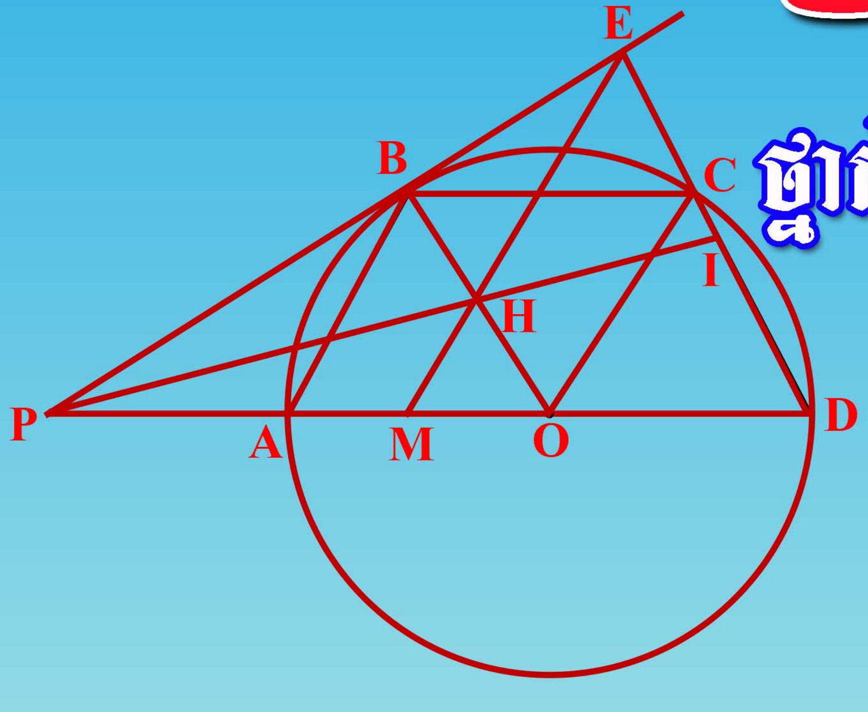
កំណែលំហាត់

ធរណីមាត្រ



ថ្នាក់ទី៩

រៀបរៀងដោយ សុខ ពិសិដ្ឋ

ជំពូកទី១

លំហាត់

លំហាត់

I. លើរង្វង់មួយមានផ្ចិត O និងកាំ R ។ គេឱ្យធ្នូបីតគ្នា

$AB = BC = CD = 60^o$ ។

១. ប្រាប់ប្រភេទចតុកោណ $ABCD$ ។

២. បន្ទាត់ប៉ះរង្វង់ផ្ចិត O ត្រង់ B កាត់បន្ទាត់ AD ត្រង់ P ។ បង្ហាញថាត្រីកោណ PAB ជាត្រីកោណសមបាត ។

៣. គណនា PO និង PB ជាអនុគមន៍នៃ R ។

៤. M ជាចំណុចកណ្តាលនៃអង្កត់ OA ហើយ E ជាចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ PB និង CD ។ គណនា EM ជាអនុគមន៍ R ។

៥. H ជាចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ EM និង BO ។ គណនាផលធៀប $\frac{MH}{ME}$ ។ បង្ហាញថាបន្ទាត់ PH កាត់អង្កត់ ED ត្រង់ចំណុចកណ្តាល I ។

II. រង្វង់ O មួយមានអង្កត់ផ្ចិត $AB = 5cm$ ។ បន្ទាត់ L មួយប៉ះរង្វង់នេះត្រង់ C ហើយដែល $AC = 4cm$ ។ បន្ទាត់ AD ជួបរង្វង់ម្តងទៀតត្រង់ D ហើយកែងនឹងបន្ទាត់ L ត្រង់ E ។ M ជាចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ AC និង BD ។ N ជាចំណុចកណ្តាលនៃជ្រុង AD ។

១. កំណត់ប្រភេទនៃ ΔABC និង ΔABD ។ គណនាបរិមាត្រនៃ ΔABC ។

២. បង្ហាញថាចតុកោណ $CENO$ ជាចតុកោណកែង ។

៣. ប្រៀបធៀបត្រីកោណ MAB និង MDC ។

ទាញបញ្ជាក់ថា $MA\times MC=MB\times MD$

III. គេឱ្យរង្វង់ផ្ចិត O មានអង្កត់ផ្ចិត AB ដែល $AB=8cm$ ។ H ជាចំណុចមួយនៅលើ OA ដែល $OH=2.5cm$ ។ តាម H គេគូសបន្ទាត់កែងនឹងអង្កត់ AB ហើយកាត់រង្វង់ត្រង់ C និង D ។

១. ប្រាប់ប្រភេទត្រីកោណ ABC ។

២. គណនា AH និង BC ។

៣. គេគូសអង្កត់ធ្នូ CP កែងនឹងជ្រុង CD ត្រង់ C ។ បង្ហាញថា D, O, P រត់ត្រង់ជួរគ្នា ។

IV. គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយកែងត្រង់ A និង មានកម្ពស់ AH ។ គេគូសរង្វង់អង្កត់ផ្ចិត AH កាត់ជ្រុង AB និង AC រៀងគ្នា ត្រង់ D និង E ។

១. ប្រាប់ប្រភេទចតុកោណ $AEHD$ ។

២. ប្រដូច ΔABC និង ΔADE ។ ទាញបញ្ជាក់ថា

$AB\times AD=AC\times AE$ ។

៣. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $BDEC$ ជាចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់ ។

V. គេឱ្យត្រីកោណសម័ង្ស ABC មួយ ។ D ជាចំណុចមួយនៅលើបន្លាយនៃអង្កត់ AB ខាង A ។ រង្វង់ផ្ចិត A កាំ AD កាត់ជ្រុង AB ត្រង់ G និងកាត់ជ្រុង AC ត្រង់ E ។ បន្ទាត់ DE និង បន្ទាត់ BC កាត់គ្នាត្រង់ F ។

១. គណនារង្វាស់មុំ $\angle GED$ ។

២. ប្រាប់ប្រភេទនៃត្រីកោណ FBD ។

៣. ប្រដូច ΔBDF និង ΔGDE រួចទាញបញ្ជាក់ថា

$BD \cdot GE = GD \cdot BF$ ។

VI. រង្វង់ផ្ចិត O មានអង្កត់ផ្ចិត BC ដែល $BC = 4cm$ ។ A ជាចំណុចមួយនៅលើ រង្វង់ផ្ចិត O នេះ ដែល $\angle ABC = 30^o$ ។ បន្ទាត់ AE ជួបជ្រុង BC ត្រង់ D ហើយ ជួបរង្វង់ផ្ចិត O ម្តងទៀតត្រង់ E ។

១. កំណត់ប្រភេទនៃ ΔABC និង ΔAOC ។

២. គណនាប្រវែងជ្រុង AB , AC និង រង្វាស់មុំ $\angle AEB$ ។

៣. ប្រៀបធៀប ΔACD និង ΔBED ។ ទាញបញ្ជាក់ថា

$DA \times DE = DB \times DC$

VII. រង្វង់មួយមានផ្ចិត O និង អង្កត់ផ្ចិត AB ដែល $AB = 8cm$ ។ M ជាចំណុចមួយនៃរង្វង់ផ្ចិត O ហើយដែល $BM = 3cm$ ។ គេបន្លាយអង្កត់ AB ខាង B ឱ្យបាន $BE = 3cm$ ។បន្ទាត់ L មួយកែងនឹងបន្ទាត់ AE ត្រង់ E ហើយបន្ទាត់ L ជួបបន្ទាត់ AM ត្រង់ N ។

១. គណនា AE និង AM ។

២.បង្ហាញថា ΔMAB និង ΔEAN ដូចគ្នា។ទាញរក AN និង EN ។

៣.បង្ហាញថាចតុកោណ $BENM$ ចារឹកក្នុងរង្វង់ដែលគេនឹងត្រូវបញ្ជាក់ទីតាំងផ្ចិត និងគណនាប្រវែងកាំរបស់វា ។

VIII. M ជាចំណុចមួយនៅលើរង្វង់ C ដែលមានផ្ចិត O និងកាំ R ។ រង្វង់ C' ដែលមានផ្ចិត M និងកាំ r (ដែល $r < R$)ជួបរង្វង់ C ត្រង់ A និង B ។ បន្ទាត់ OM ជួបរង្វង់ C ត្រង់ D ហើយជួបរង្វង់ C' ត្រង់ E និង F

ដែល E នៅលើអង្កត់ DM ។ បន្ទាត់ Δ កែងនឹងបន្ទាត់ DM ត្រង់ F ហើយជួបបន្ទាត់ DA និង DB រៀងគ្នាត្រង់ I និង J ។

១. គណនារង្វាស់មុំ $\angle DAM$ និង $\angle DBM$ ។ ទាញបញ្ជាក់ថា បន្ទាត់ DI និង បន្ទាត់ DJ ប៉ះនឹងរង្វង់ C' ត្រង់ A និង B ។

២. បង្ហាញថាចតុកោណ $AMFI$ ចារឹកក្នុងរង្វង់មួយ ។

៣. ប្រៀបធៀប ΔADM និង ΔFDI ។

៤. ទាញបញ្ជាក់ថា $\frac{AD}{FD}=\frac{DM}{DI}=\frac{AM}{FI}$ ហើយ $AD\times DI=2R(2R+r)$ ។

IX. គេមានកន្លះរង្វង់ផ្ចិត O ដែលមានកាំ R និងអង្កត់ផ្ចិត AB ។ C ជាចំណុចមួយនៅលើកន្លះរង្វង់នេះដែល $BC=60^o$ ។ I ជាចំណុចមួយនៅលើអង្កត់ BC ដែល $BI=\frac{R}{2}$ ។ បន្ទាត់ AI កាត់កន្លះរង្វង់នេះត្រង់ F ហើយបន្ទាត់ AC កាត់បន្ទាត់ BF ត្រង់ K ។

១. ប្រាប់ប្រភេទត្រីកោណ OBC ។

២. ប្រៀបធៀប ΔACI និង ΔBCK រួចទាញវិបាក ។

៣. បង្ហាញថាចតុកោណ $CIFK$ ចារឹកក្នុងរង្វង់មួយដែលអាចបញ្ជាក់ផ្ចិតវាបាន ។

៤. គណនាប្រវែង AC ជាអនុគមន៍នៃ R ។

X. គេឱ្យត្រីកោណសម័ង្ស ABC ដែលមានជ្រុងប្រវែង $4cm$ ។ គេគូសកន្លះបន្ទាត់ $[At)$ ស្របនឹងជ្រុង $[BC]$ ។ H ជាចំណោលកែងនៃ C លើកន្លះបន្ទាត់ $[At)$ ។

១. គណនា CH និង AH ។

២. គណនា BH ។

៣. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABH ។

XI. គេមានត្រីកោណ EFG កែងត្រង់ E ហើយរង្វាស់មុំ $\angle EGF = 30^o$ ។ K ជាចំណុចមួយនៅលើជ្រុង EG ដែល $\angle EKF = 45^o$ និង រង្វាស់ $EK = 4cm$ ។

១. គណនារង្វាស់មុំ $\angle GFK$ ប្រវែង EF និង FG ។

២. គណនាផ្ទៃក្រឡារបស់ត្រីកោណ EFG ។

XII. រង្វង់ផ្ចិត O មួយចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC មួយដែលមានកម្ពស់ AH និង មុំក្នុងទាំងបីជាមុំស្រួច ។ D ជាចំណុចឆ្លុះនៃ A ចំពោះផ្ចិត O ។

១. បង្ហាញថា $ABC = ADC$ និង $ACB = ADB$ ។

២. ប្រៀបធៀប ΔHAB និង ΔCAD រួចហើយ ΔHAC និង ΔBAD ។

៣. បង្ហាញថា $AB \times AC = AD \times AH$ ហើយ $BAD = HAC$ ។

XIII. គេមានរង្វង់ O ដែលមានកាំស្មើ R ។ P ជាចំណុចមួយនៅក្រៅរង្វង់ O ដែល $OP = 3R$ ។ គេគូសអង្កត់ផ្ចិត MN របស់រង្វង់ O ដោយធ្វើយ៉ាងណាឱ្យ ΔPMN កែងត្រង់ M ។

