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số ứng với m = 0.

**2.** Xác định m để đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt với các hoành độ lập thành một cấp số cộng.

### Giải

$$y = f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + m$$

**1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số ứng với m = 0

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$

MXĐ : $D = R$

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên :

| x | $-\infty$ | | $-1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f' | | + | 0 | − | 0 | − | |
| f | $-\infty$ | ↗ | 5 | ↘ | $-27$ | ↗ | $+\infty$ |

$f''(x) = 6x - 6$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

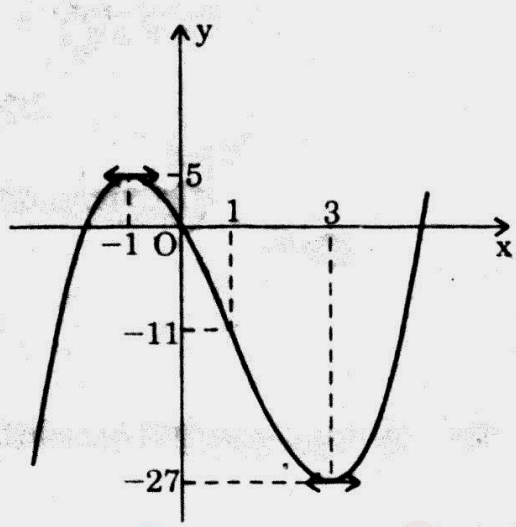
$f(1) = -11 \Rightarrow$ điểm uốn $A(1; -11)$

**2.** Xác định m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt với các hoành độ lập thành một cấp số cộng

Phương trình hoành độ giao điểm của $(C_m)$ và Ox :

$$x^3 - 3x^2 - 9x + m = 0 \qquad (1)$$

Đồ thị :






www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

Để (1) có 3 nghiệm $x_1$, $x_2$, $x_3$ ta phải có :

$$(1) \Leftrightarrow (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4)x - x_1x_2x_3 = 0 \qquad (2)$$

So sánh (1) và (2) ta có : $x_1 + x_2 + x_3 = -3$

Để $x_1$, $x_2$, $x_3$ tạo thành một cấp số cộng ta có :

$$x_1 + x_3 = x_2 \quad \Rightarrow \quad 3x_2 = -3 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -1$$

Thay vào (1) ta được : $m = -5$

Thử lại thấy điều kiện đề bài được thỏa mãn.

Vậy : $m = 5$.

## 102. ĐH SƯ PHẠM TPHCM

Cho hàm số : $y = (x + a)^3 + (x + b)^3 - x^3$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số ứng với $a = 1$, $b = 2$.
2. Trong trường hợp tổng quát, các số a, b phải thỏa mãn điều kiện gì để hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu.
3. Chứng minh rằng với mọi a, b phương trình : $(x + a)^3 + (x + b)^3 - x^3 = 0$ không thể có 3 nghiệm phân biệt.

### Giải

$$y = f(x) = (x + a)^3 + (x + b)^3 - x^3.$$

**1. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số với $a = 1$, $b = 2$**

Bạn đọc tự vẽ.

**2.**

$$f(x) = x^3 + 3(a + b)x^2 + 3(a^2 + b^2)x + a^3 + b^3$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6(a + b)x + 3(a^2 + b^2)$$

$$= 3[x^2 + 2(a + b)x + a^2 + b^2]$$

**Hàm số có cực đại và cực tiểu :**

$\Leftrightarrow$ **$f'(x)$ có 2 nghiệm phân biệt.**

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow (a + b)^2 - (a^2 + b^2) > 0 \Leftrightarrow 2ab > 0$$

$$\Leftrightarrow ab > 0.$$

**3. Gọi $x_1$ và $x_2$ là nghiệm nếu có của $f'(x)$, ta có :** $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2(a + b) \\ x_1x_2 = a^2 + b^2 \end{cases}$

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

Thực hiện phép chia đa thức f(x) cho f '(x) ta có :

$$f(x) = f'(x).q(x) + r(x)$$

$$r(x) = -ab[4x + a + b]$$

Ta có : $f(x_1).f(x_2) = r(x_1).r(x_2)$

$$= a^2b^2(4x_1 + a + b)(4x_2 + a + b)$$

$$= a^2b^2[16x_1x_2 + 4(a + b)(x_1 + x_2) + (a + b)^2]$$

$$= a^2b^2[16(a^2 + b^2) - 8(a + b)^2 + (a + b)^2]$$

$$= a^2b^2[9(a^2 + b^2) - 14ab]$$

$$= a^2b^2[7(a - b)^2 + 2(a^2 + b^2)] > 0$$

Vậy : nếu f(x) có hai giá trị cực trị thì hai giá trị đó phải cùng dấu.

