វិញ្ញាសាប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបង្រៀនកម្រិតឧត្តម

បរិញ្ញា +១ ជំនាន់ទី១៣

សម័យប្រឡង ថ្ងៃ ទី ០១ ខែ វិច្ឆិកា ឆ្នាំ ២០០៧

មុខវិជ្ជាឯកទេស ៖ គណិតវិទ្យា រយៈពេល ២ម៉ោង

(៤ពិន្ទុ) ១. ក្នុងតម្រុយកូអរដោនេគេមានចំណុច $C(4, 3)$ ជាកំពូលមួយនៃត្រីកោណ ABC ។ គេដឹងថាបន្ទាត់ពុះមុំក្នុងមួយនៃត្រីកោណមានសមីការ $x + 2y - 5 = 0$ និងមេដ្យានមួយមានសមីការ $4x + 13y - 10 = 0$ ដែលបន្ទាត់ពុះមុំក្នុងនិងមេដ្យាននេះគូសចេញពីកំពូល A តែមួយ។ ចូរសរសេរសមីការជ្រុង (AC), (AB) និង (BC) នៃត្រីកោណ ABC ។

(៤ពិន្ទុ) ២. ក. រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល : $y' - y\cos x = y^2\cos x$ ។

ខ. រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល : $y'' + 3y' + 2y = 6xe^{-x}(1 - e^{-x})$ ។

(៤ពិន្ទុ) ៣. ក. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទ De Moivre: $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ ។

ខ. ចូរគណនា $\cos 5\theta$ ជាអនុគមន៍នៃ $\cos\theta$ និង $\sin 5\theta$ ជាអនុគមន៍នៃ $\sin\theta$ ។

(៤ពិន្ទុ) ៤. គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $]0, +\infty[$ ដោយ $f(x) = \dfrac{2\ln x}{x^2 + x}$ ។

ក. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $x > 1$ គេបាន : $\dfrac{\ln x}{x} \geq f(x) \geq \dfrac{\ln x}{x^2}$ ។

ខ. គណនាចន្លោះនៃតម្លៃ $\int_2^4 f(x)dx$ ។

(៤ពិន្ទុ) ៥. គេមានគូប $ABCD\text{-}EFGH$ ដែលមានទ្រនុងស្មើនឹងមួយឯកតា។ តាម A គេគូស អង្កត់មួយកែងនឹងអង្កត់ទ្រូងខាងក្នុង DF ត្រង់ M ហើយជួបនឹងប្លង់ $CDHG$ ត្រង់ N ។ គេតាងទ្រនុងទាំងបីដែលគូសចេញពីកំពូល A ដោយ $\overrightarrow{AB} = \vec{c}, \overrightarrow{AE} = \vec{b}, \overrightarrow{AD} = \vec{a}$ ។

ក. បង្ហាញថា $\overrightarrow{AM}$ ជាបន្សំលីនេអ៊ែរនៃ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ។

ខ. បង្ហាញថា $\overrightarrow{AN}$ ជាបន្សំលីនេអ៊ែរនៃ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ។

ចងក្រងដោយ លោកស្រី ទី ប៉ុលីរ៉េត

វិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ

Tel: 017 98 78 27

កំណែវិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបង្រៀនកម្រិតឧត្តម
បរិញ្ញា +១ ជំនាន់ទី១៣
សម័យប្រឡង ថ្ងៃ ទី ០១ ខែ វិច្ឆិកា ឆ្នាំ ២០០៧

(៤ពិន្ទុ) ១. សរសេរសមីការជ្រុង $(AC), (AB), (BC)$ ។

តាងមេដ្យាន $(AN): x+2y-5=0$ និងកំពស់ $(AM): 4x+13y-10=0$

គេបានកូអរដោនេនៃ A ជាគូចម្លើយនៃប្រព័ន្ធសមីការ : $\begin{cases} x+2y-5=0 \\ 4x+13y-10=0 \end{cases}$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការនេះ យើងបាន x=9 និង y = -2។

ដោយ $A(9,-2)$ និង $C(4,3)$ នោះបន្ទាត់ AC មានសមីការ :

$$\frac{y-y_A}{x-x_A}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}$$

$$\Leftrightarrow \frac{y+2}{x-9}=\frac{3+2}{4-9}$$

ដូច្នេះ $AC: \ x+y-7=0$

តាង θ ជាមុំផ្គុំដោយបន្ទាត់ AC និង AN គេបាន $\angle CAN=\angle NAB=\theta$

បើ m_1, m_2 និង m_3 ជាមេគុណប្រាប់ទិសរៀងគ្នានៃបន្ទាត់ $AC,\ AN$ និង AB នោះគេបាន :

$\tan\theta=\dfrac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}$ ដោយ $m_1=-1,\ m_2=-\dfrac{1}{2}$ នោះ $\tan\theta=\dfrac{-\frac{1}{2}+1}{1+\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{3}$

ដូចគ្នានេះដែរ គេបាន :

$\tan\theta=\dfrac{m_3-m_2}{1+m_3m_2}=\dfrac{m_3+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}m_3}=\dfrac{1}{3}$ នាំឲ្យបាន : $6m_3+3=2-m_3$ ឬ $m_3=-\dfrac{1}{7}$

គេបានសមីការបន្ទាត់ AB គឺ : $y=-\dfrac{1}{7}x+b$

ដោយបន្ទាត់ AB កាត់តាម $A(9,-2)$ នោះ $-2=-\dfrac{1}{7}9+b$ និង $b=-\dfrac{5}{7}$

ដូច្នេះ $AB: \ y=-\dfrac{1}{7}x-\dfrac{5}{7}$ ឬ $AB: x+7y+5=0$

ដោយ M ជាជើងមេដ្យានគូសចេញពីកំពូល A នោះកូអរដោនេនៃ M គឺ:

$$x_M=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{x_B+4}{2}$$

និង $y_M=\dfrac{y_B+y_C}{2}=\dfrac{y_B+3}{2}$

ដោយ M នៅលើបន្ទាត់ AM នោះគេបាន :

$$4x_M+13y_M-10=0 \quad \Leftrightarrow \quad 4\left(\frac{x_B+4}{2}\right)+13\left(\frac{y_B+3}{2}\right)-10=0$$

www.pisethsok.wordpress.com

$\Leftrightarrow\ 2x_B+8+\frac{13}{2}y_B+\frac{39}{2}-10=0$

$\Leftrightarrow\ 4x_B+13y_B+35=0$

ដោយ B នៅលើបន្ទាត់ AB នោះគេបាន: $x_B+7y_B+5=0$

កូអរដោនេនៃ B ជាគូចម្លើយនៃប្រព័ន្ធសមីការ : $\begin{cases}4x_B+13y_B+35=0\\ x_B+7y_B+5=0\end{cases}$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការនេះ យើងបាន $x=-12$ និង $y=1$ ។

ដោយ $B(-12,1)$ និង $C(4,3)$ នោះបន្ទាត់ BC មានសមីការ

$$\frac{y-y_B}{x-x_B}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}\Leftrightarrow\ \frac{y-1}{x+12}=\frac{2}{16}$$

ដូច្នេះ $BC:\ x-8y+20=0$

(៨ពិន្ទុ) ២.