ក. គណនាជ្រុង និងផ្ទៃក្រឡារបស់ ΔPMN ជាអនុគមន៍នៃ R ។

ខ. អង្កត់ PN កាត់រង្វង់ O ត្រង់ K ។ បង្ហាញថាបន្ទាត់ MK កែងនឹងបន្ទាត់ NP ។

គ. គណនាប្រវែងអង្កត់ PK ជាអនុគមន៍នៃ R ។

XIV. គេមានរង្វង់ផ្ចិត O កាំ R និងអង្កត់ផ្ចិត AB ។ គេបន្លាយអង្កត់ផ្ចិត AB ឱ្យបាន $BC = R$ ។ តាមចំណុច C គេគូសបន្ទាត់ប៉ះនឹងរង្វង់ផ្ចិត O ត្រង់ M ។ គេភ្ជាប់អង្កត់ MA, MO និង MB ។

ក. បង្ហាញថាត្រីកោណ OMB ជាត្រីកោណសម័ង្ស។

ខ. រកប្រភេទនៃត្រីកោណ AMC ។

គ. គណនាប្រវែងអង្កត់ BM និង AM ជាអនុគមន៍នៃ R។

ឃ. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ACM ។

XV.គេឱ្យរង្វង់ផ្ចិត O កាំ R និងអង្កត់ផ្ចិត $BC = 2R$។ គេគូសអង្កត់ធ្នូ AB ឱ្យបាន $\angle ABC = 30^\circ$ ។

១. ប្រាប់ប្រភេទត្រីកោណ ABC រួចគណនារង្វាស់ជ្រុង AB និង AC ជាអនុគមន៍នៃ ។

២. គេគូសកន្លះបន្ទាត់ពុះនៃមុំ BAC កាត់ជ្រុង BC ត្រង់ M និងកាត់រង្វង់ផ្ចិត O ត្រ់ D ។

ក. គណនា BM និង CM ។

ខ. ប្រៀបធៀបត្រីកោណ ABD និង AMC រួចសរសេរផលធៀបដំណូច។ ស្រាយបំភ្លឺថា $AB \cdot AC = AM^2 + MB \cdot MC$ ។

គ. គណនា MA ជាអនុគមន៍នៃ R ។

XVI. រង្វង់មួយមានផ្ចិត O មានអង្កត់ផ្ចិត BC និងកាំស្មើនឹង R ។ H ជាចំណុចកណ្ដាលនៃជ្រុង OC ។ ត្រង់ H គេគូសអង្កត់ធ្នូ AD កែងនឹងបន្ទាត់ BC ។ បន្ទាត់ BA និងបន្ទាត់ DC ជួបគ្នាត្រង់ E ។

១. ប្រៀបធៀបត្រីកោណ EBC និង EDA ។

២. គណនា AC និង AB ទាក់ទងនឹងតម្លៃ R ។

៣. ប្រាប់ប្រភេទចតុកោណ $ACDO$ ។

XVII. ABC ជាត្រីកោណកែងសមបាតត្រង់ A ហើយ $AB = AC = x$។ DAC ក៏ជាត្រីកោណកែងសមបាតកែងត្រង់ D។ ត្រីកោណទាំងពីរនេះស្ថិតនៅសងខាងនៃជ្រុងរួម AC ។

១. កំណត់ប្រភេទចតុកោណ $ABCD$ ។

២. គណនា BC , AD ជាអនុគមន៍នៃ x (ជាប់ទាក់ទងនឹង x)។

៣. អង្កត់ទ្រូងទាំងពីររបស់ចតុកោណកាត់គ្នាត្រង់ O។ បង្ហាញថា ΔAOD ដូច ΔCOB ។ រួចរកផលធៀបដំណូច។ គណនា OA, OC , OB ជាអនុគមន៍នៃ x ។

៤. រង្វង់មានអង្កត់ផ្ចិត BC កាត់អង្កត់ BD ត្រង់ K ។ បង្ហាញថា អង្កត់ CK ជាកម្ពស់ ΔBCD ។

XVIII. យើងមានរង្វង់ពីរ ផ្ចិត O និង O' កាំ R និង R' រៀងគ្នា ប៉ះគ្នាខាងក្រៅត្រង់ចំណុច A ។ បន្ទាត់មួយគូសចេញពី A កាត់រង្វង់នេះត្រង់ M និង M' ។

១. បង្ហាញ បន្ទាត់ OM និង $O'M'$ ស្របគ្នា ។

២. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បន្ទាត់ប៉ះត្រង់ M និង M' ស្របគ្នា។

៣. គណនាផលធៀប $\dfrac{AM'}{AM}$ ជាអនុគមន៍នៃ R និង R' ។

ផ្នែកទី២

ដំណោះស្រាយ

FACEBOOK Page
គ្រូ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page
Facebook.com/TeacherSokPiseth

I. លើរង្វង់មួយមានផ្ចិត O និងកាំ R ។ គេឱ្យធ្នូបីតគ្នា

$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = 60^o$ ។

១. ប្រាប់ប្រភេទចតុកោណ $ABCD$ ។

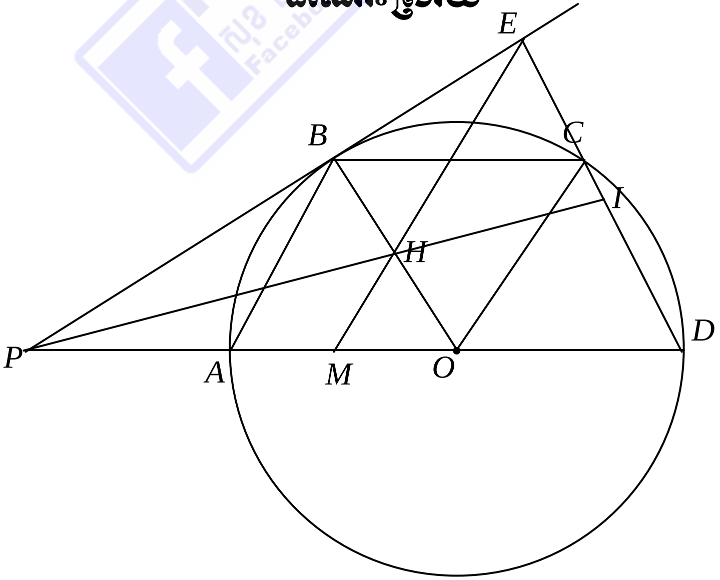
២. បន្ទាត់ប៉ះរង្វង់ផ្ចិត O ត្រង់ B កាត់បន្ទាត់ AD ត្រង់ P ។ បង្ហាញថាត្រីកោណ PAB ជាត្រីកោណសមបាត ។

៣. គណនា PO និង PB ជាអនុគមន៍នៃ R ។

៤. M ជាចំណុចកណ្ដាលនៃអង្កត់ OA ហើយ E ជាចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ PB និង CD ។ គណនា EM ជាអនុគមន៍ R ។

៥. H ជាចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ EM និង BO ។ គណនាផលធៀប $\frac{MH}{ME}$ ។ បង្ហាញថាបន្ទាត់ PH កាត់អង្កត់ ED ត្រង់ចំណុចកណ្ដាល I ។

ដំណោះស្រាយ



១. ប្រាប់ប្រភេទចតុកោណ $ABCD$

យើងមាន $\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CD}=60^o+60^o+60^o=180^o$

ឬ $\overset{\frown}{AD}=180^o$ ឬ $\angle AOD=180^o$

នោះ AD ជាអង្កត់ផ្ចិតនៃរង្វង់ផ្ចិត O

- ក្នុង ΔOAB មាន $OA=OB$ (កាំរង្វង់)និង $\overset{\frown}{AB}=60^o$ នោះ $\angle AOB=60^o$

 នោះ ΔAOB ជាត្រីកោណសម័ង្ស

វិបាក $OA=OB=AB=R$ និង $\angle AOB=\angle OAB=\angle OBA=60^o$ (1)

- ក្នុង ΔOBC មាន $OB=OC$ (កាំរង្វង់)

 និង $\overset{\frown}{BC}=60^o$ នោះ $\angle BOC=60^o$

 នោះ ΔOBC ជាត្រីកោណសម័ង្ស

វិបាក $OB=OC=BC=R$ និង $\angle BOC=\angle OBC=\angle OCB=60^o$ (2)

- ក្នុង ΔOCD មាន $OC=OD$ (កាំរង្វង់)

 និង $\overset{\frown}{CD}=60^o$ នោះ $\angle COD=60^o$

 នោះ ΔCOD ជាត្រីកោណសម័ង្ស

វិបាក $OC=OD=CD=R$ និង $\angle COD=\angle OCD=\angle ODC=60^o$ (3)

តាម (1) , (2) និង (3) យើងបាន $AB=DC$ និង $\angle OAB=\angle ODC=60^o$

ឬ $\angle DAB=\angle ADC$

នោះ ក្នុងចតុកោណ $ABCD$ មាន៖

$AB=DC$ (សម្រាយខាងលើ)

$\angle DAB=\angle ADC$ (សម្រាយខាងលើ)

ដូចនេះ ចតុកោណ $ABCD$ ជាតុកោណព្នាយសមបាត

២. បង្ហាញថាត្រីកោណ PAB ជាត្រីកោណសមបាត

យើងមាន $\angle ABP = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} = \frac{60^o}{2} = 30^o$ (មុំពិសេស) (*)

ហើយ $\angle APB = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{AB}\right)$ (មុំក្រៅរង្វង់)

$= \frac{1}{2}\left((60^o + 60^o) - 60^o\right) = 30^o$ (**)

តាម (*) និង (**) យើងបាន $\angle ABP = \angle APB = 30^o$

ត្រីកោណ PAB មាន $\angle ABP = \angle APB = 30^o$ (សម្រាយខាងលើ)

ដូចនេះ ត្រីកោណ PAB ជាត្រីកោណសមបាត

៣. គណនា PO និង PB ជាអនុគមន៍នៃ R

តាមសម្រាយខាងលើ យើងមាន ΔPAB ជាត្រីកោណសមបាត

នោះ $PA = AB = R$

យើងបាន $PO = PA + AO = R + R = 2R$

ម្យ៉ាងទៀត បន្ទាត់ PB ជាបន្ទាត់ប៉ះរង្វង់ផ្ចិត O ត្រង់ B នោះ $PB \perp OB$

តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រ យើងបាន $PO^2 = PB^2 + OB^2$

$(2R)^2 = PB^2 + R^2$

$PB^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2$

$\Rightarrow PB = \sqrt{3R^2} = R\sqrt{3}$

ដូចនេះ $\boxed{PO = 2R \ , \ PB = R\sqrt{3}}$

៤. គណនា EM ជាអនុគមន៍នៃ R

យើងមាន $\angle APB = 60^o$ និង $\angle ODC = 60^o$

ក្នុងត្រីកោណ PDE មាន $\angle P + \angle D + \angle E = 180^o$ (ផលបូកមុំក្នុងត្រីកោណ)

នោះ $\angle E = 180^o - \angle P - \angle D = 180^o - 30^o - 60^o = 90^o$

នោះ ត្រីកោណ PDE ជាត្រីកោណកែង

ដោយ M ជាចំណុចកណ្ដាលនៃជ្រុង OA ហើយ $AP=OD=R$

នាំឱ្យ M ជាចំណុចកណ្ដាលនៃជ្រុង PD

នោះ EM ជាមេដ្យាននៃត្រីកោណ EPD ត្រូវនឹងអ៊ីប៉ូតេនុស PD

យើងបាន $EM=\dfrac{PD}{2}=\dfrac{2R+R}{2}=\dfrac{3R}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{EM=\dfrac{3R}{2}}$

៥. គណនាផលធៀប $\dfrac{MH}{ME}$

ΔOMH មាន $\angle O=60^o$ ហើយ $\angle M=\angle COD=60^o$ (មុំត្រូវគ្នា)