Suy ra : phương trình f(x) = 0 không thể có 3 nghiệm phân biệt.



www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

# MỤC LỤC

*Lời nói đầu* 3

*Phần I :* **CÁC VẤN ĐỀ KHẢO SÁT HÀM SỐ**

1. Hàm bậc 3 5
2. Hàm bậc 4 trùng phương 12
3. Hàm nhất biến (Hàm hữu tỉ bậc 1/1) 19
4. Hàm hữu tỉ bậc 2/1 27
5. Vị trí tương đối giữa hai đồ thị 37
6. Tiếp tuyến của đồ thị 43
7. Biện luận số nghiệm của phương trình bằng đồ thị 50
8. Tìm tập hợp điểm 58
9. Biện luận số đường của một họ các đường đi qua một điểm 65
10. Vẽ đồ thị của hàm số mang dấu giá trị tuyệt đối 71
11. Đường thẳng đi qua các điểm đặc biệt của đồ thị 80
12. Một họ các đồ thị tiếp xúc với một đường cố định 87
13. Khoảng cách 92
14. Đồ thị của hàm số mang dấu căn 98

*Phần II :* **CÁC ĐỀ KHẢO SÁT HÀM SỐ THI VÀO CÁC TRƯỜNG ĐẠI HỌC**

**Năm 2002**

1. Tuyển sinh Đại học, Cao đẳng (khối A) 108
2. Tuyển sinh Đại học, Cao đẳng (khối B) 110
3. Tuyển sinh Đại học, Cao đẳng (khối D) 111

**Năm 2001**

4. ĐH Quốc gia TP.HCM (khối A) 112
5. ĐH Quốc gia TP.HCM (khối B) 114
6. ĐH Quốc gia TP.HCM (khối A, B) 114
7. ĐH Kinh tế 116
8. ĐH Ngoại thương TP.HCM (khối A) 117
9. ĐH Y Dược TP.HCM (khối B) 118
10. TT Đào tạo Bồi dưỡng Cán bộ Y tế TP.HCM 120
11. ĐH Nông lâm TP.HCM 121
12. ĐH Sư phạm Kĩ thuật TP.HCM (khối A) 122

Facebook.com/TeacherSokPiseth www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

13. ĐH Kiến trúc TP.HCM 123
14. ĐH Cần Thơ 124
15. ĐH Đà Nẵng (khối B) – đợt 1 125
16. ĐH Đà Nẵng (khối A) – đợt 2 126

**Năm 2000**

17. ĐH Quốc gia TP.HCM – đợt 1 127
18. ĐH Quốc gia TP.HCM – đợt 2 129
19. ĐH Sư phạm TP.HCM (khối A, B) 130
20. ĐH Sư phạm TP.HCM (khối D, E) 132
21. Học viện Ngân hàng – Phân viện TP.HCM 133
22. ĐH Y Dược TP.HCM 135
23. TT Đào tạo Bồi dưỡng Cán bộ Y tế TP.HCM 137
24. Học viện Quan hệ Quốc tế 139
25. ĐH Ngoại thương (khối D) 140
26. ĐH An ninh (khối A) – Ban B 141

**Năm 1999**

27. Cao đẳng Marketing 143
28. Cao đẳng Sư phạm Mẫu giáo TW3 144
29. Cao đẳng Kinh tế Đối ngoại 146
30. ĐH Thủy sản 148
31. ĐH Hùng Vương (khối A) 150
32. ĐH Quốc gia TP.HCM (khối A) – đợt 1 151
33. ĐH Quốc gia TP.HCM (khối A) – đợt 2 153
34. ĐH Quốc gia TP.HCM (khối D) – đợt 1 154
35. ĐH Quốc gia TP.HCM (khối D) – đợt 2 156
36. ĐH Quốc gia TP.HCM (khối B) – đợt 1 157
37. Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông 159
38. ĐH Ngoại thương 160
39. Học viện Ngân hàng – Phân viện TP.HCM 161
40. ĐH Y TP.HCM 163
41. ĐH Y Dược TP.HCM 165
42. ĐH Giao thông Vận tải 167


www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

**Năm 1998**


43. ĐH Quốc gia TP.HCM (khối A) – đợt 1 169
44. ĐH Kinh tế TP.HCM (khối A) 171
45. ĐH Quốc gia TP.HCM (khối A) – đợt 3 172
46. ĐH Y Dược TP.HCM 174
47. Cao đẳng Kinh tế Đối ngoại 176
48. ĐH Ngoại thương (khối D) 178
49. ĐH Dân lập Ngoại ngữ – Tin học 178
50. Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông 181
51. Cao đẳng Sư phạm 182
52. ĐH Văn Lang (khối A) 184
53. ĐH Kĩ thuật Công nghệ 185
54. ĐH Kiến trúc Hà Nội 187
55. ĐH Hàng hải 188
56. ĐH Thủy sản 189


