ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា

សំងាត់គន្លឹះ

គន្លឹះ អនុគមន៍

Key to the Juntion

សំរាប់ការប្រលង

ក្រុមសិទ្ធិ H.P

សុខ ពិសិដ្ឋ

ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍

រកដែនកំនត់នៃអនុគមន៍ $f(x)$ គឺរកសំណុំ D បណ្តាតំលៃលេខ x ដើម្បីអោយ $f(x)$ កំនត់ ។ (ឬ មានន័យ)

* ប្រសិនបើ $f(x)$ ជាកន្សោមពិជគណិត គេរកតំលៃ x ដែលនាំអោយកន្សោមពិជគណិតនោះមានន័យ

$f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ កំនត់កាលណា $Q(x)\neq 0$

$f(x)=\sqrt[2n]{Q(x)}$ កំនត់កាលណា $Q(x)\geq 0$ ($n\in N^*$)

$f(x)=\dfrac{P(x)}{\sqrt[2n]{Q(x)}}$ កំនត់កាលណា $Q(x)>0$ ($n\in N^*$) $\left(\begin{cases}Q(x)\geq 0\\ Q(x)\neq 0\end{cases}\Rightarrow Q(x)>0\right)$

* ប្រសិនបើ $f(x)$ ជាបណ្តាអនុគមន៍

$f(x)=\begin{cases}Sinx\\ Cosx\end{cases}$ កំនត់ $\forall x$, $f(x)=\sqrt[2n+1]{Q(x)}$: កំណត់ $\forall Q(x)$

$f(x)=\ell ogU_{(x)}$ កំនត់កាលណា $U_{(x)}>0$

$f(x)=a^x\ (a>0)$ កំនត់ $\forall x$

$f(x)=\begin{cases}arcSinx\\ arcCosx\end{cases}$ កំនត់ $\forall x\in[-1;1]$

$f(x)=\begin{cases}arctgx\\ arcCotgx\end{cases}$ កំនត់ $\forall x$

* ប្រសិនបើ $f(x)$ មានដែនកំនត់ D_1 ; $g(x)$ មានដែនកំនត់ D_2 នោះ

$\left.\begin{matrix}f(x)\cdot g(x)\\ f(x)\pm g(x)\end{matrix}\right\}$ មានដែនកំនត់ : $D_1\cap D_2$

សុខ ពិសិដ្ឋ (គ្រូបង្រៀនគណិតវិទ្យានៅវិ.សម្តេចតេជោ ហ៊ុន សែន កំពង់ត្របែក)
www.pisethsok.wordpress.com

$\frac{f(x)}{g(x)}$ មានដែនកំនត់ : $(D_1 \cap D_2) - D'$

ដែល $D' = \{x / g(x) = 0\}$

លំហាត់ ១ : រកដែនកំនត់នៃអនុគមន៍ $f(x) = \sqrt{\frac{1-|x|}{2-|x|}}$

ដំណោះស្រាយ: អនុគមន៍កំនត់កាលណា $2-|x| \neq 0$ និង $\frac{1-|x|}{2-|x|} \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x| \neq 2 & (1) \\ \frac{1-|x|}{2-|x|} \geq 0 & (2) \end{cases}$$

(1) $\Rightarrow x \neq \pm 2$

(2) គេបាន :

x	$-\infty$		-2		-1		1		2		$+\infty$
$1-\|x\|$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	
$2-\|x\|$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{1-\|x\|}{2-\|x\|}$		$+$		▨	0	$+$	0	▨		$+$	

$x < -2 ; -1 \leq x \leq 1 ; x > 2$

ដែនកំនត់នៃអនុគមន៍គឺ : $D =]-\infty ; 2[\, U [-1;1] U]2;+\infty[$

ប្រយ័ត្ន : * ច្រលំសញ្ញានៃ $1-|x|$ គឺ :

x		-1		1	$+$
$1-\|x\|$	$-$	0	$+$	0	$-$

(សញ្ញានៃ $1-|x|$ ត្រូវនឹងសញ្ញា $1-x^2$)