$\Rightarrow \Delta OMH$ ជាត្រីកោណសម័ង្ស $\Rightarrow MH=MO=\dfrac{R}{2}$

យើងបាន $\dfrac{MH}{ME}=\dfrac{\frac{R}{2}}{\frac{3R}{2}}=\dfrac{1}{3}$

ដូចនេះ $\boxed{\dfrac{MH}{ME}=\dfrac{1}{3}}$

បង្ហាញថាបន្ទាត់ PH កាត់អង្កត់ ED ត្រង់ចំណុចកណ្ដាល I

យើងមាន EM ជាមេដ្យាននៃត្រីកោណ EPD ត្រូវនឹងអ៊ីប៉ូតេនុស PD

ហើយម្យ៉ាងទៀត $\dfrac{MH}{ME}=\dfrac{1}{3}$

នោះ H ជាទីប្រជុំទម្ងន់នៃត្រីកោណ PDE

$\Rightarrow PI$ ជាមេដ្យាននៃត្រីកោណ PDE ត្រូវនឹងជ្រុង ED $\Rightarrow ID=IE$

ដូចនេះ បន្ទាត់ PH កាត់អង្កត់ ED ត្រង់ចំណុចកណ្ដាល I

FACEBOOK Page - Sok Piseth Page សុខ ពិសិដ្ឋ Facebook.com/TeacherSokPiseth

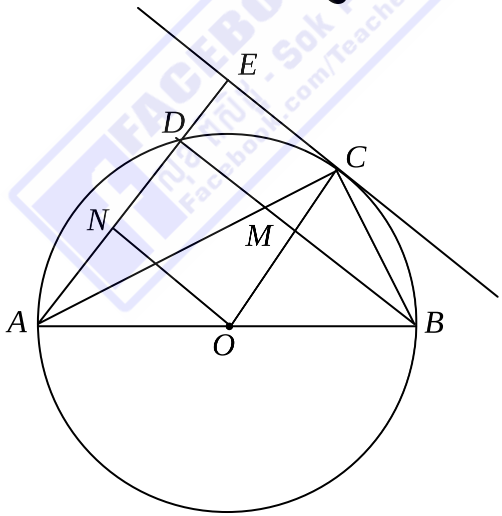
II. រង្វង់ O មួយមានអង្កត់ផ្ចិត $AB = 5cm$ ។ បន្ទាត់ L មួយប៉ះរង្វង់នេះត្រង់ C ហើយដែល $AC = 4cm$។ បន្ទាត់ AD ជួបរង្វង់ម្តងទៀតត្រង់ D ហើយកែងនឹងបន្ទាត់ L ត្រង់ E ។ M ជាចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ AC និង BD ។ N ជាចំណុចកណ្តាលនៃជ្រុង AD ។

១. កំណត់ប្រភេទនៃ ΔABC និង ΔABD ។
គណនាបរិមាត្រនៃ ΔABC ។

២. បង្ហាញចតុកោណ $CENO$ ជាចតុកោណកែង ។

៣. ប្រៀបធៀបត្រីកោណ MAB និង MDC ។
ទាញបញ្ជាក់ថា $MA \times MC = MB \times MD$

ដំណោះស្រាយ



ក. កំណត់ប្រភេទនៃ ΔABC និង ΔABD

- ΔABC មាន $\angle ACB = 90^o$ (មុំចារឹកកន្លះរង្វង់)

$\Rightarrow AC \perp BC$ ត្រង់ C

ដូចនេះ ΔABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ C

• ΔABD មាន $\angle ADB = 90^o$ (មុំចារឹកកន្លះរង្វង់)

$\Rightarrow AD \perp BD$ ត្រង់ D

ដូចនេះ ΔABD ជាត្រីកោណកែងត្រង់ D

គណនាបរិមាត្រនៃ ΔABC

គណនាប្រវែង BC

ក្នុងត្រីកោណកែង ABC តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រ

យើងបាន $AB^2 = AC^2 + BC^2$

$$5^2 = 4^2 + BC^2$$

$$BC^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{9} = 3$$

យើងបាន បរិមាត្រ $P = AB + AC + BC = 5 + 4 + 3 = 12\,cm$

ដូចនេះ បរិមាត្រនៃ ΔABC គឺ $\boxed{P = 12\,cm}$

FACEBOOK Page Sok Piseth Facebook.com/TeacherSokPiseth

ខ. បង្ហាញថាចតុកោណ $CENO$ ជាចតុកោណកែង

ចតុកោណ $CENO$ មាន៖

• $CE \perp NE$ (សមតិកម្ម) (1)

• $OC \perp EC$ (បន្ទាត់ L ប៉ះរង្វង់ត្រង់ C) (2)

ម៉្យាងទៀត N ជាចំណុចកណ្តាលនៃជ្រុង AD នោះ $ON \perp NE$ (3)

តាម (1), (2) និង (3) យើងបាន $CENO$ ជាចតុកោណកែង

ដូចនេះ ចតុកោណ $CENO$ ជាចតុកោណកែង

គ. ប្រៀបធៀបត្រីកោណ MAB និង ΔMDC

ត្រីកោណ MAB និង ΔMDC មាន៖

- $\angle AMB = \angle CMD$ (មុំទល់កំពូល)
- $\angle ABM = \angle DCM$ (មុំចារឹកក្នុងរង្វង់ស្កាត់ធ្នូ AD រួម)

ដូចនេះ $\Delta MAB \sim \Delta BDC$ តាមករណី ម.ម

ទាញបញ្ជាក់ថា $MA \times MC = MB \times MD$

យើងមាន $\Delta MAB \sim \Delta BDC$

វិបាក $\left.\begin{matrix} MAB \\ \sim \\ MDC \end{matrix}\right| \Rightarrow \dfrac{MA}{MD} = \dfrac{MB}{MC}$

$$\Rightarrow MA \times MC = MB \times MD$$

ដូចនេះ $\boxed{MA \times MC = MB \times MD}$

FACEBOOK Page សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page facebook.com/TeacherSokPiseth

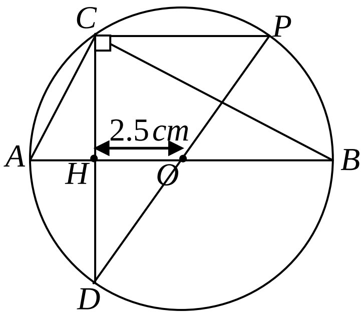
III. គេឱ្យរង្វង់ផ្ចិត O មានអង្កត់ផ្ចិត AB ដែល $AB = 8cm$ ។ H ជាចំណុចមួយនៅលើ OA ដែល $OH = 2.5cm$ ។ តាម H គេគូសបន្ទាត់កែងនឹងអង្កត់ AB ហើយកាត់រង្វង់ត្រង់ C និង D ។

១. ប្រាប់ប្រភេទត្រីកោណ ABC ។

២. គណនា AH និង BC ។

៣. គេគូសអង្កត់ធ្នូ CP កែងនឹងជ្រុង CD ត្រង់ C ។ បង្ហាញថា D, O, P រត់ត្រង់ជួរគ្នា ។

ដំណោះស្រាយ



១. ប្រាប់ប្រភេទត្រីកោណ ABC

ត្រីកោណ ABC មាន $\angle ACB = 90^o$ (មុំចារឹកកន្លះរង្វង់)

នោះ $AC \perp BC$

ដូចនេះ ត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ C

២. គណនា AH និង BC

យើងមាន $OA = \frac{AB}{2} = \frac{8}{2} = 4cm$ (កាំរង្វង់)

នោះ $AH = OA - OH = 4 - 2.5 = 1.5cm$

ដូចនេះ $\boxed{AH = 1.5\,cm}$

ក្នុងត្រីកោណកែង ABC តាមទំនាក់ទំនងមាត្រក្នុងត្រីកោណកែងយើងបាន

$BC^2 = AB \times HB$

ដោយ $AB = 8cm$ និង $HB = 2.5 + 4 = 6.5cm$

យើងបាន $BC^2 = 8 \times 6.5 = 52$

$\Rightarrow BC = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}\ cm$

ដូចនេះ $\boxed{BC = 2\sqrt{13}\,cm}$

៣. បង្ហាញថា D, O, P រត់ត្រង់ជួរគ្នា

យើងមាន C និង D ជាចំណុចនៅលើរង្វង់ផ្ចិត O (ឬ CD ជាអង្កត់ធ្នូមួយនៃរង្វង់)

ហើយ CP ជាអង្កត់ធ្នូមួយនៃរង្វង់ផ្ចិត O

ដោយ $CP \perp CD$ នោះ $\angle DCP = 90^o$

$\Rightarrow \angle DCP$ ជាមុំចារឹកកន្លះរង្វង់មានផ្ចិត O

នោះ DP ជាអង្កត់ផ្ចិតនៃរង្វង់ផ្ចិត O

ដូចនេះ D, O, P រត់ត្រង់ជួរគ្នា

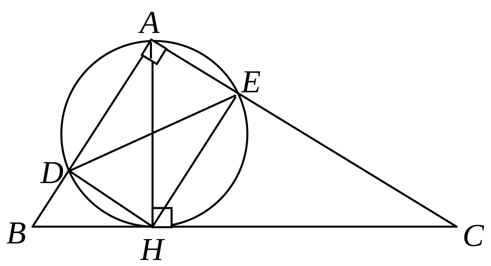
IV. គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយកែងត្រង់ A និង មានកម្ពស់ AH ។ គេគូសរង្វង់អង្កត់ផ្ចិត AH កាត់ជ្រុង AB និង AC រៀងគ្នា ត្រង់ D និង E ។

១. ប្រាប់ប្រភេទចតុកោណ $AEHD$ ។

២. ប្រដូច ΔABC និង ΔADE ។ ទាញបញ្ជាក់ថា $AB \times AD = AC \times AE$ ។

៣. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $BDEC$ ជាចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់ ។

ដំណោះស្រាយ



១. ប្រាប់ប្រភេទចតុកោណ $AEHD$

យើងមាន $\angle BAC = 90^o$ (ΔABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A)

នោះ $\angle DAE = \angle BAC = 90^o$ (មុំរួម) ឬ $AD \perp AE$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត យើងមាន D និង E ជាចំណុចនៅលើរង្វង់ អង្កត់ផ្ចិត AH

នោះ $\angle ADH = \angle AEH = 90^o$ (មុំចារឹកកន្លះរង្វង់)

ឬ $AD \perp DH$ និង $AE \perp EH$ (2)

តាម (1) និង (2) យើងបាន $AEHD$ ជាចតុកោណកែង

ដូចនេះ $AEHD$ ជាចតុកោណកែង

២. ប្រដូច ΔABC និង ΔADE

យើងមាន $\angle ACB = \angle DAH$ (មុំមានជ្រុងត្រូវគ្នា កែងរៀងគ្នា) (i)

$\angle AHE = \angle ADE$ (មុំចារឹកក្នុងរង្វង់ស្កាត់ធ្នូ AE រួម) (ii)

ហើយម្យ៉ាងទៀត $\angle DAH = \angle AHE$ (មុំឆ្លាស់ក្នុង) (iii)

តាម (i), (ii) និង (iii) យើងបាន $\angle ACB = \angle ADE$

ΔABC និង ΔADE មាន៖

$\angle BAC = \angle DAE$ ($\angle A$ ជាមុំរួម)

$\angle ACB = \angle ADE$ (សម្រាយខាងលើ)

ដូចនេះ $\Delta ABC \sim \Delta ADE$ តាមករណីដំណូចទី១ ម.ម

ទាញបញ្ជាក់ថា $AB \times AD = AC \times AE$

យើងមាន $\Delta ABC \sim \Delta ADE$

$$\text{វិបាក} \sim \left.\begin{matrix}\Delta ABC \\ \\ \Delta AED\end{matrix}\right| \Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD} \qquad \Rightarrow AB \times AD = AC \times AE$$

ដូចនេះ $AB \times AD = AC \times AE$

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $BDEC$ ជាចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់

តាមសម្រាយ (២) យើងមាន $\angle ACB = \angle ADE$ នោះ $\angle ECB = \angle ADE$

យើងបាន $\angle BDE + \angle ECB = \angle BDE + \angle ADE = \angle BDA = 180^o$ (មុំរាប)

ដូចនេះ $BDEC$ ជាចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់

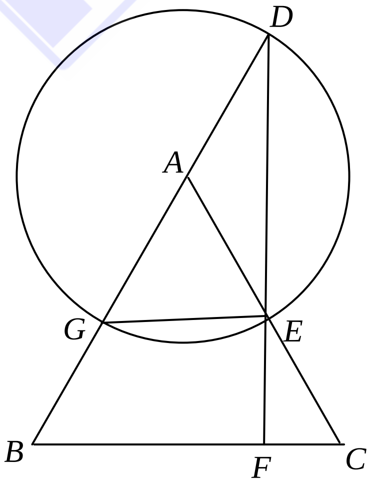
V. គេឱ្យត្រីកោណសម័ង្ស ABC មួយ ។ D ជាចំណុចមួយនៅលើបន្លាយនៃអង្កត់ AB ខាង A ។ រង្វង់ផ្ចិត A កាំ AD កាត់ជ្រុង AB ត្រង់ G និងកាត់ជ្រុង AC ត្រង់ E ។ បន្ទាត់ DE និង បន្ទាត់ BC កាត់គ្នាត្រង់ F ។

១. គណនារង្វាស់មុំ $\angle GED$ ។

២. ប្រាប់ប្រភេទនៃត្រីកោណ FBD ។

៣. ប្រដូច ΔBDF និង ΔGDE រួចទាញបញ្ជាក់ថា $BD \cdot GE = GD \cdot BF$ ។

ដំណោះស្រាយ



១. គណនារង្វាស់មុំ $\angle GED$

យើងមាន DG ជាអង្កត់ផ្ចិតនៃរង្វង់ផ្ចិត A នោះ $\angle GED = 90^o$

(មុំចារឹកកន្លះរង្វង់)

ដូចនេះ $\boxed{\angle GED = 90^o}$

២. ប្រាប់ប្រភេទនៃត្រីកោណ FBD

យើងមាន ΔABC ជាត្រីកោណសមង្ស នោះ $\angle BAC = \angle B = \angle C = 60^o$

នោះ $\overset{\frown}{GE} = \angle BAC = 60^o$ (មុំផ្ចិត និង ធ្នូស្កាត់)

យើងបាន $\angle BDF = \dfrac{\overset{\frown}{GE}}{2} = \dfrac{60^o}{2} = 30^o$ (មុំចារឹកក្នុងរង្វង់ស្កាត់ធ្នូ GE)

ក្នុងត្រីកោណ FBD មាន $\angle B + \angle D + \angle BFD = 180^o$

(ផលបូកមុំក្នុងត្រីកោណ)

$\Rightarrow \angle BFD = 180^o - \angle B - \angle D = 180^o - 60^0 - 30^o = 90^o$

ដូចនេះ ត្រីកោណ FBD ជាត្រីកោណកន្លះសម័ង្ស

៣. ប្រដូច ΔBDF **និង** ΔGDE

ΔBDF និង ΔGDE មាន ៖

$\angle BDE = \angle BDF$ ($\angle D$ ជាមុំរួម)

$\angle GED = \angle BFD = 90^o$ (មុំកែង)

ដូចនេះ $\Delta BDF \sim \Delta GDE$ តាមករណីដំណូចទី១ (ម.ម)

ទាញបញ្ជាក់ថា $BD \cdot GE = GD \cdot BF$

យើងមាន $\Delta BDF \sim \Delta GDE$

FACEBOOK Page ក្រុម Rean Sok Piseth Facebook.com/...

