**វិញ្ញាសាប្រឡងជ្រើសរើសគរុនិស្សិតកម្រិតឧត្តម**

**"បរិញ្ញា +១" ជំនាន់ទី ១៥**

**សម័យប្រឡងៈ ថ្ងៃទី ០២ ខែតុលា ឆ្នាំ ២០០៩**

**គណិតវិទ្យា ឯកទេសទី ១ : រយៈពេល ២ ម៉ោង**

**៣ពិន្ទុ** I. គេឲ្យអនុគមន៍ $g$ ដែលចំពោះគ្រប់ $a, b$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌខាងក្រោម : $g(a+b)-g(a)-g(b)=0$ ឬ 1

$g(2)=0$ , $g(3)>0$ និង $g(9999)=3333$

ចូរកំណត់រកតម្លៃ $g(2010)$ ។

**៣ពិន្ទុ** II. រកតម្លៃ $x$ ដែលជាឬសនៃសមីការ $12\cosh^2 x+\sinh x=24$ ។

**២ ពិន្ទុ** III. ១. ចូរឲ្យនិយមន័យប៉ារ៉ាបូល ***តាមន័យធរណីមាត្រ*** ។

២. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាបូលដែលបន្ទាត់ប្រាប់ទិស $D$ មានសមីការ $x=a$ និងកំណុំ $F(c, b)$ ។ ( យក $a>0$ , $c<0$ )។

**៦ ពិន្ទុ** IV. គេមានត្រីកោណ $DEF$ ដែល $DE=4, EF=8$ និង $DF=6$ ហើយ $I$ ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ $DEF$។

១. គណនាកូស៊ីនុសនៃមុំ $\angle EDF$ ។

២. បង្ហាញថា $\overrightarrow{DI}=m\overrightarrow{DE}+n\overrightarrow{DF}$ ដែល $m$ និង $n$ ជាចំនួនដែលត្រូវរក។

៣. បន្ទាត់ពុះក្នុងមុំ $\angle EFD$ កាត់ $DE$ ត្រង់ $M$ ។ បង្ហាញថា $\overrightarrow{FM}=a\overrightarrow{FD}+b\overrightarrow{FE}$ ដែល $a$ និង $b$ ជាចំនួនដែលត្រូវរក។

**៣ពិន្ទុ** V. តើមានចំនួនប៉ុន្មានករណីដែលអាចកើតឡើងក្នុងការបែងចែកក្មេងប្រុស ៩៩ នាក់ជា ៩ ក្រុមកីឡាបាល់ទាត់ដែលក្រុមនីមួយៗមានសមាជិក ១១ នាក់។

**៣ពិន្ទុ** VI. ក្មេងម្នាក់មានកម្ពស់ $1.60m$ ដើរនៅពេលយប់ដោយល្បឿន $5.4m$ ក្នុងមួយនាទីឆ្ពោះទៅអំពូលភ្លើងមួយដែលនៅលើបង្គោលមានកម្ពស់ $16m$។ គេឃើញស្រមោលក្មេងនោះនៅចំពីក្រោយខ្នង។ តើចុងស្រមោលនេះថយចុះដោយល្បឿនប៉ុន្មានពេលក្មេងដើរទៅមុខ ?

www.pisethsok.wordpress.com

**អត្រាកំណែប្រឡងជ្រើសរើសគរុនិស្សិតកម្រិតឧត្តម**

**"បរិញ្ញា +១" ជំនាន់ទី ១៥**

**សម័យប្រឡង: ថ្ងៃទី ០២ ខែតុលា ឆ្នាំ ២០០៩**

**វិញ្ញាសា: គណិតវិទ្យា ឯកទេសទី ១ រយៈពេល ២ ម៉ោង**

( ៣ពិន្ទុ ) I. តាមលក្ខខ័ណ្ឌដែលឱ្យយើងមាន $g(a+b) \geq g(a)+g(b)$

បើ $a=b=1$, នោះ $g(1+1) \geq g(1)+g(1) = 2g(1)$

$$g(2) \geq 2g(1)$$

ដោយ $g(2)=0$ នោះយើងបាន $g(1)=0$ ។

បើ $a=2$, $b=1$ នោះយើងបាន $g(3) = g(2)+g(1)+(0$ រឺ $1) = (0$ រឺ $1)$

ដោយ $g(3) \geq 0$ គេយក $g(3)=1$

គេបាន : $g(1\times 3) = g(3) = 1 \geq 1$

$g(2\times 3) = g(3+3) \geq 2g(3) = 2.$

ដោយប្រើអនុមានរួមគណិតវិទ្យាយើងបាន $g(n\times 3) \geq n$ ចំពោះគ្រប់ $n$ ។

ដោយ $g(9999) = g(3\times 3333) = 3333$ តំលៃនេះ ស្មើរហូតដល់យ៉ាងហោចណាស់តូចជាងរឺស្មើ $n = 3333$,