ក. ដោះស្រាយសមីការ $y'-y\cos x=y^2\cos x\,(1)$

ចែកអង្គទាំង២នឹង y^2: $\frac{y'}{y^2}-\frac{1}{y}\cos x=\cos x\quad(i)$

តាង $u=\frac{1}{y}$ គេបាន $u'=-\frac{y'}{y^2}$

$(i)\Leftrightarrow u'+u\cos x=-\cos x$

(ii)ជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរលំដាប់១មិនអូម៉ូហ្សែន

របៀបទី១ : កត្តាអាំងតេក្រាល $\mu(x)=e^{\int\cos x dx}=e^{\sin x}$ នាំឲ្យ

$u=\frac{1}{e^{\sin x}}\int e^{\sin x}(-\cos x)dx+\frac{c}{e^{\sin x}}=e^{-\sin x}(-e^{\sin x})+ce^{-\sin x}=-1+ce^{-\sin x}$ និង $u=\frac{1}{y}$

ដូច្នេះ $y=\frac{1}{ce^{-\sin x}-1}$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ(1)

របៀបទី២ : ដោះស្រាយសមីការ $u'+u\cos x=0$

$$\frac{du}{dx}=-u\cos x\Rightarrow\int\frac{du}{u}=-\int\cos x dx$$

$$\Rightarrow\ \ln|u|=-\sin x+c$$

$$\Rightarrow\ u=\pm e^{-\sin x}e^{c}=Ae^{-\sin x}$$ (យក $A=\pm e^{C}$ ថេរ) ។

ធ្វើបម្រែបម្រួលចំនួនថេរ A តាង $u=A(x)e^{-\sin x}\Rightarrow\ u'=A'(x)e^{-\sin x}-A(x)e^{-\sin x}\cdot\cos x$

នោះសមីការ (ii): $A'(x)e^{-\sin x}-A(x)e^{-\sin x}\cdot\cos x+A(x)e^{-\sin x}\cdot\cos x=-\cos x$

$A'(x)e^{-\sin x}=-\cos x$

$$A(x)=\int(-\cos x)e^{\sin x}dx=-e^{\sin x}+c$$

$u=\left(-e^{\sin x}+c\right)e^{-\sin x}=-1+ce^{-\sin x}$ ដូច្នេះ $y=\frac{1}{ce^{-\sin x}-1}$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (1) ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការ $y''+3y'+2y=6xe^{-x}(1-e^{-x})$ (2)

សមីការ $y''+3y'+2y=0$ មានសមីការសម្គាល់ $\lambda^2+3\lambda+2=0$ ដែលមានឫស $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=-2$ ។

ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y''+3y'+2y=0$ គឺ $y=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}$ និងយើងបាន: $y_1=e^{-x}$, $y_2=e^{-2x}$

របៀបទី១ : ធ្វើបម្រែបម្រួលប៉ារ៉ាម៉ែត្រ c_1 និង c_2: $y=c_1(x)e^{-x}+c_2(x)e^{-2x}$

$$y_1=e^{-x},\quad y_1'=-e^{-x},\quad y_2=e^{-2x},\quad y_2'=-2e^{-2x}$$

c_1' និង c_2' ជាគូចម្លើយនៃប្រព័ន្ធសមីការ: $\begin{cases}e^{-x}c_1'+e^{-2x}c_2'=0\\ -e^{-x}c_1'-2e^{-2x}c_2'=6xe^{-x}(1-e^{-x})\end{cases}$

យើងបាន

$$w(y_1,y_2)=\begin{vmatrix}e^{-x} & e^{-2x}\\ -e^{-x} & -2e^{-2x}\end{vmatrix}=-e^{-3x}$$

$$c_1'(x)=\frac{\begin{vmatrix}0 & e^{-2x}\\ 6xe^{-x}(1-e^{-x}) & -2e^{-2x}\end{vmatrix}}{-e^{-3x}}=\frac{-6xe^{-3x}+6xe^{-4x}}{-e^{-3x}}=6x-6xe^{-x}$$

$$c_2'(x)=\frac{\begin{vmatrix}e^{-x} & 0\\ -e^{-x} & 6xe^{-x}(1-e^{-x})\end{vmatrix}}{-e^{-3x}}=\frac{6xe^{-2x}-6xe^{-3x}}{-e^{-3x}}=-6xe^{x}+6x$$

$$c_1(x)=\int\left(6x-6xe^{-x}\right)dx=3x^2+6xe^{-x}-6e^{-x}+A$$

$$c_2(x)=\int\left(-6xe^{x}+6x\right)dx=-6xe^{x}-6e^{x}+3x^2+B$$

$$y=c_1(x)e^{-x}+c_2(x)e^{-2x}$$

$$y=3x^2e^{-x}+6xe^{-2x}-6e^{-2x}+Ae^{-x}-6xe^{-x}-6e^{-x}+3x^2e^{-2x}+Be^{-2x}$$

$$y=(A-6)e^{-x}+(B-6)e^{-2x}+(3x^2-6x)e^{-x}+(3x^2+6x)e^{-2x}$$

ដូច្នេះ $y=Ce^{-x}+De^{-2x}+(3x^2-6x)e^{-x}+(3x^2+6x)e^{-2x}$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ(2)

របៀបទី២ : ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y''+3y'+2y=0$ គឺ $y_c=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}$

ចម្លើយពិសេសនៃសមីការ $y''+3y'+2y=6xe^{-x}(1-e^{-x})$ (2)មានរាងទូទៅ :

$$y_p=(Ax^2+Bx)e^{-x}-(Cx^2+Dx)e^{-2x}$$

$$y_p'=(2Ax+B)e^{-x}-(Ax^2+Bx)e^{-x}-(2Cx+D)e^{-2x}+2(Cx^2+Dx)e^{-2x}$$

$$y_p'=(2Ax+B-Ax^2-Bx)e^{-x}-(2Cx+D-2Cx^2-2Dx)e^{-2x}$$

$$y_p''=(2A-2Ax-B)e^{-x}-(2Ax+B-Ax^2-Bx)e^{-x}-(2C-4Cx-2D)e^{-2x}$$
$$+(4Cx+2D-4Cx^2-4Dx)e^{-2x}$$

$$y_p''=(2A-2B-4Ax+Bx+Ax^2)e^{-x}+(8Cx+4D-2C-4Cx^2-4Dx)e^{-2x}$$

$$(2)\Leftrightarrow\ (2A+B+2Ax)e^{-x}+(2C+2Cx-D)e^{-2x}=6xe^{-x}(1-e^{-x})$$

$$\Leftrightarrow\ (2A+B)e^{-x}+2Axe^{-x}+(2C-D)e^{-2x}+2Cxe^{-2x}=6xe^{-x}-6xe^{-2x};\ \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2A+B=0\\2A=6\\2C-D=0\\2C=-6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=3\\B=-6\\C=-3\\D=-6\end{cases}\Rightarrow\ y_p=(3x^2-6x)e^{-x}+(3x^2+6x)e^{-2x}$$

ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ(2) គឺ $y=y_c+y_p$

ដូច្នេះ $y=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}+(3x^2-6x)e^{-x}+(3x^2+6x)e^{-2x}$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (2)

(៨ពិន្ទុ) ៣.

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទ De Moivre : $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$ ។

តាមរូបមន្ត*Euler*: $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

$$e^{in\theta}=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

តែ $e^{in\theta}=(e^{i\theta})^n=(\cos\theta+i\sin\theta)^n$

ដូច្នេះ $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$

ខ. គណនា $\cos 5\theta$ ជាអនុគមន៍នៃ $\cos\theta$ និង $\sin 5\theta$ ជាអនុគមន៍នៃ $\sin\theta$

របៀបទី១ : តាមរូបមន្តដឺម័រ: $(\cos\theta+i\sin\theta)^5=\cos 5\theta+i\sin 5\theta$ និង

តាមទ្រឹស្តីបទទ្វេធាយើងបាន :

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^5=\cos^5\theta+5\cos^4 i\sin\theta+10\cos^3\theta i^2\sin^2\theta+10\cos^2\theta i^3\sin^3\theta$$
$$+5\cos\theta i^4\sin^4\theta+\sin^5\theta$$
$$=\cos^5\theta-10\cos^3\theta\sin^2\theta+5\cos\theta\sin^4\theta$$
$$+i(5\cos^4\theta\sin\theta-10\cos^2\theta\sin^3\theta+\sin^5\theta)$$

$$\Rightarrow\quad \cos 5\theta=\cos^5\theta-10\cos^3\theta\sin^2\theta+5\cos\theta\sin^4\theta$$

$$\sin 5\theta=5\cos^4\theta\sin\theta-10\cos^2\theta\sin^3\theta+\sin^5\theta$$

$$\cos 5\theta=\cos^5\theta-10\cos^3\theta(1-\cos^2\theta)+5\cos\theta(1-\cos^2\theta)^2$$
$$=\cos^5\theta-10\cos^3\theta+10\cos^5\theta+5\cos\theta-10\cos^3\theta+5\cos^5\theta$$

ដូច្នេះ $\cos 5\theta=16\cos^5\theta-20\cos^3\theta+5\cos\theta$

$$\sin 5\theta=5(1-\sin^2\theta)^2\sin\theta-10(1-\sin^2\theta)\sin^3\theta+\sin^5\theta$$
$$=5\sin\theta-10\sin^3\theta+5\sin^5\theta-10\sin^3\theta+10\sin^5\theta+\sin^5\theta$$

ដូច្នេះ $\sin 5\theta=16\sin^5\theta-20\sin^3\theta+5\sin\theta$

របៀបទី២ : បង្ហាញ $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$ តាមវិធាចារកំណើន

$n=1$: $(\cos\theta+i\sin\theta)^1=\cos\theta+i\sin\theta$ ពិត

$n=2$: $(\cos\theta+i\sin\theta)^2=\cos^2\theta+2i\cos\theta\sin\theta+i^2\sin^2\theta$

$=\cos^2\theta-\sin^2\theta+i\cos\theta\sin\theta=\cos 2\theta+i\sin 2\theta$ ពិត

. . . .