វិបាក $\Delta BDF \sim \Delta GDE \Rightarrow \frac{BD}{GD} = \frac{BF}{GE}$

$$\Rightarrow BD \cdot GE = GD \cdot BF$$

ដូចនេះ $\boxed{BD \cdot GE = GD \cdot BF}$

VI. រង្វង់ផ្ចិត O មានអង្កត់ផ្ចិត BC ដែល $BC = 4cm$ ។ A ជាចំណុចមួយ នៅលើ រង្វង់ផ្ចិត O នេះ ដែល $\angle ABC = 30^o$ ។ បន្ទាត់ AE ជួបជ្រុង BC ត្រង់ D ហើយ ជួបរង្វង់ផ្ចិត O ម្តងទៀតត្រង់ E ។

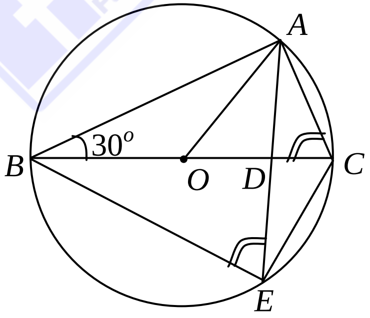
១. កំណត់ប្រភេទនៃ ΔABC និង ΔAOC ។

២. គណនាប្រវែងជ្រុង AB , AC និង រង្វាស់មុំ $\angle AEB$ ។

៣. ប្រៀបធៀប ΔACD និង ΔBED ។ ទាញបញ្ជាក់ថា

$$DA \times DE = DB \times DC$$

ដំណោះស្រាយ



១. កំណត់ប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC និង ΔAOC

យើងមាន BC ជាអង្កត់ផ្ចិតរង្វង់ផ្ចិត O

នោះ $\angle BAC = 90^o$ (មុំចារឹកកន្លះរង្វង់)

នោះ ΔABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A

តែ $\angle ABC = 30^o$ (សមតិកម្ម)

ដូចនេះ ΔABC ជាត្រីកោណកន្លះសម័ង្ស

វិបាក $\angle ACB = 60^o$

ត្រីកោណ AOC មាន $OA = OC$ (កាំង្វង់)

នោះ ΔAOC ជាត្រីកោណសមបាត

តែ $\angle ACB = 60^o$ (វិបាកខាងលើ)

នោះ $\angle ACO = \angle ACB = 60^o$ (មុំរួម)

ដូចនេះ ΔAOC ជាត្រីកោណសម័ង្ស

វិបាក ៖ $AC = OA = OC = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{4}{2} = 2\,cm$ និង

$\angle AOC = \angle OAC = 60^o$

២. គណនាប្រវែងជ្រុង AB , AC និង រង្វាស់មុំ $\angle AEB$

តាមសម្រាយខាងលើ យើងមាន ΔABC ជាត្រីកោណកន្លះសម័ង្ស

យើងបាន $AB = \dfrac{BC\sqrt{3}}{2} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}\,cm$

ហើយ $AC = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{4}{2} = 2\,cm$

ម្យ៉ាងទៀត $\angle AEB = \angle ACB = 60^o$ (មុំចារឹកក្នុងរង្វង់ស្កាត់ធ្នូ AB រួម)

ដូចនេះ $AB = 2\sqrt{3}\,cm$, $AC = 2\,cm$ និង $\angle AEB = 60^o$

៣. ប្រៀបធៀប ΔACD និង ΔBED

ΔACD និង ΔBED មាន ៖

$\angle BED = \angle ACD$ (មុំចារឹកក្នុងរង្វង់ស្កាត់ធ្នូ AB រួម)

Facebook Page Sok Piseth facebook.com/TeacherSokPiseth

$\angle ADC = \angle BDE$ (មុំទល់កំពូល)

ដូចនេះ $\Delta ACD \sim \Delta BED$ តាមករណីដំណូចទី១ (ម.ម)

ទាញបញ្ជាក់ថា $DA \times DE = DB \times DC$

យើងមាន $\Delta ACD \sim \Delta BED$

វិបាក $\left.\begin{array}{c}\Delta ACD \\ \sim \\ \Delta BED\end{array}\right| \Rightarrow \dfrac{DA}{DB} = \dfrac{DC}{DE}$

$$\Rightarrow DA \times DE = DB \times DC$$

ដូចនេះ $DA \times DE = DB \times DC$

ចំណាំ: ➢ កម្ពស់ត្រីកោណសម័ង្សគឺ $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ ដែល a ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណសម័ង្ស

➢ ត្រីកោណកែងដែលមុំស្រួចមានរង្វាស់ 30° ឬ 60° ជាត្រីកោណកន្លះសម័ង្ស

VII. រង្វង់មួយមានផ្ចិត O និង អង្កត់ផ្ចិត AB ដែល $AB = 8cm$។ M ជាចំណុចមួយនៃរង្វង់ផ្ចិត O ហើយដែល $BM = 3cm$ ។ គេបន្លាយអង្កត់ AB ខាង B ឱ្យបាន $BE = 3cm$។បន្ទាត់ L មួយកែងនឹងបន្ទាត់ AE ត្រង់ E ហើយបន្ទាត់ L ជួបបន្ទាត់ AM ត្រង់ N ។

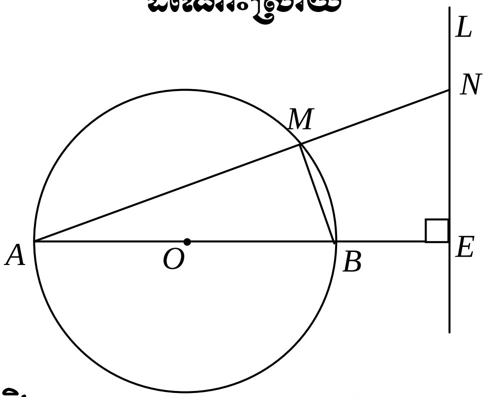
១. គណនា AE និង AM ។

២.បង្ហាញថា ΔMAB និង ΔEAN ដូចគ្នា។ទាញរក AN និង EN ។

៣.បង្ហាញថាចតុកោណ $BENM$ ចារឹកក្នុងរង្វង់ដែលគេនឹងត្រូវបញ្ជាក់ទីតាំងផ្ចិត និងគណនាប្រវែងកាំរបស់វា ។

FACEBOOK Page គ្រូ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page Facebook.com/Teacher.Sok.Piseth

ដំណោះស្រាយ



១. គណនា AE និង AM

យើងមាន $AB = 8cm$ និង $BE = BM = 3cm$

យើងបាន $AE = AB + BE = 8cm + 3cm = 11cm$

ដូចនេះ $\boxed{AE = 11cm}$

យើងមាន $\angle ABM = 90^o$ (មុំចារឹកកន្លះរង្វង់)

នោះ ΔABM ជាត្រីកោណកែងត្រង់កំពូល M

តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រ យើងបាន $AB^2 = AM^2 + BM^2$

$8^2 = AM^2 + 3^2$

$AM^2 = 8^2 - 3^2 = 64 - 9 = 55$

$\Rightarrow AM = \sqrt{55}$

ដូចនេះ $\boxed{AM = \sqrt{55}\ cm}$

២. បង្ហាញថា ΔMAB និង ΔEAN ដូចគ្នា

យើងមាន $AE \perp EN$ នោះ $\angle AEN = 90^o$ (មុំកែង)

ហើយ $\angle AMB = 90^o$ (មុំចារឹកកន្លះរង្វង់)

នោះ $\angle AMB = \angle AEN = 90^o$

✵ ΔMAB និង ΔEAN មាន ៖

$\angle AMB = \angle AEN = 90^o$ (សម្រាយខាងលើ)

$\angle MAB = \angle EAN$ ($\angle A$ ជាមុំរួម)

ដូចនេះ $\Delta MAB \sim \Delta EAN$ តាមករណីដំណូចទី១ (ម.ម)

វិបាក $\left.\begin{array}{r}\Delta MAB\\ \sim \\ \Delta EAN\end{array}\right| \Rightarrow \dfrac{AN}{AB} = \dfrac{EN}{MB} = \dfrac{AE}{AM}$

ទាញរក AN និង EN

តាមវិបាកខាងលើ យើងមាន $\dfrac{AN}{AB} = \dfrac{EN}{MB} = \dfrac{AE}{AM}$

យើងបាន $\dfrac{AN}{8} = \dfrac{EN}{3} = \dfrac{11}{\sqrt{55}}$

- $\dfrac{AN}{8} = \dfrac{11}{\sqrt{55}} \Rightarrow AN = \dfrac{8\times 11}{\sqrt{55}} = \dfrac{8\sqrt{55}}{5}$
- $\dfrac{EN}{3} = \dfrac{11}{\sqrt{55}} \Rightarrow EN = \dfrac{3\times 11}{\sqrt{55}} = \dfrac{3\sqrt{55}}{5}$

ដូចនេះ $\boxed{AN = \dfrac{8\sqrt{55}}{5} cm \ , \ EN = \dfrac{3\sqrt{55}}{5} cm}$

៣. បង្ហាញថាចតុកោណ $BENM$ ចារឹកក្នុងរង្វង់តែមួយ

យើងមាន $\angle AMB = 90^o$ (មុំចារឹកកន្លះរង្វង់)

នោះ $\angle BMN = 90^o$ (មុំជាប់បន្ថែម)

ម្យ៉ាងទៀត $\angle BEN = 90^o$ (មុំកែង)

យើងបាន $\angle BMN + \angle BEN = 90^o + 90^o = 180^o$

ដូចនេះ ចតុកោណ $BENM$ ចារឹកក្នុងរង្វង់តែមួយដែលមានផ្ចិត

ជាចំណុចកណ្តាលនៃអង្កត់ BN និងកាំ $r = \dfrac{BN}{2}$

គណនាប្រវែងកាំរបស់វា

ក្នុងត្រីកោណ BEN យើងបាន $BN^2 = BE^2 + EN^2$

$$= 3^2 + \left(\frac{3\sqrt{55}}{5}\right)^2$$

$$= \frac{144}{5}$$

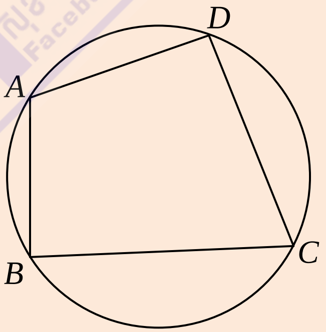
$$\Rightarrow BN = \sqrt{\frac{144}{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$$

នោះ $r = \dfrac{BN}{2} = \dfrac{\frac{12\sqrt{5}}{5}}{2} = \dfrac{6\sqrt{5}}{5}$

ដូចនេះ $\boxed{r = \dfrac{6\sqrt{5}}{5}\,cm}$

FACEBOOK Page - Sok Piseth Page សុខ ពិសិដ្ឋ Facebook.com/TeacherSokPiseth

ចំណាំ:



- ចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់កាលណា ផលបូករង្វាស់មុំពីរឈមគ្នាស្មើនឹង 180° ។
- ចតុកោណ $ABCD$ ចារឹកក្នុងរង្វង់កាលណា $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^o$ ។

VIII. M ជាចំណុចមួយនៅលើរង្វង់ C ដែលមានផ្ចិត O និងកាំ R ។រង្វង់ C' ដែលមានផ្ចិត M និងកាំ r (ដែល $r < R$) ជួបរង្វង់ C ត្រង់ A និង B ។ បន្ទាត់ OM ជួបរង្វង់ C ត្រង់ D ហើយជួបរង្វង់ C' ត្រង់ E និង F ដែល E នៅលើអង្កត់ DM ។ បន្ទាត់ Δ កែងនឹងបន្ទាត់ DM ត្រង់ F ហើយជួបបន្ទាត់ DA និង DB រៀងគ្នាត្រង់ I និង J ។

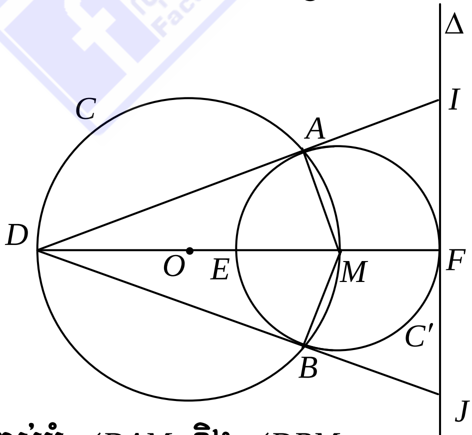
១. គណនារង្វាស់មុំ $\angle DAM$ និង $\angle DBM$ ។ ទាញបញ្ជាក់ថា បន្ទាត់ DI និង បន្ទាត់ DJ ប៉ះនឹងរង្វង់ C' ត្រង់ A និង B ។

២. បង្ហាញថាចតុកោណ $AMFI$ ចារឹកក្នុងរង្វង់មួយ ។

៣. ប្រៀបធៀប ΔADM និង ΔFDI ។

៤. ទាញបញ្ជាក់ថា $\frac{AD}{FD} = \frac{DM}{DI} = \frac{AM}{FI}$ ហើយ $AD \times DI = 2R(2R + r)$ ។

ដំណោះស្រាយ



១. គណនារង្វាស់មុំ $\angle DAM$ និង $\angle DBM$

តាមសម្មតិកម្ម យើងបាន អង្កត់ DM ជាអង្កត់ផ្ចិតនៃរង្វង់ផ្ចិត O

យើងបាន $\angle DAM = 90^o$ (មុំចារឹកកន្លះរង្វង់ផ្ចិត O)

$\angle DBM = 90^o$ (មុំចារឹកកន្លះរង្វង់ផ្ចិត O)

ដូចនេះ $\boxed{\angle DAM = 90^o \;,\; \angle DBM = 90^o}$

ទាញបញ្ជាក់ថា បន្ទាត់ DI និង បន្ទាត់ DJ ប៉ះរង្វង់ C' ត្រង់ A និង B

យើងមាន $\angle DAM = 90^o$ នោះ $DA \perp AM$

នោះ បន្ទាត់ DA ប៉ះរង្វង់ C ត្រង់ A

តែ បន្ទាត់ DA កាត់តាម I

ដូចនេះ បន្ទាត់ DI ប៉ះរង្វង់ប៉ះរង្វង់ C ត្រង់ A

ម្យ៉ាងទៀត $\angle DDM = 90^o$ នោះ $DB \perp BM$

នោះ បន្ទាត់ DB ប៉ះរង្វង់ C ត្រង់ B

តែ បន្ទាត់ DB កាត់តាម J

ដូចនេះ បន្ទាត់ DJ ប៉ះរង្វង់ប៉ះរង្វង់ C ត្រង់ B

២. បង្ហាញថាចតុកោណ $AMFI$ ចារឹកក្នុងរង្វង់មួយ

យើងមាន $\angle DAM = 90^o$ (មុំចារឹកកន្លះរង្វង់)

នោះ $\angle MAI = 90^o$ (មុំជាប់បន្ថែម)

ម្យ៉ាងទៀត $DF \perp \Delta$ នោះ $\angle MFI = 90^o$ (មុំកែង)

យើងបាន $\angle MAI + \angle MFI = 90^o + 90^o = 180^o$

ដូចនេះ ចតុកោណ $AMFI$ ចារឹកក្នុងរង្វង់មួយ

៣. ប្រៀបធៀប ΔADM និង ΔFDI

ΔADM និង ΔFDI មាន៖

$\angle DAM = \angle DFI = 90^o$ (សម្រាយខាងលើ)

$\angle ADM = \angle FDI$ ($\angle D$ ជាមុំរួម)

ដូចនេះ $\Delta ADM \sim \Delta FDI$ តាមករណីដំណូចទី១ (ម.ម)

៤. ទាញបញ្ជាក់ថា $\dfrac{AD}{FD} = \dfrac{DM}{DI} = \dfrac{AM}{FI}$

យើងមាន $\Delta ADM \sim \Delta FDI$ តាមករណីដំណូចទី១ (ម.ម)

វិបាកៈ $\left.\begin{matrix}\Delta ADM \\ \sim \\ \Delta FDI\end{matrix}\right| \Rightarrow \dfrac{AD}{FD} = \dfrac{DM}{DI} = \dfrac{AM}{FI}$

ដូចនេះ $\boxed{\dfrac{AD}{FD} = \dfrac{DM}{DI} = \dfrac{AM}{FI}}$

ទាញបញ្ជាក់ថា $AD \times DI = 2R(2R + r)$

យើងមាន $\dfrac{AD}{FD} = \dfrac{DM}{DI} \Rightarrow AD \times DI = DM \times FD$

ដោយ $DM = 2R$ (DM ជាអង្កត់ផ្ចិតរង្វង់ C)

ហើយ $FD = DM + MF = 2R + r$ (ព្រោះ $MF = r$ ជាកាំរង្វង់ C')

យើងបាន $AD \times DI = 2R(2R + r)$

ដូចនេះ $\boxed{AD \times DI = 2R(2R + r)}$

Facebook Page Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth

IX. យើងមានកន្លះរង្វង់ផ្ចិត O ដែលមានកាំ R និងអង្កត់ផ្ចិត AB ។ C ជាចំណុចមួយនៅលើកន្លះរង្វង់នេះដែល $\overset{\frown}{BC}=60^o$ ។ I ជាចំណុចមួយនៅលើអង្កត់ BC ដែល $BI=\frac{R}{2}$ ។ បន្ទាត់ AI កាត់កន្លះរង្វង់នេះត្រង់ F ហើយបន្ទាត់ AC កាត់បន្ទាត់ BF ត្រង់ K ។

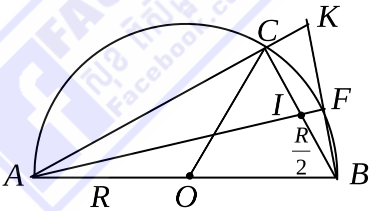
១. ប្រាប់ប្រភេទត្រីកោណ OBC ។

២. ប្រៀបធៀប ΔACI និង ΔBCK រួចទាញវិបាក ។

៣. បង្ហាញថាចតុកោណ $CIFK$ ចារឹកក្នុងរង្វង់មួយដែលអាចបញ្ជាក់ផ្ចិតវាបាន ។

៤. គណនាប្រវែង AC ជាអនុគមន៍នៃ R ។

ដំណោះស្រាយ



១. ប្រាប់ប្រភេទត្រីកោណ OBC

ត្រីកោណ OBC មាន៖

$OB=OC$ (កាំរង្វង់)

នោះ ΔOBC ជាត្រីកោណសមបាត

តែ $\overset{\frown}{BC}=60^o$ នោះ $\angle BOC=\overset{\frown}{BC}=60^o$ (មុំផ្ចិត និង ធ្នូស្កាត់)

ដូចនេះ ត្រីកោណ BOC ជាត្រីកោណសម័ង្ស

វិបាក $OB=OC=BC=R$ និង $\angle OBC=\angle OCB=60^o$

២. ប្រៀបធៀប ΔACI និង ΔBCK រួចទាញវិបាក

$\angle ACB = 90^o$ (មុំចារឹកកន្លះរង្វង់)

$\Rightarrow \angle BCK = 90^o$ (មុំជាប់បន្ថែម)

នោះ ΔACI និង ΔBCK មាន៖

$\angle ACI = \angle BCK = 90^o$ (សម្រាយខាងលើ)

$\angle CAI = \angle CBK$ (មុំចារឹកក្នុងរង្វង់ស្កាត់ធ្នូ CF រួម)

ដូចនេះ $\Delta ACI \sim \Delta BCK$ តាមករណីដំណូចទី១ (ម.ម)

វិបាក៖ $\left.\begin{array}{c}\Delta ACI \\ \sim \\ \Delta BCK\end{array}\right| \Rightarrow \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{CI}{CK} = \dfrac{AI}{BK}$ និង $\angle AIC = \angle BKC$

៣. បង្ហាញថាចតុកោណ $CIFK$ ចារឹកក្នុងរង្វង់មួយដែលអាចបញ្ជាក់ផ្ចិតវាបាន

យើងមាន $\angle AFB = 90^o$ (មុំចារឹកកន្លះរង្វង់)

នោះ $\angle IFK = 90^o$ (មុំជាប់បន្ថែម)

ហើយ $\angle ICK = \angle BCK = 90^o$ (មុំរួម)

យើងបាន $\angle IFK + \angle ICK = 90^o + 90^o = 180^o$

ដោយ ចតុកោណ $CIFK$ មានផលបូកមុំពីរឈមគ្នាស្មើនឹង 180°

ដូចនេះ ចតុកោណ $CIFK$ ចារឹកក្នុងរង្វង់មួយ ដែលមានផ្ចិតជាចំណុច កណ្ដាលនៃអង្កត់ IK

៤. គណនាប្រវែង AC ជាអនុគមន៍នៃ R

ត្រីកោណ ABC មាន $\angle ACB = 90^o$ (មុំចារឹកកន្លះរង្វង់)

នោះវាជាត្រីកោណកែងត្រង់ C

តាមទ្រឹស្ដីបទពីតាគ័រយើងបាន $AB^2 = AC^2 + BC^2$

ដោយ $AB = 2R$ (អង្កត់ផ្ចិតនៃរង្វង់) និង $BC = R$

យើងបាន $(2R)^2 = AC^2 + R^2$

$$AC^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2$$

$$\Rightarrow AC = R\sqrt{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{AC = R\sqrt{3}}$

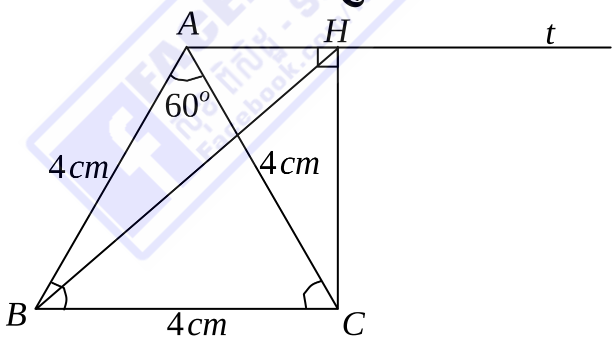
X. គេឱ្យត្រីកោណសម័ង្ស ABC ដែលមានជ្រុងប្រវែង $4cm$ ។ គេគូស កន្លះបន្ទាត់ $[At)$ ស្របនឹងជ្រុង $[BC]$ ។ H ជាចំណោលកែងនៃ C លើកន្លះបន្ទាត់ $[At)$ ។

១. គណនា CH និង AH ។

២. គណនា BH ។

៣. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABH ។

ដំណោះស្រាយ



១. គណនា CH និង AH

យើងមាន កន្លះបន្ទាត់ At ស្របនឹងបន្ទាត់ BC

នោះ $\angle CAH = \angle ACB$ (មុំឆ្លាស់ក្នុង)

ដោយ $\angle ACB = 60^o$ (មុំត្រីកោណសម័ង្ស)

យើងបាន $\angle CAH = 60^o$

នោះ ត្រីកោណកែង AHC មាន $\angle CAH = 60^o$ ជាត្រីកោណកន្លះសម័ង្ស

ដែលមានជ្រុង $AC = 4cm$ និង CH ជាកម្ពស់

យើងបាន $CH = \dfrac{AC\sqrt{3}}{2} = \dfrac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}\,cm$