$g(n\times 3) = n$ ចំពោះ $n \leq 3333$ នោះ $g(2010\times 3) = 2010$

ម្យ៉ាងទៀត $2010 = g(2010\times 3) \geq g(2010\times 2) + g(2010) \geq 3g(2010)$

$\Rightarrow 3g(2010) \leq 2010 \Rightarrow g(2010) \leq \dfrac{2010}{3} = 670$

គេបាន $g(2010) \leq 670$ (1)

តែ $g(2010) \geq g(2007) + g(3) = g(669\times 3) + g(3) = 669 + 1 = 670$ (2)

តាម (1) និង (2), យើងបាន $g(2010) = 670$

ដូច្នេះ $g(2010) = 670$ ។

( ៣ពិន្ទុ ) II. រកតម្លៃ $x$ ដែលជាឫសនៃសមីការ $12\cosh^2 x + 7\sinh x = 24$

$$12\cosh^2 x + 7\sinh x = 24 \quad (1)$$

ដោយ $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \Rightarrow \cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$

(1) : $12 + 12\sinh^2 x + 7\sinh x = 24$ ឬ $12\sinh^2 x + 7\sinh x - 12 = 0$

$\Delta = 7^2 - 4\times(-12)\times 12 = 625$ គេបាន $\sinh x = \dfrac{3}{4}$ ; $\sinh x = -\dfrac{4}{3}$

$* \sinh x = \frac{3}{4}$ និងដោយ $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ នោះ គេបាន :

$$\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \frac{3}{4} \Rightarrow 2e^x - 2e^{-x} - 3 = 0$$

$$2e^{2x} - 3e^x - 2 = 0 \quad , \quad \Delta = (-3)^2 - 4(2)(-2) = 25$$

$e^x = 2$ ; $e^x = -\frac{1}{2}$ មិនយកព្រោះ $e^x > 0$ ជានិច្ច ។

ដូច្នេះ $e^x = 2 \Rightarrow x = \ln 2$

$$* \sinh x = -\frac{4}{3} \Rightarrow \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = -\frac{4}{3} \Rightarrow 3e^x - 3e^{-x} = -8$$

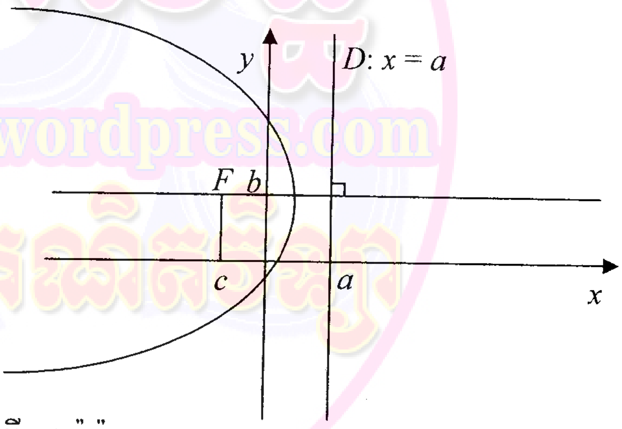
$$3e^{2x} + 8e^x - 3 = 0 \quad , \quad \Delta = 8^2 - 4(3)(-3) = 100$$

$e^x = \frac{1}{3}$ ; $e^x = -3$ មិនយកព្រោះ $e^x > 0$ ជានិច្ច ។

ដូច្នេះ $e^x = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \ln\frac{1}{3}$

(២ពិន្ទុ) III. ១- ប៉ារ៉ាបូលជាសំណុំចំនុច M ដែលមានចម្ងាយស្មើពីចំណុចនឹងមួយ និង បន្ទាត់នឹងមួយ ។ ចំណុចនឹងតាងដោយ F ហៅថាកំណុំ និង បន្ទាត់នឹង តាងដោយ D ហៅថាបន្ទាត់ប្រាប់ទិស ។