ឧបមាថា $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$ ពិតរហូតដល់ n ។ យើងនឹងបង្ហាញថាពិត រហូតដល់

$(n+1): \quad (\cos\theta + i\sin\theta)^{n+1} = \cos(n+1)\theta + i\sin(n+1)\theta$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{n+1} = (\cos\theta + i\sin\theta)^{n}(\cos\theta + i\sin\theta) = (\cos n\theta + i\sin n\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$= \cos n\theta\cos\theta - \sin n\theta\sin\theta + i(\sin n\theta\cos\theta + \sin\theta\cos n\theta)$$

$= \cos(n+1)\theta + i\sin(n+1)\theta$ ពិត

ដូច្នេះ $(\cos\theta + i\sin\theta)^{n} = \cos n\theta + i\sin n\theta$ ពិតចំពោះគ្រប់ $n \in \{1, 2, 3, ...\}$

(៨ពិន្ទុ) ៤.

ក. បង្ហាញថា : $\frac{\ln x}{x} \geq f(x) \geq \frac{\ln x}{x^2}$ ចំពោះ $x > 1$ ដែល $f(x) = \frac{2\ln x}{x^2 + x}$

- បើ $x > 1$ គេបាន $2 \geq 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow 2 \geq \frac{x+1}{x}$

ដោយគុណយកភាគយកនឹងភាគបែងនៃអង្គទី២នឹង x នោះ $2 \geq \frac{x^2 + x}{x^2}$

- បើ $x > 1$ នោះ $\ln x > 0 \Rightarrow 2\ln x \geq \frac{x^2 + x}{x^2}\ln x \Rightarrow \frac{2\ln x}{x^2 + x} \geq \frac{\ln x}{x^2}$ (1)

- បើ $x > 1$ នោះ $1 + x \geq 2 \Rightarrow \frac{x^2 + x}{x} \geq 2 \Rightarrow \frac{x^2 + x}{x}\ln x \geq 2\ln x$

$$\frac{\ln x}{x} \geq \frac{2\ln x}{x^2 + x} \quad (2)$$

ដូច្នេះ (1) និង (2) $\Rightarrow \frac{\ln x}{x} \geq f(x) \geq \frac{\ln x}{x^2}$

ខ. គណនាចន្លោះនៃតំលៃ $\int_2^4 f(x)dx$

បើ $\frac{\ln x}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{\ln x}{x} \Rightarrow \int_2^4 \frac{\ln x}{x^2}dx \leq \int_2^4 f(x)dx \leq \int_2^4 \frac{\ln x}{x}dx$

$$\int_2^4 \frac{\ln x}{x^2}dx = \int_2^4 u\,dv, \quad \left(u = \ln x, \ dv = \frac{1}{x}dx\right)$$

$$= \left[\frac{\ln x}{x}\right]_2^4 - \int_2^4\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx = -\frac{\ln 4}{4} + \frac{\ln 2}{2} - \left[\frac{1}{x}\right]_2^4$$

$$= -\frac{2\ln 2}{4} + \frac{2\ln 2}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\int_2^4 \frac{\ln x}{x}dx = \int_2^4 u\,dx = \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_2^4 = \frac{(\ln 4)^2}{2} - \frac{(\ln 2)^2}{2}$$

$$= \frac{(2\ln 2)^2}{2} - \frac{(\ln 2)^2}{2} = \frac{(2\ln 2 - \ln 2)(2\ln 2 + \ln 2)}{2} = \frac{3}{2}(\ln 2)^2$$

ដូច្នេះ $\boxed{\frac{1}{4} \leq \int_2^4 f(x)dx \leq \frac{3}{2}(\ln 2)^2}$

(៨ពិន្ទុ) ៥.

តាង $g(x) = f(x) - \frac{\ln x}{x}$

$g(x) = \frac{2\ln x}{x^2+x} - \frac{\ln x}{x} = \frac{2\ln x - (x+1)\ln x}{x(x+1)}$

$g(x) = \frac{(1-x)\ln x}{x(x+1)}$

បើ $x > 1 \Rightarrow 1 - x < 0$

បើ $\ln x > 0$

$\Rightarrow g(x) < 0$

$\Rightarrow f(x) - \frac{\ln x}{x} < 0$

$\Rightarrow f(x) < \frac{\ln x}{x}$

តាង $h(x) = f(x) - \frac{\ln x}{x^2} = \frac{2\ln x}{x^2+x} - \frac{\ln x}{x^2} = \frac{2\ln x - (x+1)\ln x}{x^2(x+1)}$

$h(x) = \frac{(x-1)\ln x}{x^2(x+1)}$

បើ $x > 1 \Rightarrow x - 1 > 0, \ln x > 0$

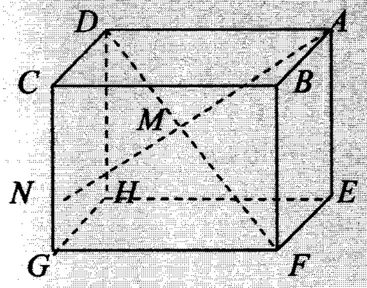
$\Rightarrow h(x) > 0$

$\Rightarrow f(x) - \frac{\ln x}{x^2} > 0$

$f(x) > \frac{\ln x}{x^2}$ (..)

(៣) $\Rightarrow \frac{\ln x}{x} > f(x) > \frac{\ln x}{x^2}$

ក. បង្ហាញថា $\overrightarrow{AM}$ ជាបន្សំលីនេអ៊ែរនៃ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$



បើ M ចែកអង្កត់ AB ក្នុងផលធៀប t និង $(1-t)$ នោះគេបាន $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AD} + (1-t)\overrightarrow{AF}$

$\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AD} + (1-t)\overrightarrow{AF} = t\overrightarrow{AD} + (1-t)\left(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF}\right) = t\overrightarrow{AD} + (1-t)\overrightarrow{AE} + (1-t)\overrightarrow{EF}$

$\overrightarrow{AM} = t\vec{a} + (1-t)\vec{b} + (1-t)\vec{c}$ (1)

$AM \perp DF \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AM} \times \overrightarrow{DF} = 0$

$\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ (2)

(1) និង (2) $\Rightarrow \overrightarrow{AM} \times \overrightarrow{DF} = \left[t\vec{a} + (1-t)\vec{b} + (1-t)\vec{c}\right]\left(-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right) = 0$

ដោយ $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$ និង $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{c} = \vec{b}\cdot\vec{c} = 0$

$\left[t\vec{a} + (1-t)\vec{b} + (1-t)\vec{c}\right]\left(-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right) = 0$

$$-t + 1 - t + 1 - t = 0 \quad \Rightarrow t = \frac{2}{3}$$

(1) : $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$

ខ. បង្ហាញថា $\overrightarrow{AN}$ ជាបន្សំលីនេអ៊ែរនៃ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

ដោយ $\overrightarrow{AN}$ និង $\overrightarrow{AM}$ កូលីនេអ៊ែរនោះ $\overrightarrow{AN} = \lambda\,\overrightarrow{AM}$

$$\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\lambda\vec{a} + \frac{1}{3}\lambda\vec{b} + \frac{1}{3}\lambda\vec{c} \quad \text{(i)}$$

ម្យ៉ាងទៀត $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$ ហើយដោយ N នៅក្នុងប្លង់ $CDHG$ នោះគេអាចបាន:

$$\overrightarrow{DN} = \alpha\overrightarrow{DC} + \beta\overrightarrow{DH} = \alpha\vec{c} + \beta\vec{b}$$