និង $AH = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{4}{2} = 2\,cm$

ដូចនេះ $\boxed{CH = 2\sqrt{3}\,cm \ , \ AH = 2\,cm}$

២. គណនា BH

ដោយ $At \parallel BC$ ហើយ $AH \perp CH$ នោះ $BC \perp CH$

នោះ ត្រីកោណ BCH ជាត្រីកោណកែងត្រង់ C

តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រយើងបាន $BH^2 = BC^2 + CH^2$

$= 4^2 + (2\sqrt{3})^2$

$= 28$

$\Rightarrow BH = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}cm$

ដូចនេះ $\boxed{BH = 2\sqrt{7}cm}$

៣. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABH

របៀបទី១

យើងមាន $AH \parallel BC$ និង $BC \perp CH$

នោះ CH ជាកម្ពស់នៃត្រីកោណ ABH

យើងបាន $S_{\Delta ABH} = \dfrac{1}{2} AH \times CH$

$= \dfrac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\,cm^2$

ដូចនេះ ក្រឡានៃត្រីកោណ ABH $\boxed{S_{\Delta ABH} = 2\sqrt{3}\,cm^2}$

FACEBOOK Page - សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth facebook.com/TeacherSokPiseth

របៀបទី២

$S_{\Delta ABH} = S_{ABCH} - S_{\Delta BCH}$

ដោយ $S_{ABCH} = \dfrac{(AH+BC)\times CH}{2} = \dfrac{(2+4)\times 2\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}\,cm^2$

$S_{\Delta BCH} = \dfrac{1}{2}BC\times CH = \dfrac{1}{2}\times 4\times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}\,cm^2$

យើងបាន $S_{ABH} = 6\sqrt{3}\,cm^2 - 4\sqrt{3}\,cm^2 = 2\sqrt{3}\,cm^2$

ដូចនេះ ក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABH $\boxed{S_{\Delta ABH} = 2\sqrt{3}\,cm^2}$

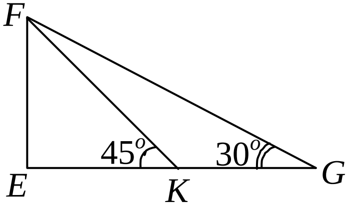
XI. យើងមានត្រីកោណ EFG កែងត្រង់ E ហើយរង្វាស់មុំ $\angle EGF = 30^o$ ។ K ជាចំណុចមួយនៅលើជ្រុង EG ដែល $\angle EKF = 45^o$ និង រង្វាស់ $EK = 4\,cm$ ។

១. គណនារង្វាស់មុំ $\angle GFK$ ប្រវែង EF និង FG ។

២. គណនាផ្ទៃក្រឡារបស់ត្រីកោណ EFG ។

FACEBOOK Page សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page facebook.com/TeacherSokPiseth

ដំណោះស្រាយ



១. គណនា $\angle GFK$, EF **និង** FG

យើងមាន $\angle EKF = \angle GFK + \angle KGF$ (មុំក្រៅត្រីកោណ EFK)

នោះ $\angle GFK = \angle EKF - \angle KGF$

$= 45^o - 30^o$

$= 15^o$

ដូចនេះ $\boxed{\angle GFK = 15^o}$

គណនា EF

ក្នុងត្រីកោណកែង EFK មាន $\angle EKF = 45^o$

នោះវាជាកន្លះការេដែលមាន ជ្រុង $EF = EK = 4cm$

ម្យ៉ាងទៀត ត្រីកោណកែង EFG មាន $\angle EGF = 30^o$

នោះវាជាត្រីកោណកន្លះសម័ង្ស ដែលមានជ្រុង

$FG = 2EF = 2 \times 4 = 8cm$

ហើយ កម្ពស់ $EG = \dfrac{FG\sqrt{3}}{2} = \dfrac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}\,cm$

ដូចនេះ $\boxed{EF = 4cm \;,\; FG = 8cm}$

២. គណនាផ្ទៃក្រឡារបស់ត្រីកោណ EFG

$$S_{\Delta EFG} = \frac{1}{2} EG \times EF$$

$$= \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 4 = 8\sqrt{3}\,cm^2$$

ដូចនេះ $\boxed{S_{\Delta EFG} = 8\sqrt{3}\,cm^2}$

Facebook Page សុខ ពិសិដ្ឋ Facebook.com/TeacherSokPiseth

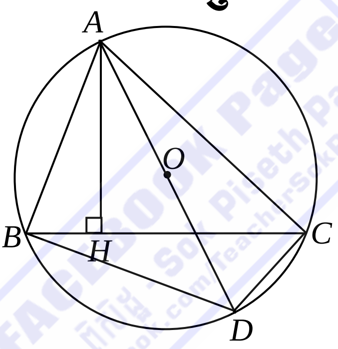
XII រង្វង់ផ្ចិត O មួយចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC មួយដែលមានកម្ពស់ AH និង មុំក្នុងទាំងបីជាមុំស្រួច។ D ជាចំណុចឆ្លុះនៃ A ចំពោះផ្ចិត O។

១. បង្ហាញថា $\angle ABC=\angle ADC$ និង $\angle ACB=\angle ADB$ ។

២. ប្រៀបធៀប ΔHAB និង ΔCAD រួចហើយ ΔHAC និង ΔBAD ។

៣. បង្ហាញថា $AB\times AC=AD\times AH$ ហើយ $\angle BAD=\angle HAC$ ។

ដំណោះស្រាយ



FACEBOOK Page
Sok Piseth Page
facebook.com/TeacherSokPiseth

១. បង្ហាញថា $\angle ABC=\angle ADC$ និង $\angle ACB=\angle ADB$

យើងមាន D ជាចំណុចឆ្លុះនៃ A ចំពោះផ្ចិត O

នោះ AD ជាអង្កត់ផ្ចិតនៃរង្វង់ផ្ចិត O (D ស្ថិតនៅលើរង្វង់ផ្ចិត O)

យើងបាន $\angle ABC$ និង $\angle ADC$ ជាមុំចារឹកក្នុងរង្វង់ស្កាត់ធ្នូ AC រួម

ដូចនេះ $\boxed{\angle ABC=ADC}$

ដូចគ្នាដែរ $\angle ACB$ និង $\angle ADB$ ជាមុំចារឹកក្នុងរង្វង់ស្កាត់ធ្នូ AB រួម

ដូចនេះ $\boxed{\angle ACB=\angle ADB}$

២. ប្រៀបធៀប ΔHAB និង ΔCAD រួចហើយ ΔHAC និង ΔBAD ។

យើងមាន $A\widehat{H}B=90^o$ (H ជាជើងកម្ពស់នៃ ΔABC)

$\angle ACD = 90^o$ (មុំចារឹកកន្លះរង្វង់)

ΔHAB និង ΔCAD មាន :

$\angle AHB = \angle ACD = 90^o$ (សម្រាយខាងលើ)

$\angle ABC = \angle ADC$ (សម្រាយខាងលើ)

ដូចនេះ $\Delta HAB \sim \Delta CAD$ តាមករណីដំណូចទី១ ម.ម

ΔHAC និង ΔBAD មាន :

$\angle AHC = 90^o$ (H ជាជើងកម្ពស់នៃ ΔABC)

$\angle ABD = 90^o$ (មុំចារឹកកន្លះរង្វង់)

នោះ $\angle AHC = \angle ABD = 90^o$

ហើយ $\angle ACB = \angle ADB$ (សម្រាយខាងលើ)

ដូចនេះ $\Delta HAC \sim \Delta BAD$ តាមករណីដំណូចទី១ ម.ម

៣. បង្ហាញថា $AB \times AC = AD \times AH$ ហើយ $\angle BAD = \angle HAC$

តាមសម្រាយខាងលើ $\Delta HAC \sim \Delta BAD$

វិបាក $\Delta HAC \sim \Delta BAD \Rightarrow \dfrac{AH}{AB} = \dfrac{AC}{AD}$ និង $\angle BAD = \angle HAC$

$$\Rightarrow AB \times AC = AD \times AH$$

ដូចនេះ $AB \times AC = AD \times AH$ ហើយ $\angle BAD = \angle HAC$

FACEBOOK Page សុខ ពិសិដ្ឋ Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth

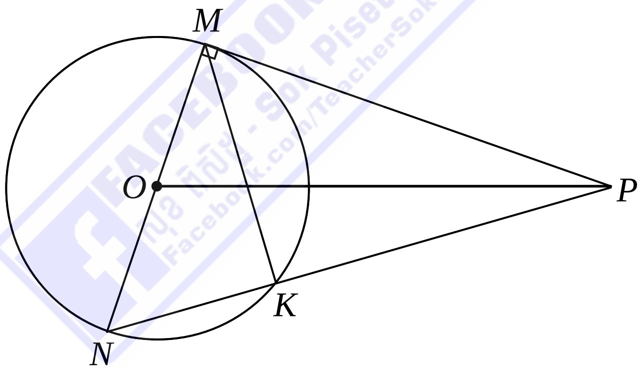
XII. យើងមានរង្វង់ O ដែលមានកាំស្មើ R។ P ជាចំណុចមួយនៅក្រៅរង្វង់ O ដែល $OP=3R$ ។ គេគូសអង្កត់ផ្ចិត MN របស់រង្វង់ O ដោយធ្វើយ៉ាងណាឱ្យ ΔPMN កែងត្រង់ M ។

១. គណនាជ្រុង និងផ្ទៃក្រឡារបស់ ΔPMN ជាអនុគមន៍នៃ R ។

២. អង្កត់ PN កាត់រង្វង់ O ត្រង់ K។ បង្ហាញថាបន្ទាត់ MK កែងនឹងបន្ទាត់ NP។

៣. គណនាប្រវែងអង្កត់ PK ជាអនុគមន៍នៃ R ។

ដំណោះស្រាយ



១. គណនាជ្រុង និង ផ្ទៃក្រឡារបស់ ΔPMN ជាអនុគមន៍នៃ R

យើងមាន MN ជាអង្កត់ផ្ចិតរង្វង់ នោះ $MN=2R$

ក្នុងត្រីកោណកែ OMP តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រយើងបាន

$OP^2=OM^2+MP^2$

$(3R)^2=R^2+MP^2$

$MP^2=9R^2-R^2=8R^2$

$\Rightarrow MP=\sqrt{8R^2}=2R\sqrt{2}$

ក្នុងត្រីកោណកែង PMN កែងត្រង់ M តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រ

យើងបាន $PN^2 = MN^2 + MP^2$

$$= (2R)^2 + (2R\sqrt{2})^2$$

$$= 4R^2 + 8R^2$$

$$= 12R^2$$

$$\Rightarrow PN = \sqrt{12R^2} = 2R\sqrt{3}$$

ដូចនេះ ជ្រុង ΔPMN គឺ $\boxed{MN = 2R\,,\, MP = 2R\sqrt{2}\,,\, PN = 2R\sqrt{3}}$

គណនាផ្ទៃក្រឡា ΔPMN

$$S_{PMN} = \frac{1}{2} MN \times MP$$

$$= \frac{1}{2} 2R \times 2R\sqrt{2}$$

$$= 2R^2\sqrt{2}$$

ដូចនេះ គណនាផ្ទៃក្រឡា ΔPMN គឺ $\boxed{S_{PMN} = 2R^2\sqrt{2}}$

FACEBOOK Page - Sok Piseth Page
Facebook.com/TeacherSokPiseth

២. បង្ហាញថាបន្ទាត់ MK **កែងនឹងបន្ទាត់** NP

តាមសមតិកម្មយើងមាន MN ជាអង្កត់ផ្ចិតរង្វង់

នោះ $\angle MKN = 90^o$ (មុំចារឹកកន្លះរង្វង់)

$\Rightarrow MK \perp NK$ នោះ $MK \perp NP$ (ព្រោះ N, K, P នៅលើបន្ទាត់តែមួយ)

ដូចនេះ $MK \perp NP$

៣. គណនាប្រវែងអង្កត់ PK **ជាអនុគមន៍នៃ** R

ក្នុងត្រីកោណកែង PMN មាន MK ជាកម្ពស់

តាមទំនាក់ទំនងមាត្រក្នុងត្រីកោណកែងយើបាន $PM^2 = PN \times PK$

$$(2R\sqrt{2})^2 = 2R\sqrt{3}\times PK$$

$$\Rightarrow PK = \frac{8R^2}{2R\sqrt{3}} = \frac{4R\sqrt{3}}{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{PK = \frac{4R\sqrt{3}}{3}}$