២. សមីការប៉ារ៉ាបូលកំពូល A




A ជាចំណុចកណ្តាលនៃ FK

កូអរដោនេនៃ A គឺ $x = \frac{a+c}{2}$ ; $y = b$

ដោយ F នៅខាងឆ្វេងបន្ទាត់ D នោះសមីការទូទៅនៃ

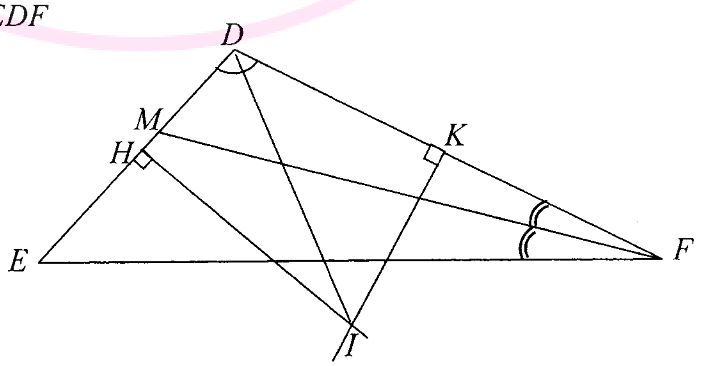
ប៉ារ៉ាបូលគឺ : $(y-k)^2 = -2p(x-h)$

ដែល $p = Fk = a - c$

ដូចនេះ $(y-b)^2 = -2\,(a-c)\left(x - \frac{a+c}{2}\right)$ ជាសមីការប៉ារ៉ាបូលនេះ ។

(៦ពិន្ទុ) IV. ១. គណនាកូស៊ីនុសនៃមុំ $\angle EDF$

$DE = 4$ ; $DF = 6$ , $EF = 8$




www.pisethsok.wordpress.com

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុសគេបាន

$EF^2 = DE^2 + DF^2 - 2DE \cdot DF \cdot \cos D$

$$\cos D = \frac{DE^2 + DF^2 - EF}{2 \cdot DE \cdot DF} = \frac{16 - 36 - 64}{2 \cdot 4 \cdot 6} = -\frac{1}{4}$$

ដូចនេះ $\quad \cos D = -\frac{1}{4}$

២. បង្ហាញថា $\overrightarrow{DI} = m\overrightarrow{DE} + n\overrightarrow{DF}$

$\overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{DE}$ (ព្រោះ $IH$ ជាមេដ្យាទ័រនៃអង្កត់ $DE$)

$= 2 \times 4 = 8$

$\overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{DF}$ (ព្រោះ $IK$ ជាមេដ្យាទ័រនៃអង្កត់ $DF$)

$= 3 \times 6 = 18$

$$\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF} = \left\|\overrightarrow{DE}\right\| \left\|\overrightarrow{DF}\right\| \cos D = 4 \times 6 \times \left(-\frac{1}{4}\right) = -6$$

ដោយ $\overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{DE} = \left(m\overrightarrow{DE} + n\overrightarrow{DF}\right) \cdot \overrightarrow{DE} = m\overrightarrow{DE}^2 + n\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{DE} = 16m - 6n \quad (1)$

$\overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{DF} = \left(m\overrightarrow{DE} + n\overrightarrow{DF}\right) \cdot \overrightarrow{DF} = m\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF} + n\overrightarrow{DE}^2 = -6m + 36n \quad (2)$

$$\begin{cases} 8m - 3m = 4 \\ -m + 6n = 3 \end{cases} \Rightarrow 15m = 11$$

$$m = \frac{11}{15},\ n = \frac{3 + \frac{11}{15}}{6} = \frac{28}{45}$$

ដូច្នេះ $\quad \overrightarrow{DI} = \frac{11}{15}\overrightarrow{DE} + \frac{28}{45}\overrightarrow{DF}$

៣. បង្ហាញថា វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{FM} = a\overrightarrow{FD} + b\overrightarrow{FE}$

ដោយ $FM$ គឺជាកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ $\angle EFD$ នោះគេបាន

$$\frac{FD}{FE} = \frac{DM}{ME} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$\frac{DM}{ME} = \frac{3}{4} \Rightarrow 4\overrightarrow{DM} = 3\overrightarrow{ME} = 3(\overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DM}) \qquad (\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{ME}, \overrightarrow{DE}$ កូលីនេអ៊ែរគ្នា)