$\overrightarrow{AN} = \vec{a} + \alpha\vec{c} + \beta\vec{b}$ (ii)

តាម (i) និង (ii) $\Rightarrow \frac{2}{3}\lambda\vec{a} + \frac{1}{3}\lambda\vec{b} + \frac{1}{3}\lambda\vec{c} = \vec{a} + \alpha\vec{c} + \beta\vec{b}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}\lambda = 1 \\ \frac{1}{3}\lambda = \alpha = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{3}{2} \\ \alpha = \beta = \frac{1}{2} \end{cases}$$

ដូច្នេះ: $\overrightarrow{AN} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ ។ល។

វិញ្ញាសាប្រឡងជ្រើសរើសគរុនិស្សិតកម្រិតឧត្តម

បរិញ្ញា +១ ជំនាន់ទី ១៥

សម័យប្រឡង: ថ្ងៃទី ០២ ខែតុលា ឆ្នាំ ២០០៩

គណិតវិទ្យា ឯកទេសទី ១ : រយៈពេល ២ ម៉ោង

៣ពិន្ទុ I. គេឲ្យអនុគមន៍ g ដែលចំពោះគ្រប់ a, b ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌខាងក្រោម : $g(a+b)-g(a)-g(b)=0$ ឬ 1

$g(2)=0$, $g(3)>0$ និង $g(9999)=3333$

ចូរកំណត់រកតម្លៃ $g(2010)$ ។

៣ពិន្ទុ II. រកតម្លៃ x ដែលជាឫសនៃសមីការ $12\cosh^2 x+\sinh x=24$ ។

២ ពិន្ទុ III. ១. ចូរឲ្យនិយមន័យប៉ារ៉ាបូល ***តាមន័យធរណីមាត្រ*** ។

២. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាបូលដែលបន្ទាត់ប្រាប់ទិស D មានសមីការ $x=a$ និងកំណុំ $F(c,b)$ ។ (យក $a>0, c<0$)។

៦ ពិន្ទុ IV. គេមានត្រីកោណ DEF ដែល $DE=4, EF=8$ និង $DF=6$ ហើយ I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ DEF។

១. គណនាកូស៊ីនុសនៃមុំ $\angle EDF$ ។

២. បង្ហាញថា $\overrightarrow{DI}=m\overrightarrow{DE}+n\overrightarrow{DF}$ ដែល m និង n ជាចំនួនដែលត្រូវរក។

៣. បន្ទាត់ពុះក្នុងមុំ $\angle EFD$ កាត់ DE ត្រង់ M ។ បង្ហាញថា $\overrightarrow{FM}=a\overrightarrow{FD}+b\overrightarrow{FE}$ ដែល a និង b ជាចំនួនដែលត្រូវរក។

៣ពិន្ទុ V. តើមានចំនួនប៉ុន្មានករណីដែលអាចកើតឡើងក្នុងការបែងចែកក្មេងប្រុស ៩៩ នាក់ជា ៩ ក្រុមកីឡាបាល់ទាត់ដែលក្រុមនីមួយៗមានសមាជិក ១១ នាក់។

៣ពិន្ទុ VI. ក្មេងម្នាក់មានកម្ពស់ $1.60m$ ដើរនៅពេលយប់ដោយល្បឿន $5.4m$ ក្នុងមួយនាទីឆ្ពោះទៅអំពូលភ្លើងមួយដែលនៅលើបង្គោលមានកម្ពស់ $16m$។ គេឃើញស្រមោលក្មេងនោះនៅចំពីក្រោយខ្នង។ តើចុងស្រមោលនេះថយចុះដោយល្បឿនប៉ុន្មានពេលក្មេងដើរទៅមុខ ?

វិញ្ញាសាប្រឡងជ្រើសរើសគរុនិស្សិតកម្រិតឧត្តម

"បរិញ្ញា +១" ជំនាន់ទី ១៥

សម័យប្រឡង: ថ្ងៃទី ០២ ខែតុលា ឆ្នាំ ២០០៩

គណិតវិទ្យា វិញ្ញាសាទី ១ : រយៈពេល ២ ម៉ោង

៣ពិន្ទុ I. គេឲ្យអនុគមន៍ g ដែលចំពោះគ្រប់ a, b ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានផ្ទៀងផ្ទាត់

លក្ខខណ្ឌខាងក្រោម : $g(a+b)-g(a)-g(b)=0$ ឬ 1

$g(2)=0$, $g(3)>0$ និង $g(9999)=3333$

ចូរកំណត់រកតម្លៃ $g(2010)$ ។

៣ពិន្ទុ II. រកតម្លៃ x ដែលជាឫសនៃសមីការ $12\cosh^2 x+\sinh x=24$ ។

២ ពិន្ទុ III. ១. ចូរឲ្យនិយមន័យប៉ារ៉ាបូល ***តាមន័យធរណីមាត្រ*** ។

២. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាបូលដែលបន្ទាត់ប្រាប់ទិស D មានសមីការ $x=a$ និង

កំណុំ $F(c, b)$ ។ (យក $a>0$, $c<0$)។

៦ ពិន្ទុ IV. គេមានត្រីកោណ DEF ដែល $DE=4, EF=8$ និង $DF=6$ ហើយ I ជាផ្ចិតរង្វង់

ចារឹកក្រៅត្រីកោណ DEF។

១. គណនាកូស៊ីនុសនៃមុំ $\angle EDF$ ។

២. បង្ហាញថា $\overrightarrow{DI}=m\overrightarrow{DE}+n\overrightarrow{DF}$ ដែល m និង n ជាចំនួនដែលត្រូវរក។

៣. បន្ទាត់ពុះក្នុងមុំ $\angle EFD$ កាត់ DE ត្រង់ M ។ បង្ហាញថា $\overrightarrow{FM}=a\overrightarrow{FD}+b\overrightarrow{FE}$

ដែល a និង b ជាចំនួនដែលត្រូវរក។

៣ពិន្ទុ V. តើមានចំនួនប៉ុន្មានករណីដែលអាចកើតឡើងក្នុងការបែងចែកក្មេងប្រុស ៩៩

នាក់ជា ៩ ក្រុមកីឡាបាល់ទាត់ដែលក្រុមនីមួយៗមានសមាជិក ១១ នាក់។

៣ពិន្ទុ VI. ក្មេងម្នាក់មានកម្ពស់ $1.60m$ ដើរនៅពេលយប់ដោយល្បឿន $5.4m$ ក្នុងមួយនាទី

ឆ្ពោះទៅអំពូលភ្លើងមួយដែលនៅលើបង្គោលមានកម្ពស់ $16m$។ គេឃើញ

ស្រមោលក្មេងនោះនៅចំពីក្រោយខ្នង។ តើចុងស្រមោលនេះថយចុះដោយ

ល្បឿនប៉ុន្មានពេលក្មេងដើរទៅមុខ ?

អត្រាកំណែប្រឡងជ្រើសរើសគរុនិស្សិតកម្រិតឧត្តម

"បរិញ្ញា +១" ជំនាន់ទី ១៥

សម័យប្រឡងៈ ថ្ងៃទី ០២ ខែតុលា ឆ្នាំ ២០០៩

វិញ្ញាសាៈ គណិតវិទ្យា ឯកទេសទី ១ រយៈពេល ២ ម៉ោង

(៣ពិន្ទុ) I. តាមលក្ខខ័ណ្ឌដែលឱ្យយើងមាន $g(a+b) \geq g(a) + g(b)$

បើ $a = b = 1$, នោះ $g(1+1) \geq g(1) + g(1) = 2\,g(1)$

$g(2) \geq 2\,g(1)$

ដោយ $g(2) = 0$ នោះយើងបាន $g(1) = 0$ ។

បើ $a = 2, b = 1$ នោះយើងបាន $g(3) = g(2) + g(1) + (0$ រឺ $1) = (0$ រឺ $1)$

ដោយ $g(3) \geq 0$ គេយក $g(3) = 1$

គេបាន : $g(1\times3) = g(3) = 1 \geq 1$

$g(2\times3) = g(3+3) \geq 2g(3) = 2.$

ដោយប្រើអនុមានរួមគណិតវិទ្យាយើងបាន $g(n\times3) \geq n$ ចំពោះគ្រប់ n ។

ដោយ $g(9999) = g(3\times3333) = 3333$ តំលៃនេះ ស្មើរហូតដល់យ៉ាងហោចណាស់តូចជាងរឺស្មើ $n = 3333$,