XIV. យើងមានរង្វង់ផ្ចិត O កាំ R និងអង្កត់ផ្ចិត AB ។ គេបន្លាយអង្កត់ផ្ចិត AB ឱ្យបាន $BC = R$ ។ តាមចំណុច C គេគូសបន្ទាត់ប៉ះនឹងរង្វង់ផ្ចិត O ត្រង់ M ។ គេភ្ជាប់អង្កត់ MA, MO និង MB ។

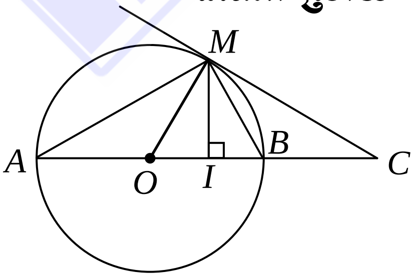
១. បង្ហាញថាត្រីកោណ OMB ជាត្រីកោណសម័ង្ស។

២. រកប្រភេទនៃត្រីកោណ AMC ។

៣. គណនាប្រវែងអង្កត់ BM និង AM ជាអនុគមន៍នៃ R ។

៤. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ACM ។

ដំណោះស្រាយ



១.បង្ហាញថាត្រីកោណ OMB ជាត្រីកោណសម័ង្ស

យើងមាន $OM = OB = R$ (កាំរង្វង់) (1)

ម្យ៉ាងទៀត បន្ទាត់ CM ប៉ះនឹងរង្វង់ផ្ចិត O ត្រង់ M នោះ $CM \perp OM$

នោះត្រីកោណ OMC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ M

ដោយ $BO = BC = R$ នោះ MB ជាមេដ្យាននៃ ΔOMC ត្រូវនឹង

អ៊ីប៉ូតេនុស OC យើងបាន $MB = OB = BC = \frac{OC}{2} = R$ (2)

តាម $(1) \& (2)$ យើងបាន ΔOBM មាន $OM = OB = MB = R$

ដូចនេះ ត្រីកោណ OMB ជាត្រីកោណសម័ង្ស

វិបាក ៖ $\angle OMB = \angle OBM = \angle MOB$

២. រកប្រភេទនៃត្រីកោណ AMC

យើងមាន $\angle AMB = 90^o$ (មុំចារឹកកន្លះរង្វង់)

នោះ ΔAMB ជាត្រីកោណកែងត្រង់ M

យើងបាន $\angle A + \angle ABM = 90^o$ (ផលបូកមុំស្រួចក្នុងត្រីកោណកែង)

តែ $\angle ABM = 60^o$ (វិបាកខាងលើ)

យើងបាន $\angle A + 60^o = 90^o \Rightarrow \angle A = 30^o$ (*)

ម្យ៉ាងទៀត ក្នុងត្រីកោណកែង OMC កែងត្រង់ M

យើងបាន $\angle C + \angle MOC = 90^o$ (ផលបូកមុំស្រួចក្នុងត្រីកោណកែង)

តែ $\angle MOC = 60^o$ (វិបាកខាងលើ)

យើងបាន $\angle C + 60^o = 90^o \Rightarrow \angle C = 30^o$ (**)

តាម $(8) \& (**)$ យើងបាន $\angle A = \angle C = 30^o$

ក្នុងត្រីកោណ AMC មាន $\angle A = \angle C = 30^o$ (សម្រាយខាងលើ)

ដូចនេះ ត្រីកោណ AMC ជាត្រីកោណសមបាតកំពូល M

៣. គណនាប្រវែងអង្កត់ BM និង AM ជាអនុគមន៍នៃ R

តាមសម្រាយខាងលើ ΔOBM ជាត្រីកោណសម័ង្ស

នោះ $BM = OB = R$ (កាំរង្វង់)

ក្នុងត្រីកោណកែង AMB យើងបាន $AM^2 + BM^2 = AB^2$ (ទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រ)

$$AM^2 + R^2 = (2R)^2$$

$$AM^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2 \quad \Rightarrow AM = R\sqrt{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{BM = R\,,\ AM = R\sqrt{3}}$

៤. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ACM

តាង MI ជាកម្ពស់នៃត្រីកោណសមបាត ACM

នោះ I ជាចំណុចកណ្តាលនៃជ្រុង AC

យើងបាន $AI = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{2R+R}{2} = \dfrac{3R}{2}$

តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រក្នុងត្រីកោណកែង AMI យើងបាន:

$$AM^2 = AI^2 + MI^2$$

$$(R\sqrt{3})^2 = \left(\frac{3R}{2}\right)^2 + MI^2$$

$$MI^2 = 3R^2 - \frac{9R^2}{4} = \frac{3R^2}{4}$$

$$\Rightarrow MI = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

យើងបានផ្ទៃក្រឡា ΔACM គឺ $S_{ACM} = \dfrac{1}{2} AC \times MI$

$$= \frac{1}{2} \times 3R \times \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$$

ដូចនេះ $\boxed{S_{ACM} = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4}}$

XV.គេឱ្យរង្វង់ផ្ចិត O កាំ R និងអង្កត់ផ្ចិត $BC=2R$ ។ គេគូសអង្កត់ធ្នូ AB ឱ្យបាន $\angle ABC=30^\circ$ ។

១. ប្រាប់ប្រភេទត្រីកោណ ABC រួចគណនារង្វាស់ជ្រុង AB និង AC ជាអនុគមន៍នៃ R ។

២. គេគូសកន្លះបន្ទាត់ពុះនៃមុំ BAC កាត់ជ្រុង BC ត្រង់ M និងកាត់រង្វង់ផ្ចិត O ត្រង់ D ។

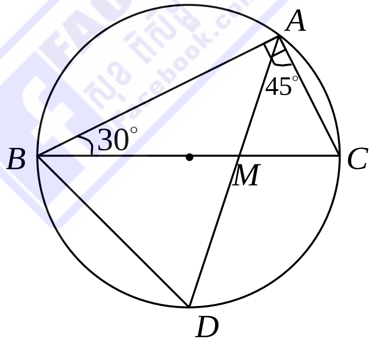
ក. គណនា BM និង CM ។

ខ. ប្រៀបធៀបត្រីកោណ ABD និង AMC រួចសរសេរផលធៀបដំណូច។ ស្រាយបំភ្លឺថា $AB\cdot AC=AM^2+MB\cdot MC$ ។

គ. គណនា MA និង MD ជាអនុគមន៍នៃ R ។

FACEBOOK Page សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page facebook.com/TeacherSokPiseth

ដំណោះស្រាយ



១. ប្រាប់ប្រភេទត្រីកោណ ABC

យើងមាន $\angle BAC=90^\circ$ (មុំចារឹកកន្លះរង្វង់)

នោះ ΔABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A

តែ $\angle ABC=30^\circ$ (សមតិកម្ម)

ដូចនេះ ΔABC ជាត្រីកោណកន្លះសម័ង្ស

គណនារង្វាស់ជ្រុង AB និង AC

យើងបាន $AB=\frac{BC\sqrt{3}}{2}=\frac{2R\sqrt{3}}{2}=R\sqrt{3}$ (AB ជាកម្ពស់)

និង $AC=\frac{BC}{2}=\frac{2R}{2}=R$

ដូចនេះ $\boxed{AB=R\sqrt{3}\ ,\ AC=R}$

២. ក. គណនា BM និង CM

យើងមានកន្លះបន្ទាត់ AM ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ BAC

នោះ $\frac{BM}{AB}=\frac{CM}{AC}=\frac{BM+MC}{AB+AC}$

$$=\frac{BC}{AB+AC}$$

$$=\frac{2R}{R\sqrt{3}+R}=\frac{2}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{3}-1$$

យើងបាន
$$BM=\left(\sqrt{3}-1\right)\cdot AB=\left(\sqrt{3}-1\right)\cdot R\sqrt{3}=(3-\sqrt{3})R$$
$$CM=\left(\sqrt{3}-1\right)AC=\left(\sqrt{3}-1\right)R$$

ដូចនេះ $\boxed{BM=(3-\sqrt{3})R\,,CM=\left(\sqrt{3}-1\right)R}$

ខ. ប្រៀបធៀបត្រីកោណ ABD និង AMC

ត្រីកោណ ABD និង AMC មាន:

$\angle BAD=\angle MAC$ ($[AM)$ ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ BAC)

$\angle ADB=\angle ACM$ (មុំចារឹកក្នុងរង្វង់ស្កាត់ធ្នូ AB រួម)

ដូចនេះ $\Delta ABD\sim\Delta AMC$ តាមករណី ម.ម

FACEBOOK Page Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth

សរសេរផលធៀបដំណូច

វិបាក $\left.\begin{matrix}\Delta BAD \\ \sim \\ \Delta MAC\end{matrix}\right| \Rightarrow \dfrac{AB}{AM}=\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{BD}{MC}=k$

ដូចនេះ $\dfrac{AB}{AM}=\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{BD}{MC}=k$

ស្រាយបំភ្លឺថា $AB\cdot AC = AM^2 + MB\cdot MC$

តាមផលធៀបដំណូចខាងលើ យើងមាន $\dfrac{AB}{AM}=\dfrac{AD}{AC}$

$$\Rightarrow AB\cdot AC = AM\cdot AD$$

$$= AM\,(AM + MD) \quad (1)$$

ΔAMC និង ΔBMD មាន៖

$\angle AMC = \angle BMD$ (មុំទល់កំពូល)

$\angle MDB = \angle ACM$ (មុំចារឹកក្នុងរង្វង់ស្កាត់ធ្នូ AB រួម)

នោះ $\Delta AMC \sim \Delta BMD$

វិបាក៖ $\dfrac{AM}{MB}=\dfrac{MC}{MD} \Rightarrow MD = \dfrac{MB\cdot MC}{AM} \quad (2)$

យក (2) ជំនួសក្នុង (1) យើងបាន $AB\cdot AC = AM\left(AM + \dfrac{MB\cdot MC}{AM}\right)$

$$= AM^2 + MB\cdot MC$$

ដូចនេះ $\boxed{AB\cdot AC = AM^2 + MB\cdot MC}$

គ. គណនា MA **និង** MD

យើងមាន $AB\cdot AC = AM^2 + MB\cdot MC$

តែ $AB = R\sqrt{3}$, $AC = R$, $BM = (3-\sqrt{3})R$, $CM = \left(\sqrt{3}-1\right)R$

យើងបាន $R\sqrt{3}\cdot R = AM^2 + (3-\sqrt{3})R\cdot(\sqrt{3}-1)R$

$$R^2\sqrt{3} = AM^2 + (3\sqrt{3} - 3 - 3 + \sqrt{3})R^2$$

$$AM^2 = R^2\sqrt{3} - (4\sqrt{3} - 6)R^2$$

$$= R^2\left(6 - 3\sqrt{3}\right)$$

$$\Rightarrow MA = R\cdot\sqrt{\left(6-3\sqrt{3}\right)^2}$$

$$= R\cdot\sqrt{\frac{\left(3-\sqrt{3}\right)^2}{2}} = R\cdot\frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{(3\sqrt{2}-\sqrt{3})R}{2}$$

គណនា MD

តាម $(2): MD = \dfrac{MB\cdot MC}{AM}$

យើងបាន $MD = \dfrac{\left(3-\sqrt{3}\right)R\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)R}{R\cdot\dfrac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} = \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)R$

ដូចនេះ $\boxed{MA = \dfrac{(3\sqrt{2}-\sqrt{3})R}{2}\ ,\ MD = \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)R}$

FACEBOOK Page សុខ ពិសិដ្ឋ Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth

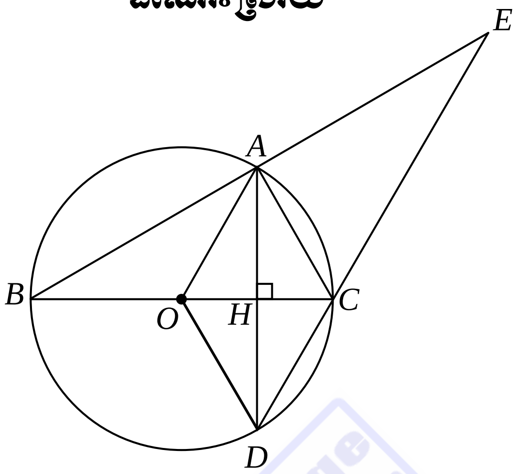
XVI. រង្វង់មួយមានផ្ចិត O មានអង្កត់ផ្ចិត BC និងកាំស្មើនឹង R ។ H ជាចំណុចកណ្តាលនៃជ្រុង OC ។ ត្រង់ H គេគូសអង្កត់ធ្នូ AD កែងនឹងបន្ទាត់ BC ។ បន្ទាត់ BA និងបន្ទាត់ DC ជួបគ្នាត្រង់ E ។