$4\overrightarrow{DM} + 3\overrightarrow{DM} = 3\overrightarrow{DE}$

$7\overrightarrow{DM} = 3\overrightarrow{DE} \Rightarrow \overrightarrow{DM} = \frac{3}{7}\overrightarrow{DE}$

ដោយ $\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{FD} + \frac{7}{3}\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{FD} + \frac{7}{3}\left(\overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FE}\right) = \overrightarrow{FD} - \frac{7}{3}\overrightarrow{FD} + \frac{7}{3}\overrightarrow{FE} = \frac{4}{7}\overrightarrow{FD} + \frac{7}{3}\overrightarrow{FE}$

ដូច្នេះ $\overrightarrow{FM} = \frac{4}{7}\overrightarrow{FD} + \frac{7}{3}\overrightarrow{FE}$

www.pisethsok.wordpress.com

(៣ពិន្ទុ) V. **វិធីទី ១** ដោយ ១ក្រុមមានគ្នា១១នាក់ នោះយើងធ្វើតាមវិធីដូចខាងក្រោម:

ទី១ត្រូវជ្រើសរើស ក្មេងប្រុស ១១ នាក់ ក្នុងចំនោមក្មេង ៩៩ នាក់ឱ្យនៅក្នុងក្រុមទី១ នោះយើងអាចរៀបបាន

$C_{99}^{11} = \dfrac{99!}{(99-11)!} = \dfrac{99!}{88!}$ របៀប

ទី២ត្រូវជ្រើសរើស ក្មេងប្រុស ១១ នាក់ ក្នុងចំនោមក្មេង ៨៨ នាក់ឱ្យនៅក្នុងក្រុមទី២នោះយើងអាចរៀបបាន

$C_{88}^{11} = \dfrac{88!}{(88-11)!} = \dfrac{88!}{77!}$ របៀប

ទី៣ត្រូវជ្រើសរើស ក្មេងប្រុស ១១ នាក់ ក្នុងចំនោមក្មេង ៧៧ នាក់ឱ្យនៅក្នុងក្រុមទី៣នោះយើងអាចរៀបបាន

$C_{77}^{11} = \dfrac{77!}{(77-11)!} = \dfrac{77!}{66!}$ របៀប

ទី៤ត្រូវជ្រើសរើស ក្មេងប្រុស ១១ នាក់ ក្នុងចំនោមក្មេង ៦៦ នាក់ឱ្យនៅក្នុងក្រុមទី៤នោះយើងអាចរៀបបាន

$C_{66}^{11} = \dfrac{66!}{(66-11)!} = \dfrac{66!}{55!}$ របៀប

ទី៥ត្រូវជ្រើសរើស ក្មេងប្រុស ១១ នាក់ ក្នុងចំនោមក្មេង ៥៥ នាក់ឱ្យនៅក្នុងក្រុមទី៥នោះយើងអាចរៀបបាន

$C_{55}^{11} = \dfrac{55!}{(55-11)!} = \dfrac{55!}{44!}$ របៀប

ទី៦ត្រូវជ្រើសរើស ក្មេងប្រុស ១១ នាក់ ក្នុងចំនោមក្មេង ៤៤ នាក់ឱ្យនៅក្នុងក្រុមទី៦នោះយើងអាចរៀបបាន

$C_{44}^{11} = \dfrac{44!}{(44-11)!} = \dfrac{44!}{33!}$ របៀប

www.pisethsok.wordpress.com

ទី៧ត្រូវជ្រើសរើស ក្មេងប្រុស ១១ នាក់ ក្នុងចំនោមក្មេង ៣៣ នាក់ឱ្យនៅក្នុងក្រុមទី៧នោះយើងអាចរៀបបាន

$C_{33}^{11} = \dfrac{33!}{(33-11)!} = \dfrac{33!}{22!}$ របៀប

ទី៨ត្រូវជ្រើសរើស ក្មេងប្រុស ១១ នាក់ ក្នុងចំនោមក្មេង ២២ នាក់ឱ្យនៅក្នុងក្រុមទី៨នោះយើងអាចរៀបបាន