**Năm 1997**


57. Cao đẳng Kinh tế Đối ngoại (khối A) 191
58. ĐH Dân lập Văn Lang (khối B, D) 193
59. ĐH Dân lập Văn Lang (khối A) 195
60. ĐH Dân lập Ngoại ngữ – Tin học 197
61. ĐH An ninh – ĐH Cảnh sát (khối A) 198
62. ĐH Thủy sản 199
63. Trung học Kĩ thuật Y tế 3 200
64. ĐH Quốc gia TP.HCM (khối A) – đợt 1 204
65. ĐH Quốc gia TP.HCM (khối B) – đợt 1 206
66. ĐH Quốc gia TP.HCM (khối A) – đợt 3 207
67. ĐH Quốc gia TP.HCM (khối A) 208
68. ĐH Y Dược TP.HCM 210
69. ĐH Ngoại thương (khối D) 210


**Năm 1996**


70. ĐH Quốc gia TP.HCM (Luật) 212
71. ĐH Y Dược TP.HCM 214
72. ĐH Ngoại thương 215


www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

73. ĐH Đại cương 216
74. Cao đẳng Sư phạm TP.HCM 217
75. Cao đẳng Hải quan 218
76. ĐH Quốc gia TP.HCM 220
77. ĐH Quốc gia TP.HCM 222

**Năm 1995**

78. ĐH Tổng hợp TP.HCM 223
79. ĐH Kinh tế 225
80. ĐH Ngoại thương 226
81. ĐH Tài chính – Kế toán 228
82. ĐH Sư phạm TP.HCM 230
83. ĐH Kiến trúc 232

**Năm 1994**

84. ĐH Tổng hợp TP.HCM (khối A, B) 233
85. ĐH Tổng hợp TP.HCM (khối D) 235
86. ĐH Kinh tế 235
87. ĐH Bách khoa TP.HCM 237
88. ĐH Kiến trúc TP.HCM 238
89. ĐH Y Dược TP.HCM 239
90. ĐH Sư phạm TP.HCM 241
91. ĐH Ngoại thương 243
92. ĐH Bách khoa TP.HCM 244

**Năm 1993**

93. ĐH Sư phạm Kĩ thuật (khối B) 247
94. ĐH Nông lâm 249
95. ĐH Tổng hợp (khối A, B) 251
96. ĐH Kinh tế 253
97. ĐH Bách khoa TP.HCM 256
98. ĐH Y Dược TP.HCM 258
99. TT Đào tạo Bồi dưỡng Cán bộ Y tế TP.HCM 261
100. ĐH Kiến trúc 262
101. ĐH Ngoại thương 264
102. ĐH Sư phạm TP.HCM 265

www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS

**NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI**
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: (04) 9718312; (04) 9724770. Fax: (04) 9714899
E-mail: nxb@vnu.edu.vn

* * *

***Chịu trách nhiệm xuất bản:***

*Giám đốc:* PHÙNG QUỐC BẢO

*Tổng biên tập:* NGUYỄN BÁ THÀNH

*Biên tập:* HẢI ĐĂNG

*Sửa bài:* PHẠM THỊ CẨM TIÊU

*Trình bày bìa:* NGỌC ANH

**PHƯƠNG PHÁP KHẢO SÁT HÀM SỐ**

Mã số: 1L – 143 ĐH 2006

In 2.000 cuốn, khổ 16 × 24cm tại Xưởng in Chi nhánh Công ti Phát triển Công nghệ và Truyền hình – TP. Hồ Chí Minh.

Số xuất bản: 795 – 2006/CXB/ 2 – 159/ĐHQGHN, ngày 20/10/2006.

Quyết định xuất bản số: 376 LK/XB.

In xong và nộp lưu chiểu quý IV năm 2006.

Facebook.com/TeacherSokPisith www.pisethsok.wordpress.com plus.google.com/+PisethSok_SPS