១. ប្រៀបធៀបត្រីកោណ EBC និង EDA ។

២. គណនា AC និង AB ទាក់ទងនឹងតម្លៃ R ។

៣. ប្រាប់ប្រភេទចតុកោណ $ACDO$ ។

ដំណោះស្រាយ



១. ប្រៀបធៀបត្រីកោណ EBC និង EDA

ត្រីកោណ EBC និង EDA មាន៖

- $\angle EBC = \angle EDA$ (មុំចារឹកក្នុងរង្វង់ស្កាត់ធ្នូ AC រួម)
- $\angle E$ ជាមុំរួម

ដូចនេះ $\boxed{\Delta EBC \sim \Delta EDA}$ (តាមករណីដំណូចទី១ ម .ម)

២. គណនា AC និង AB ទាក់ទងនឹងតម្លៃ R

ត្រីកោណ ABC មាន $\angle BAC = 90^o$ (មុំចារឹកកន្លះរង្វង់)

នោះ វាជាត្រីកោណកែងត្រង់ A

ហើយមាន $AH \perp BC$ នោះ AH ជាកម្ពស់

តាមទំនាក់ទំនងមាត្រក្នុងត្រីកោណកែងយើងបាន:

- $AC^2 = BC \cdot HC$

  ដោយ $BC = 2R$ (អង្កត់ផ្ចិតរង្វង់)

  និង $HC = \dfrac{R}{2}$ (កណ្ដាលជ្រុង OC)

យើងបាន $AC^2 = 2R\cdot\frac{R}{2} = R^2$

$\Rightarrow AC = \sqrt{R^2} = R$

• $AB^2 = BC\cdot BH$, $(BH = R + \frac{R}{2} = \frac{3R}{2})$

$= 2R\cdot\frac{3R}{2}$

$= 3R^2$

$\Rightarrow AB = \sqrt{3R^2} = R\sqrt{3}$

ដូចនេះ $\boxed{AC = R \ , \ AB = R\sqrt{3}}$

៣. ប្រាប់ប្រភេទចតុកោណ $ACDO$

ចតុកោណ $ACDO$ មាន៖

- H ជាចំណុចកណ្ដាលនៃជ្រុង OC (សមតិកម្ម)
- H នៅកណ្ដាលអង្កត់ AD (អង្កត់ផ្ចិត BC កែងនឹងអង្កត់ធ្នូ AD)

នោះ ចតុកោណ $ACDO$ ជាប្រលេឡូក្រាម

តែ $OA = OD$ (កាំរង្វង់)

ដូចនេះ **ចតុកោណ $ACDO$ ជាចតុកោណស្មើ**

របៀបម្យ៉ាងទៀត

ចតុកោណណ $ACDO$ មាន $AD \perp OC$ ត្រង់ H (សមតិកម្ម)

ដោយ អង្កត់ទ្រូង AD និង OC កែងគ្នា (តាមលក្ខណៈអង្កត់ទ្រូងកែងគ្នា)

ដូចនេះ **ចតុកោណ $ACDO$ ជាចតុកោណស្មើ**

FACEBOOK Page Sok Piseth Page facebook.com/TeacherSokPiseth

XVII. ABC ជាត្រីកោណកែងសមបាតត្រង់ A ហើយ $AB = AC = x$។ DAC ក៏ជាត្រីកោណកែងសមបាតកែងត្រង់ D។ ត្រីកោណទាំងពីរនេះស្ថិតនៅសងខាងនៃជ្រុងរួម AC ។

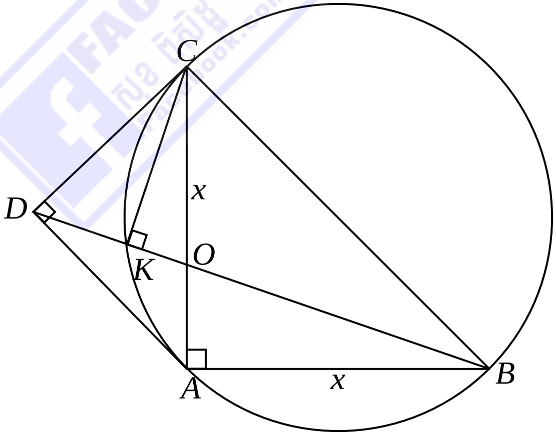
១. កំណត់ប្រភេទចតុកោណ $ABCD$ ។

២. គណនា BC , AD ជាអនុគមន៍នៃ x (ជាប់ទាក់ទងនឹង x)។

៣. អង្កត់ទ្រូងទាំងពីររបស់ចតុកោណកាត់គ្នាត្រង់ O។ បង្ហាញថា ΔAOD ដូច ΔCOB ។ រួចរកផលធៀបដំណូច។ គណនា OA, OC , OB ជាអនុគមន៍នៃ x ។

៤. រង្វង់មានអង្កត់ផ្ចិត BC កាត់អង្កត់ BD ត្រង់ K ។ បង្ហាញថា អង្កត់ CK ជាកម្ពស់ ΔBCD ។

ដំណោះស្រាយ



១. កំណត់ប្រភេទចតុកោណ $ABCD$

ចតុកោណ $ABCD$ មាន:

- $\angle D = 90^o$ (មុំកែង) (1)

- AC ជាអង្កត់ទ្រូង
- $\angle DAC = \angle ACB = 45^o$ (មុំបាតនៃត្រីកោណសមបាត

  តែ $\angle DAC$ និង $\angle ACB$ ជាមុំឆ្លាស់កក្នុង

  នោះ $AD \parallel AB$ (2)

 តែ $\angle B = 45^o$ (មុំបាតត្រីកោណកែសមបាត)

 នោះ អង្កត់ DC និង AB មិនស្របគ្នា (3)

តាម $(1), (2)$ និង (3)

យើងបាន ចតុកោណ $ABCD$ ជាចតុកោណព្នាយកែង

របៀបម្យ៉ាងទៀត

យើងមាន $\angle DCA = \angle ACB = 45^o$ (មុំបាតត្រីកោណកែងសមបាត)

នោះ $\angle DCB = \angle DCA + \angle ACB = 45^o + 45^o = 90^o$

$\Rightarrow BC \perp CD$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត $AD \perp CD$ (ព្រោះ ΔACD ជាត្រីកោណកែងត្រង់ D) (2)

តាម (1) និង (2) $\Rightarrow BC \parallel AD$ និង $BC \perp CD$, $AD \perp CD$

នោះចតុកោណ $ABCD$ ជាចតុកោណព្នាយកែង

ដោយ $\angle ABC = 45^o$ (មុំបាតត្រីកោណកែងសមបាត)

នោះនោះ អង្កត់ DC និង AB មិនស្របគ្នា ឬ AB និង BC មិនកែងគ្នា

ដូចនេះ ចតុកោណ $ABCD$ ជាចតុកោណព្នាយកែង

២. គណនា BC , AD ជាអនុគមន៍នៃ x

- ក្នុងត្រីកោណកែង ABC តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រ យើងបាន:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = x^2 + x^2 = 2x^2$$
$$BC = \sqrt{2x^2} = x\sqrt{2}$$

- ក្នុងត្រីកោណកែង ADC តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រ យើងបាន:

$AC^2 = AD^2 + DC^2$

តែ $AD = DC$ (ជ្រុងត្រីកោណកែងសមបាត)

$AD^2 = DC^2 \Rightarrow AD^2 + DC^2 = 2AD^2$

យើងបាន $AC^2 = 2AD^2$

$$\Rightarrow AD^2 = \frac{AC^2}{2} = \frac{x^2}{2}$$

$$\Rightarrow AD = \sqrt{\frac{x^2}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}x$$

ដូចនេះ $\boxed{BC = x\sqrt{2}\ ,\ AD = \frac{\sqrt{2}}{2}x}$

៣. បង្ហាញថា ΔAOD ដូច ΔCOB រួចរកផលធៀបដំណូច

ត្រីកោណ AOD និង ត្រីកោណ COB មាន:

- $\angle AOD = \angle COB$ (មុំទល់កំពូល)
- $\angle OCB = \angle OAD = 45^o$ (មុំបាតត្រីកោណកែងសមបាត)

ដូចនេះ $\boxed{\Delta AOD \sim \Delta COB}$ (តាមករណីដំណូចទី១ ម.ម)

វិបាក:

$$\left.\begin{matrix}\Delta AOD \\ \sim \\ \Delta COB\end{matrix}\right| \Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OD}{OB} = \frac{AD}{BC} = k$$

គណនា OA, OC, OB ជាអនុគមន៍នៃ x

តាមផលធៀបដំណូចខាងលើ យើងបាន $\frac{OA}{OC} = \frac{AD}{BC}$

$$\Leftrightarrow \frac{OA}{AD} = \frac{OC}{BC} = \frac{OA + OC}{AD + BC} = \frac{AC}{AD + BC}$$

FACEBOOK Page SokPiseth Page facebook.com/TeacherSokPiseth

ដោយ $AC = x$, $BC = x\sqrt{2}$ និង $AD = \frac{\sqrt{2}}{2}x$

យើងបាន $\frac{OA}{AD} = \frac{OC}{BC} = \frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}x + x\sqrt{2}} = \frac{x}{\frac{3x\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

- $\frac{OA}{AD} = \frac{\sqrt{2}}{3} \Rightarrow OA = \frac{\sqrt{2}}{3}AD = \frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}x = \frac{x}{3}$
- $\frac{OC}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{3} \Rightarrow OC = \frac{\sqrt{2}}{3}BC = \frac{\sqrt{2}}{3}\cdot x\sqrt{2} = \frac{2x}{3}$

(គណនា OC តាមរបៀបម្យ៉ាងទៀតគឺ $OC = AC - OA = x - \frac{x}{3} = \frac{2x}{3}$)

គណនា OB

ត្រីកោណ OAB កែងត្រង់ A

តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រ យើងបាន $OB^2 = OA^2 + AB^2$

$$= \left(\frac{x}{3}\right)^2 + x^2$$

$$= \frac{10x^2}{9}$$

$$\Rightarrow OB = \sqrt{\frac{10x^2}{9}} = \frac{x\sqrt{10}}{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{OA = \frac{x}{3}, OC = \frac{2x}{3}, OB = \frac{x\sqrt{10}}{3}}$

ឃ. បង្ហាញថាអង្កត់ CK ជាកម្ពស់ ΔBCD

យើងមាន $\angle BKC = 90^o$ (មុំចារឹកកន្លះរង្វង់)

នោះ $KC \perp BK$ $\Rightarrow KC \perp BD$ (ព្រោះ K នៅលើអង្កត់ BD)

ដូចនេះ អង្កត់ CK ជាកម្ពស់ ΔBCD

FACEBOOK Page - Sok Piseth Page Facebook.com/TeacherSokPiseth

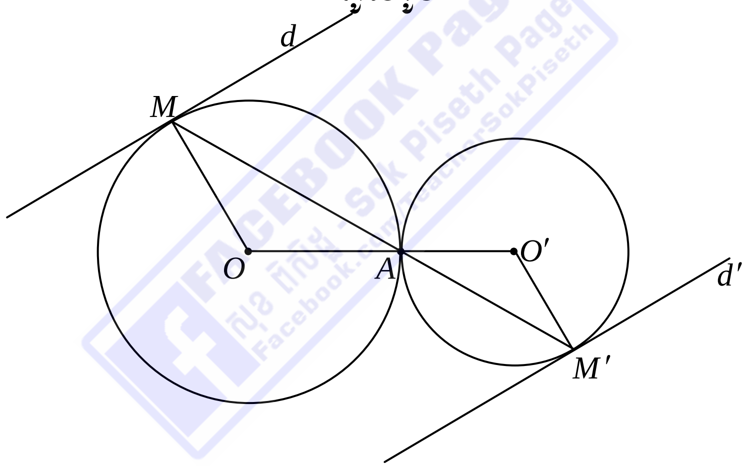
ប្រតិបត្តិ ៖ យើងមានរង្វង់ពីរ ផ្ចិត O និង O' កាំ R និង R' រៀងគ្នា ប៉ះគ្នាខាងក្រៅត្រង់ចំណុច A ។ បន្ទាត់មួយគូសចេញពី A កាត់រង្វង់នេះត្រង់ M និង M' ។

១. បង្ហាញ បន្ទាត់ OM និង $O'M'$ ស្របគ្នា ។

២. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បន្ទាត់ប៉ះត្រង់ M និង M' ស្របគ្នា។

៣. គណនាផលធៀប $\frac{AM'}{AM}$ ជាអនុគមន៍នៃ R និង R' ។

គូសរូប



FACEBOOK Page
Sok Piseth Page