$g(n\times3) = n$ ចំពោះ $n \leq 3333$ នោះ $g(2010\times3) = 2010$

ម្យ៉ាងទៀត $2010 = g(2010\times3) \geq g(2010\times2) + g(2010) \geq 3g(2010)$

$\Rightarrow 3g(2010) \leq 2010 \Rightarrow g(2010) \leq \dfrac{2010}{3} = 670$

គេបាន $g(2010) \leq 670$ (1)

តែ $g(2010) \geq g(2007) + g(3) = g(669\times3) + g(3) = 669 + 1 = 670$ (2)

តាម (1) និង (2), យើងបាន $g(2010) = 670$

ដូច្នេះ $g(2010) = 670$ ។

(៣ពិន្ទុ) II. រកតម្លៃ x ដែលជាឫសនៃសមីការ $12\cosh^2 x + 7\sinh x = 24$

$$12\cosh^2 x + 7\sinh x = 24 \quad (1)$$

ដោយ $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \Rightarrow \cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$

(1) $: 12 + 12\sinh^2 x + 7\sinh x = 24$ ឬ $12\sinh^2 x + 7\sinh x - 12 = 0$

$\Delta = 7^2 - 4\times(-12)\times12 = 625$ គេបាន $\sinh x = \dfrac{3}{4}$; $\sinh x = -\dfrac{4}{3}$

$* \sinh x = \frac{3}{4}$ និងដោយ $\sinh x = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x})$ នោះ គេបាន :

$$\frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}) = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad 2e^{x} - 2e^{-x} - 3 = 0$$

$$2e^{2x} - 3e^{x} - 2 = 0 \quad , \quad \Delta = (-3)^2 - 4(2)(-2) = 25$$

$e^{x} = 2$; $e^{x} = -\frac{1}{2}$ មិនយកព្រោះ $e^{x} > 0$ ជានិច្ច ។

ដូច្នេះ $e^{x} = 2 \quad \Rightarrow \quad x = \ln 2$

$* \sinh x = -\frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}) = -\frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad 3e^{x} - 3e^{-x} = -8$

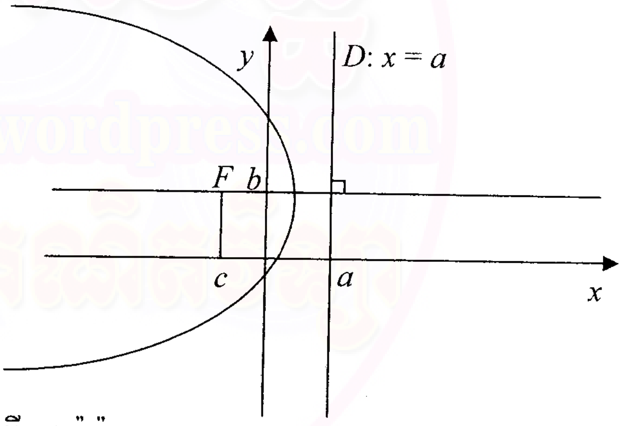
$$3e^{2x} + 8e^{x} - 3 = 0 \quad , \quad \Delta = 8^2 - 4(3)(-3) = 100$$

$e^{x} = \frac{1}{3}$; $e^{x} = -3$ មិនយកព្រោះ $e^{x} > 0$ ជានិច្ច ។

ដូច្នេះ $e^{x} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad x = \ln\frac{1}{3}$

(២ពិន្ទុ) III. ១- ប៉ារ៉ាបូលជាសំណុំចំនុច M ដែលមានចម្ងាយស្មើពីចំណុចនឹងមួយ និង បន្ទាត់នឹងមួយ ។ ចំណុចនឹងតាងដោយ F ហៅថាកំណុំ និង បន្ទាត់នឹង តាងដោយ D ហៅថាបន្ទាត់ប្រាប់ទិស ។

២. សមីការប៉ារ៉ាបូលកំពូល A



A ជាចំណុចកណ្ដាលនៃ FK

កូអរដោនេនៃ A គឺ $x = \frac{a+c}{2}$; $y = b$

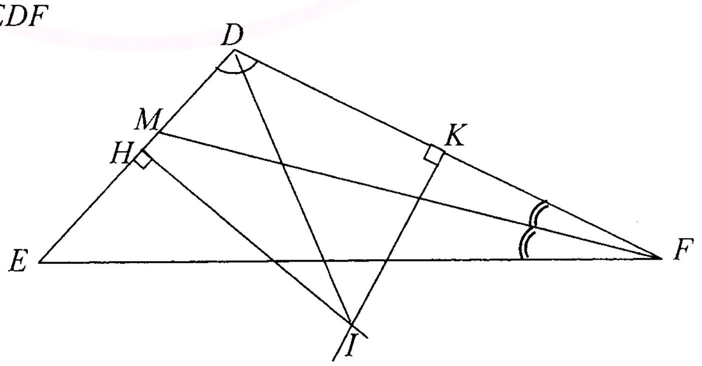
ដោយ F នៅខាងឆ្វេងបន្ទាត់ D នោះសមីការទូទៅនៃ ប៉ារ៉ាបូលគឺ : $(y-k)^2 = -2p(x-h)$

ដែល $p = Fk = a - c$

ដូចនេះ $(y-b)^2 = -2\,(a-c)\left(x - \frac{a+c}{2}\right)$ ជាសមីការប៉ារ៉ាបូលនេះ ។

(៦ពិន្ទុ) IV. ១. គណនាកូស៊ីនុសនៃមុំ $\angle EDF$

$DE = 4$; $DF = 6$, $EF = 8$



តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុសគេបាន

$EF^2 = DE^2 + DF^2 - 2DE \cdot DF \cdot \cos D$

$\cos D = \dfrac{DE^2 + DF^2 - EF}{2 \cdot DE \cdot DF} = \dfrac{16-36-64}{2 \cdot 4 \cdot 6} = -\dfrac{1}{4}$

ដូចនេះ $\quad \cos D = -\dfrac{1}{4}$

២. បង្ហាញថា $\overrightarrow{DI} = m\overrightarrow{DE} + n\overrightarrow{DF}$

$\overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{DE}$ (ព្រោះ IH ជាមេដ្យានទ័រនៃអង្កត់ DE)

$= 2 \times 4 = 8$

$\overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{DF}$ (ព្រោះ IK ជាមេដ្យានទ័រនៃអង្កត់ DF)

$= 3 \times 6 = 18$

$\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF} = \left\|\overrightarrow{DE}\right\| \left\|\overrightarrow{DF}\right\| \cos D = 4 \times 6 \times \left(-\dfrac{1}{4}\right) = -6$

ដោយ $\overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{DE} = \left(m\overrightarrow{DE} + n\overrightarrow{DF}\right) \cdot \overrightarrow{DE} \;= m\overrightarrow{DE}^2 + n\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{DE} \;= 16m - 6n \quad (1)$

$\overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{DF} = \left(m\overrightarrow{DE} + n\overrightarrow{DF}\right) \cdot \overrightarrow{DF} \;= m\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF} + n\overrightarrow{DE}^2 \;= -6m + 36n \quad (2)$

$\begin{cases} 8m - 3m = 4 \\ -m + 6n = 3 \end{cases} \Rightarrow 15m = 11$

$$m = \frac{11}{15},\ n = \frac{3 + \frac{11}{15}}{6} = \frac{28}{45}$$

ដូច្នេះ $\quad \overrightarrow{DI} = \dfrac{11}{15}\overrightarrow{DE} + \dfrac{28}{45}\overrightarrow{DF}$

៣. បង្ហាញថា វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{FM} = a\overrightarrow{FD} + b\overrightarrow{FE}$

ដោយ FM គឺជាកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ $\angle EFD$ នោះគេបាន

$\dfrac{FD}{FE} = \dfrac{DM}{ME} = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4}$

$\dfrac{DM}{ME} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow 4\overrightarrow{DM} = 3\overrightarrow{ME} = 3(\overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DM}) \qquad (\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{ME}, \overrightarrow{DE}$ កូលីនេអ៊ែរគ្នា)