$C_{22}^{11} = \dfrac{22!}{(22-11)!} = \dfrac{22!}{11!}$ របៀប

ទី៩ត្រូវជ្រើសរើស ក្មេងប្រុស ១១ នាក់ ក្នុងចំនោមក្មេង ១១ នាក់ឱ្យនៅក្នុងក្រុមទី៩នោះយើងអាចរៀបបាន

$C_{11}^{11} = 1$ របៀប

តាមការរៀបនេះគេបានក្រុមក្មេងមានចំនួន :

$\dfrac{99!}{88!11!} \times \dfrac{88!}{77!11!} \times \dfrac{77!}{66!11!} \times \dfrac{66!}{55!11!} \times \dfrac{55!}{44!11!} \times \dfrac{44!}{33!11!} \times \dfrac{33!}{22!11!} \times \dfrac{22!}{11!11!} \times 1 = \dfrac{99!}{(11!)^9}$ របៀប

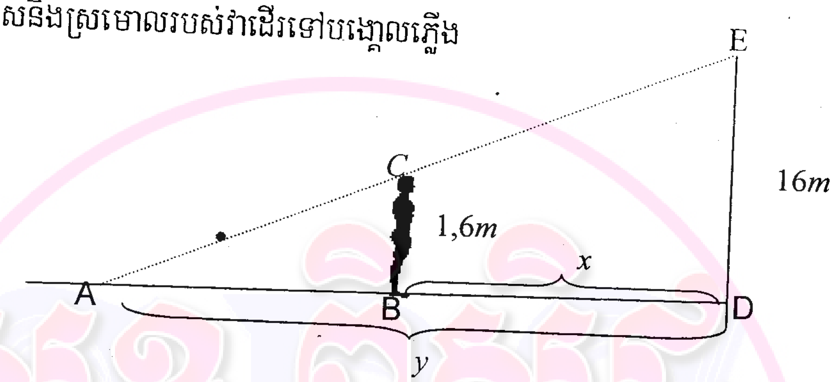
ដោយក្រុមនីមួយៗជាក្រុមគ្មានឈ្មោះ នោះចំនួនក្រុមដែលអាចបង្កើតបានទាំងអស់គឺ : $\dfrac{99!}{9!\times(11!)^9}$ របៀប

**វិធីទី ២**

សកម្មភាពនេះជាចម្លាស់បែងចែកបាន។ ចំនួនចម្លាស់បែងចែកបាននៃក្មេង ៩៩នាក់ជា ៩ក្រុមដែលក្រុមនីមួយៗមាន ក្មេង១១នាក់ គឺ : $\frac{99!}{(11!)^9}$ ។ ដោយក្រុមនីមួយៗជាក្រុមគ្មានឈ្មោះ នោះចំនួនក្រុមដែលអាចបង្កើតបានទាំងអស់គឺ : $\frac{99!}{9!\times(11!)^9}$ របៀប

( ៣ពិន្ទុ ) VI. រកល្បឿននៃចុងស្រមោល

រូបនេះតាងចលនាក្មេងប្រុសនិងស្រមោលរបស់វាដើរទៅបង្គោលភ្លើង




$\Delta ADE \sim \Delta ABC$

$$\left.\begin{matrix} ADE \\ \sim \\ ABC \end{matrix}\right| \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{16}{1\cdot 6} = 10$$

$$\frac{AD}{AB} = 10 \Rightarrow AD = 10AB$$

តាង $x = BD$ ជាចម្ងាយពីចំណុច $B$ ដែលក្មេងចេញដំណើរទៅគល់បង្គោល $D$

$y = AD$ ជាចម្ងាយពីចំណុចចុងស្រមោល $A$ ទៅគល់បង្គោល $D$

គេបាន $y = 10(y-x) = 10y - 10x \quad \Rightarrow \quad 9y = 10x \quad \Rightarrow \quad 9\frac{dy}{dt} = 10\frac{dx}{dt}$

ដោយ $-\frac{dy}{dt}$ ជាល្បឿនដែលចុងស្រមោលថយទៅរក $D$

$\frac{dx}{dt}$ ជាល្បឿនដែលក្មេងដើរទៅមុខគឺ $\frac{dx}{dt} = 5\cdot 4m/s$

$$9\frac{dy}{dt} = 10(5\cdot 4) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 6m/s$$

ដូច្នេះ ល្បឿននៃចុងស្រមោលគឺ: $6m/s$

www.pisethsok.wordpress.com