$4\overrightarrow{DM} + 3\overrightarrow{DM} = 3\overrightarrow{DE}$

$7\overrightarrow{DM} = 3\overrightarrow{DE} \Rightarrow \overrightarrow{DM} = \dfrac{3}{7}\overrightarrow{DE}$

ដោយ $\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{FD} + \dfrac{7}{3}\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{FD} + \dfrac{7}{3}\left(\overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FE}\right) = \overrightarrow{FD} - \dfrac{7}{3}\overrightarrow{FD} + \dfrac{7}{3}\overrightarrow{FE} = \dfrac{4}{7}\overrightarrow{FD} + \dfrac{7}{3}\overrightarrow{FE}$

ដូច្នេះ $\overrightarrow{FM} = \dfrac{4}{7}\overrightarrow{FD} + \dfrac{7}{3}\overrightarrow{FE}$

(៣ពិន្ទុ) V. **វិធីទី ១** ដោយ ១ក្រុមមានគ្នា១១នាក់ នោះយើងធ្វើតាមវិធីដូចខាងក្រោម:

ទី១ត្រូវជ្រើសរើស ក្មេងប្រុស ១១ នាក់ ក្នុងចំនោមក្មេង ៩៩ នាក់ឱ្យនៅក្នុងក្រុមទី១ នោះយើងអាចរៀបបាន

$C_{99}^{11} = \dfrac{99!}{(99-11)!} = \dfrac{99!}{88!}$ របៀប

ទី២ត្រូវជ្រើសរើស ក្មេងប្រុស ១១ នាក់ ក្នុងចំនោមក្មេង ៨៨ នាក់ឱ្យនៅក្នុងក្រុមទី២នោះយើងអាចរៀបបាន

$C_{88}^{11} = \dfrac{88!}{(88-11)!} = \dfrac{88!}{77!}$ របៀប

ទី៣ត្រូវជ្រើសរើស ក្មេងប្រុស ១១ នាក់ ក្នុងចំនោមក្មេង ៧៧ នាក់ឱ្យនៅក្នុងក្រុមទី៣នោះយើងអាចរៀបបាន

$C_{77}^{11} = \dfrac{77!}{(77-11)!} = \dfrac{77!}{66!}$ របៀប

ទី៤ត្រូវជ្រើសរើស ក្មេងប្រុស ១១ នាក់ ក្នុងចំនោមក្មេង ៦៦ នាក់ឱ្យនៅក្នុងក្រុមទី៤នោះយើងអាចរៀបបាន

$C_{66}^{11} = \dfrac{66!}{(66-11)!} = \dfrac{66!}{55!}$ របៀប

ទី៥ត្រូវជ្រើសរើស ក្មេងប្រុស ១១ នាក់ ក្នុងចំនោមក្មេង ៥៥ នាក់ឱ្យនៅក្នុងក្រុមទី៥នោះយើងអាចរៀបបាន

$C_{55}^{11} = \dfrac{55!}{(55-11)!} = \dfrac{55!}{44!}$ របៀប

ទី៦ត្រូវជ្រើសរើស ក្មេងប្រុស ១១ នាក់ ក្នុងចំនោមក្មេង ៤៤ នាក់ឱ្យនៅក្នុងក្រុមទី៦នោះយើងអាចរៀបបាន

$C_{44}^{11} = \dfrac{44!}{(44-11)!} = \dfrac{44!}{33!}$ របៀប

ទី៧ត្រូវជ្រើសរើស ក្មេងប្រុស ១១ នាក់ ក្នុងចំនោមក្មេង ៣៣ នាក់ឱ្យនៅក្នុងក្រុមទី៧នោះយើងអាចរៀបបាន

$C_{33}^{11} = \dfrac{33!}{(33-11)!} = \dfrac{33!}{22!}$ របៀប

ទី៨ត្រូវជ្រើសរើស ក្មេងប្រុស ១១ នាក់ ក្នុងចំនោមក្មេង ២២ នាក់ឱ្យនៅក្នុងក្រុមទី៨នោះយើងអាចរៀបបាន

$C_{22}^{11} = \dfrac{22!}{(22-11)!} = \dfrac{22!}{11!}$ របៀប

ទី៩ត្រូវជ្រើសរើស ក្មេងប្រុស ១១ នាក់ ក្នុងចំនោមក្មេង ១១ នាក់ឱ្យនៅក្នុងក្រុមទី៩នោះយើងអាចរៀបបាន

$C_{11}^{11} = 1$ របៀប

តាមការរៀបនេះគេបានក្រុមក្មេងមានចំនួន :

$$\frac{99!}{88!11!}\times\frac{88!}{77!11!}\times\frac{77!}{66!11!}\times\frac{66!}{55!11!}\times\frac{55!}{44!11!}\times\frac{44!}{33!11!}\times\frac{33!}{22!11!}\times\frac{22!}{11!11!}\times 1 = \frac{99!}{(11!)^9}$$ របៀប

ដោយក្រុមនីមួយៗជាក្រុមគ្មានឈ្មោះ នោះចំនួនក្រុមដែលអាចបង្កើតបានទាំងអស់គឺ : $\dfrac{99!}{9!\times(11!)^9}$ របៀប

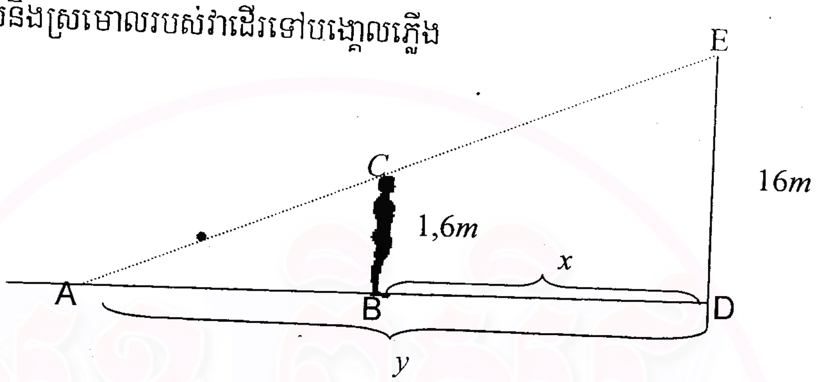
www.pisethsok.wordpress.com

វិធីទី ២

សកម្មភាពនេះជាចម្លាស់បែងចែកបាន។ ចំនួនចម្លាស់បែងចែកបាននៃក្មេង ៩៩នាក់ជា ៩ក្រុមដែលក្រុមនីមួយៗមានក្មេង១១នាក់ គឺ : $\frac{99!}{(11!)^9}$ ។ ដោយក្រុមនីមួយៗជាក្រុមគ្មានឈ្មោះ នោះចំនួនក្រុមដែលអាចបង្កើតបានទាំងអស់គឺ : $\frac{99!}{9!\times(11!)^9}$ របៀប

(៣ពិន្ទុ) VI. រកល្បឿននៃចុងស្រមោល

រូបនេះតាងចលនាក្មេងប្រុសនិងស្រមោលរបស់វាដើរទៅបង្គោលភ្លើង



$\Delta ADE \sim \Delta ABC$

$\left.\begin{matrix} ADE \\ \sim \\ ABC \end{matrix}\right| \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{16}{1\cdot 6} = 10$

$\frac{AD}{AB} = 10 \Rightarrow AD = 10AB$

តាង $x = BD$ ជាចម្ងាយពីចំណុច B ដែលក្មេងចេញដំណើរទៅគល់បង្គោល D

$y = AD$ ជាចម្ងាយពីចំណុចចុងស្រមោល A ទៅគល់បង្គោល D

គេបាន $y = 10(y-x) = 10y - 10x \quad \Rightarrow \quad 9y = 10x \quad \Rightarrow \quad 9\frac{dy}{dt} = 10\frac{dx}{dt}$

ដោយ $-\frac{dy}{dt}$ ជាល្បឿនដែលចុងស្រមោលថយទៅរក D

$\frac{dx}{dt}$ ជាល្បឿនដែលក្មេងដើរទៅមុខគឺ $\frac{dx}{dt} = 5\cdot 4 m/s$

$9\frac{dy}{dt} = 10(5\cdot 4) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 6m/s$

ដូច្នេះ ល្បឿននៃចុងស្រមោលគឺ: $6m/s$

វិញ្ញាសាប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបង្រៀនកម្រិតឧត្តម បរិញ្ញា ១ ជំនាន់ទី១៦

សម័យប្រឡង ថ្ងៃ ទី ៣០ ខែ កញ្ញា ឆ្នាំ ២០១០

មុខវិជ្ជាឯកទេស ៖ គណិតវិទ្យា រយៈពេល ២ម៉ោង

រៀបរៀងដោយអនុបណ្ឌិត ទី ប៉ូលីវ៉េត

ទូរស័ព្ទ៖០១៧ ៩៨ ៧៨ ២៧

(៤ពិន្ទុ) ១. ក. បើ a, b និង c ជាឫសនៃសមីការ $x^3-5x^2-3x+4=0$ ។ ចូរសរសេរសមីការ ដែលមានឫស $a+2$, $b+2$ និង $c+2$ ។

ខ. គេឲ្យស្វ៊ីត $(a_n)=\{a_0,a_1,a_2,...\}$ កំណត់ដោយ $a_0=0,\ a_1=1,\ a_{n+1}=\dfrac{a_n+na_{n-1}}{n+1}$ $(n\geq 1)$ ។

គណនា $A=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ ។

(៤ពិន្ទុ) ២. ក្នុងថង់មួយមានឃ្លីខៀវ 9 ចុះលេខពី 1ដល់ 9 និងឃ្លីក្រហម 9 ចុះលេខពី 1 ដល់ 9។ គេចាប់យកឃ្លី 6 ដោយចៃដន្យចេញពីថង់។ រកប្រូបាបដែល ៖

ក. ចាប់បានឃ្លីគ្មានលេខដូចគ្នាសោះ។

ខ. ចាប់បានឃ្លីមានលេខដូចគ្នា 2 គូ។

គ. យ៉ាងតិចមានឃ្លី 1 គូមានលេខដូចគ្នា។

(៤ពិន្ទុ) ៣. ក្នុងតម្រុយកែង(xOy) គេមានចំណុច $M(-3,1)$ ជាកំណុំ និង $I(-1,2)$ ជាកំពូល។

ក. ចូរសរសេរសមីការនៃប៉ារ៉ាបូលកំណុំ M កំពូល I ។

ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណដែលមានជ្រុងខណ្ឌដោយអ័ក្សអាប់ស៊ីស បន្ទាត់ប្រាប់ទិស និងអ័ក្សឆ្លុះនៃប៉ារ៉ាបូល។

(៤ពិន្ទុ) ៤. គេមានអនុគមន៍ u និង v អាស្រ័យលើអថេរ x និង t ដែល $u(x,t)=g(x)+g(t)$ និង $v(x,t)=g\left(\dfrac{x+t}{1-xt}\right)$ ។ កំណត់អនុគមន៍ g ដែលមានដេរីវេ ចំពោះគ្រប់ x និង t ហើយ $xt\neq 1$ ដើម្បីឲ្យ $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial x}$ និង $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial v}{\partial t}$ ។

(៤ពិន្ទុ) ៥. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ៖ $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{2x+3u-5}{-3x-2u+5}$ ។

កំណែវិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា

(៤ពិន្ទុ) ១. ក. បើ a , b និង c ជាឫសរបស់សមីការ $x^3-5x^2-3x+4=0$ នោះគេបាន $x=a$, $x=b$, $x=c$

ហើយបើ $f(X)=0$ មានឫស $a+2$, $b+2$ និង $c+2$ នោះគេបាន $X=x+2$ ឬ $x=X-2$ ។

តាមការប្តូរអថេរគេបាន៖

$(X-2)^3-5(X-2)^2-3(X-2)+4=0 \Leftrightarrow$

$X^3-6X^2+12X-8-5X^2+20X-20-3X+6+4=0$

គេបាន $X^3-11X^2+29X-18=0$

ជាសមីការដែលត្រូវរក។

ខ. គេមាន $a_0=0,\ a_1=1,\ a_{n+1}=\dfrac{a_n+na_{n-1}}{n+1}$

គេបាន $a_{n+1}-a_n=\dfrac{a_n+na_{n-1}}{n+1}-a_n$

$=\dfrac{a_n+na_{n-1}-na_n-a_n}{n+1}=-\dfrac{n(a_n-a_{n-1})}{n+1}$

$a_{n+1}-a_n=-\dfrac{n}{n+1}(a_n-a_{n-1})$

បើ $n=1$: $a_2-a_1=-\dfrac{1}{2}(a_1-a_0)$

បើ $n=2$: $a_3-a_2=-\dfrac{2}{3}(a_2-a_1)=\left(-\dfrac{2}{3}\right)\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)(a_1-a_0)=\dfrac{1}{3}(a_1-a_0)$

បើ $n=3$:

$a_4-a_3=-\dfrac{3}{4}(a_3-a_2)=\left(-\dfrac{3}{4}\right)\left(\dfrac{1}{3}\right)(a_1-a_0)=-\dfrac{1}{4}(a_1-a_0)$

បើ $n=4$: $a_5-a_4=-\dfrac{4}{5}(a_4-a_3)=\left(-\dfrac{4}{5}\right)\left(-\dfrac{1}{4}\right)(a_1-a_0)=\left(\dfrac{1}{5}\right)(a_1-a_0)$

តាមលំនាំនេះគេបាន $a_{n+1}-a_n=\dfrac{(-1)^n}{n+1}(a_1-a_0)$

ដោយ $a_1-a_0=1$ នាំឲ្យ $a_{n+1}-a_n=\dfrac{(-1)^n}{n+1}$

យក $a_N=\sum\limits_{n=0}^{N-1}(a_{n+1}-a_n)=\sum\limits_{n=0}^{N-1}\dfrac{(-1)^n}{n+1}$

គេបាន $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{N\to+\infty} a_N =$

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2$$

ដូច្នេះ $\boxed{A = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \ln 2}$

(៤ពិន្ទុ) ២. ក. រកប្រូបាបដែលចាប់បានឃ្លីគ្មានលេខដូចគ្នាសោះ។

តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលចាប់បានឃ្លីគ្មានលេខដូចគ្នា។

ការចាប់ឃ្លី 6 ចេញពីថង់មួយដែលមានឃ្លីពណ៌ក្រហម និងខៀវ 18 ជាបន្សំនៃ 6 ធាតុ យកពី 18 ធាតុ។ ចំនួនករណីអាចជាចំនួនបន្សំនៃ 6 ធាតុយកពី 18 ធាតុ គឺ $n(S) = C_{18}^{6} = 18564$ ករណី។ដើម្បីចាប់បានឃ្លីគ្មានលេខដូចគ្នាគឺគេចាប់យកឃ្លី 6 ក្នុងចំណោមឃ្លី 9 របស់ពណ៌ណាមួយ និងដោយឃ្លីមាន2 ពណ៌លាយគ្នា នោះចំនួនករណីដែលកើតឡើងក្នុងព្រឹត្តិការណ៍ A គឺ៖ $n(A) = C_9^6 \times 2^6$ ករណី។

ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ A គឺ៖

ដូច្នេះ $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{C_9^6\times 2^6}{C_{18}^6} = 0.2895$ ។

ខ. ប្រូបាបដែលចាប់បានឃ្លីមានលេខដូចគ្នា 2 គូ តាងដោយ $P(B)$។

ការចាប់យកឃ្លីលេខដូចគ្នា 2 គូគឺចាប់ចេញពី 9 គូ ហើយនៅសល់ឃ្លី 2 ទៀតត្រូវយកចេញពីឃ្លី 7 ដែលនៅសល់របស់ពណ៌ក្រហមឬខៀវ ។

ចំនួនករណីកើតឡើងក្នុងព្រឹត្តិការណ៍ B គឺ ៖

$n(B) = C_9^2 \times C_7^2 \times 2^2 = 3024$ ករណី ។

ដូច្នេះ $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(S)} = \dfrac{3024}{18564} = 0.1628$ ។

គ. ប្រូបាបដែលយ៉ាងតិចមានឃ្លី 1 គូមានលេខដូចគ្នាគឺ

$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.2895$

ឬ $P(\bar{A}) = 0.7105$ ។

(៤ពិន្ទុ) ៣.

ក. $M(-3,1)$, $I(-1,2)$, កូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overline{MI}$ គឺ $(2,1)$ ពីព្រោះ: $\overline{MI} = \overline{OI} - \overline{OM} = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

បន្ទាត់ (MI) មានសមីការ : $\dfrac{y-2}{1} = \dfrac{x+1}{2}$

$(MI): x - 2y + 5 = 0$, $(MI) \perp \vec{v}(1,-2)$

បើ (D) ជាបន្ទាត់ប្រាប់ទិសនៃប៉ារ៉ាបូលនោះ:

$(D) \perp (MI) = \{K\}$ ។

បើកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overline{IK}(x+1, y-2)$

នោះ $K(x,y) \Rightarrow \begin{cases} x+1 = 2 \\ y-2 = 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3\end{cases} \Rightarrow K(1,3)$

$(D) \perp (MI) \Rightarrow (D) \perp \vec{u}(2,1)$

គេបានសមីការបន្ទាត់ (D): $2x + y + C = 0$ ។

ដោយ (D) កាត់តាម $K \Rightarrow C = -5$ គេបាន

$(D): 2x + y - 5 = 0$ ។

បើ $M(x,y)$ ជាចំណុចមួយនៅលើប៉ារ៉ាបូលនោះ $IM = IH$ ដែល H ជាចំណោលកែងនៃ I លើ (D)

យើងបាន៖

$IH^2 = (-3-x)^2 + (1-y)^2 = x^2 + y^2 + 6x - 2y + 10$

និង$IH = d(I,D) = \dfrac{|2x+y-5|}{\sqrt{4+1}}$ នាំឲ្យ

$$HI^2 = \left(\frac{|2x+y-5|}{\sqrt{4+1}}\right)^2 = \frac{4x^2+y^2+25+4xy-20x-10y}{5}$$

$$x^2+y^2+6x-2y+10 = \frac{4x^2+y^2+25+4xy-20x-10y}{5}$$

ដូច្នេះ $x^2 + 4y^2 - 4xy + 50x + 25 = 0$ ជាសមីការប៉ារ៉ាបូល

ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ

យើងមាន (D) កាត់ (MI) ត្រង់ $K(1,3)$,

(MI) កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ $A(-5,0)$ និង

(D) កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ $B\left(\dfrac{5}{2}, 0\right)$

ដូច្នេះ ផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ AKB គឺ៖

$$S = \left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -5 & \frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 3\end{vmatrix}\right| = \frac{45}{4} \text{ ឯកតាផ្ទៃ}$$

(៤ពិន្ទុ) ៤. កំណត់អនុគមន៍ g

គេមាន $u(x,t) = g(x) + g(t)$, $v(x,t) = g\left(\dfrac{x+t}{1-xt}\right)$

គេបាន $\dfrac{\partial u}{\partial x} = g'(x)$, $\dfrac{\partial u}{\partial t} = g'(t)$,

www.pisethsok.wordpress.com

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1(1-xt)-(-t)(x+t)}{(1-xt)^2}=\frac{1+t^2}{(1-xt)^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1(1-xt)-(-x)(x+t)}{(1-xt)^2}=\frac{1+x^2}{(1-xt)^2}$$

ដោយ $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}$ និង $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial v}{\partial t}$ នោះ

$g'(x)=\frac{1+t^2}{(1-xt)^2}$ និង $g'(t)=\frac{1+x^2}{(1-xt)^2}$

គេបាន $\frac{g'(x)}{(1+t^2)}=\frac{g'(t)}{1+x^2}$ ឬ $(1+x^2)g'(x)=(1+t^2)g'(t)$

$g'(x)=\frac{(1+t^2)g'(t)}{1+x^2}=\frac{k}{1+x^2}$ ដែល k ជាចំនួនថេរ

$\int g'(x)dx=\int\frac{k}{1+x^2}dx \Rightarrow g(x)=k\arctan x+C$ ។

(៤ពិន្ទុ) ៥ ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$\frac{du}{dx}=\frac{2x+3u-5}{-3x-2u+5}$ (1) ។

របៀបទី១ ៖

$(1):(2x+3u-5)dx+(3x+2u-5)du=$

ដោយ $\frac{\partial}{\partial u}(2x+3u-5)=3$ និង $\frac{\partial}{\partial x}(3x+2u-5)=3$

នោះ (2) ជាសមីការពិត

(1) មានរាង $dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial u}dx$ ដែល

$\frac{\partial v}{\partial x}=2x+3u-5$ និង $\frac{\partial v}{\partial u}=3x+2u-5$

បើ $\frac{\partial v}{\partial x}=2x+3u-5$

$\Rightarrow v(x,u)=\int(2x+3u-5)dx=x^2+3ux-5x+h(u)$

និង $\frac{\partial v}{\partial u}=3x+h'(u)=3x+2u-5$ នាំឲ្យ

$h'(u)=2u-5 \Rightarrow h(u)=u^2-5u$

គេបាន $v(x,u)=x^2+3ux-5x+u^2-5u$

បើ $dv=0$ នោះ $v(x,u)=k$

ដូច្នេះ $x^2+3ux-5x+u^2-5u=k$

ជាចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល(1) ។

របៀបទី២ ៖ $\frac{du}{dx}=\frac{2x+3u-5}{-3x-2u+5}$ (1)

ដោយ $\begin{vmatrix}2 & 3\\ -3 & -2\end{vmatrix}=-4+9=5\neq 0$ នោះ៖

គេតាង $x=t+h$, $u=y+k$ ដែល h និង k

ជាគូចម្លើយនៃប្រព័ន្ធសមីការ៖

$$\begin{cases}2h+3k-5=0 & \times 3\\ -3h-2k+5=0 & \times 2\end{cases}$$

$$\begin{array}{r}6h+9k-15=0\\ + \quad -6h-4k+10=0\\ \hline 5k-5=0\Rightarrow k=1,\ h=1\end{array}$$

យើងបាន៖ $x=t+1\Rightarrow t=x-1,\ dx=dt$

$u=y+1\Rightarrow y=u-1,\ du=dy$

$$(1):\ \frac{dy}{dt}=\frac{2(t+1)+3(y+1)-5}{-3(t+1)-2(y+1)+5}$$

$$=\frac{2t+3y}{-3t-2y}=\frac{t\left(2+3\frac{y}{t}\right)}{t\left(-3-2\frac{y}{t}\right)}=\frac{2+3\frac{y}{t}}{-3-2\frac{y}{t}}\quad (2)$$

តាង $z=\frac{y}{t}\Rightarrow y=zt\Rightarrow dy=tdz+zdt$,

$$(2)\Leftrightarrow\frac{dy}{dt}=\frac{tdz+zdt}{dt}=\frac{2+3z}{-3-2z}$$

$$\frac{tdz}{dt}=\frac{2+3z}{-3-2z}-z=\frac{2+6z+2z^2}{-3-2z}$$

$$\Rightarrow\frac{-3-2z}{2+6z+2z^2}dz=\frac{dt}{t}$$

$$\frac{-1}{2}\times\frac{3+2z}{1+3z+z^2}dz=\frac{dt}{t}$$

$$\frac{tdz}{dt}=\frac{2+3z}{-3-2z}-z=\frac{2+6z+2z^2}{-3-2z}$$

$$\Leftrightarrow\frac{-3-2z}{2+6z+2z^2}dz=\frac{dt}{t}$$

ធ្វើអាំងតេក្រាលលើអង្គសងខាង គេបាន៖

$$\frac{-1}{2}\int\frac{3+2z}{1+3z+z^2}dz=\int\frac{dt}{t}$$

$$\frac{-1}{2}\ln\left|1+3z+z^2\right|=\ln|t|+C$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+3z+z^2}}=At\qquad (A=e^C)$$

$$1+3z+z^2=\frac{1}{A^2t^2}$$

$$t^2+3yt+y^2=\frac{1}{A^2}$$

$$(x-1)^2+3(u-1)(x+1)+(u-1)^2=\frac{1}{A^2}$$

$$x^2+u^2+3ux-5x-5u=k\qquad \left(k=\frac{1}{A^2}\right)$$

ជាចម្លើយនៃសមីការ។