* ច្រលំសញ្ញានៃ $2-|x|$ គឺ

x		-2		$+2$	$+$
$2-\|x\|$	$-$	0	$+$	0	$-$

(សញ្ញានៃ $2-|x|$ ត្រូវនឹងសញ្ញា $4-x^2$)

លំហាត់ ២ : រកដែនកំនត់នៃអនុគមន៍ $f(x) = tgx - x\sqrt{Cosx}$

ចំលើយ : គេមាន $f(x) = h(x) + k(x)$

ដែល $h(x) = tgx$; $k(x) = -x\sqrt{Cosx}$

* $h(x) = tg(x)$ មិនកំនត់ចំពោះ $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}; k \in Z$

ដែនកំនត់គឺ : $D_1 = IR - \left\{ x / x = (2k+1)\frac{\pi}{2} ; k \in Z \right\}$

* $k(x) = -x\sqrt{Cosx}$ កំនត់ចំពោះ $Cosx \geq 0$

ដែនកំនត់ $k(x)$ គឺ :

$$D_2 = \left\{ x / -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi ; k \in Z \right\}$$

ដែនកំនត់នៃ $f(x)$ គឺ :

$$D = D_1 \cap D_2 = \left\{ x / -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi ; k \in Z \right\}$$

គេដោះស្រាយម្យ៉ាងទៀតដោយ :

$$f(x) = tgx - x\sqrt{Cosx} = \frac{Sinx}{Cosx} - x\sqrt{Cosx}$$

$f(x)$ កំនត់ចំពោះ $\begin{cases} Cosx \neq 0 \\ Cosx \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow Cosx > 0$

នោះ: $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$; $k \in Z$

លំហាត់៣ : រកដែនកំនត់នៃអនុគមន៍ $f(x) = arcSin(2x+1)$

សុខ ពិសិដ្ឋ (គ្រូបង្រៀនគណិតវិទ្យានៅវិ.សម្តេចតេជោ ហ៊ុន សែន កំពង់ត្របែក)
www.pisethsok.wordpress.com

ចំលើយ : អនុគមន៍កំនត់កាលណា $-1\le 2x+1\le +1$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le x\le 0$

ដែនកំនត់នៃអនុគមន៍គឺ $D=\left[-\frac{1}{2};0\right]$

លំហាត់៤ : រកដែនកំនត់នៃអនុគមន៍ $f(x)=\log_a \log\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ បើ $a>0$

ចំលើយ : អនុគមន៍ $f(x)$ កំនត់កាលណា

$$\begin{cases} 1+x\neq 0 \text{ និង } \frac{1-x}{1+x}>0 & (1)\\ \log\left(\frac{1-x}{1+x}\right)>0 & (2)\end{cases}$$

$(1)\Leftrightarrow -1<x<1$

$(2)\Leftrightarrow \frac{1-x}{1+x}>1\Leftrightarrow \frac{1-x}{1+x}-1>0$

$\Leftrightarrow \frac{-2x}{x+1}>0\Leftrightarrow -1<x<0$

ដែនកំនត់នៃអនុគមន៍ គឺ $D=]-1;0[$

លំហាត់៥ : រកដែនកំនត់នៃអនុគមន៍

$f(x)=\lg[\cos(\lg x)]$

ចំលើយ : អនុគមន៍កំនត់កាលណា $\cos(\lg x)>0$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}+2k\pi<\lg x<\frac{\pi}{2}+2k\pi ; k\in Z$

$\Leftrightarrow 10^{(4k-1)\frac{\pi}{2}}<x<10^{(4k+1)\frac{\pi}{2}}$

ដូច្នេះដែនកំនត់នៃអនុគមន៍ គឺ :

$D=\left\{x / 10^{(4k-1)\frac{\pi}{2}}<x<10^{(4k+1)\frac{\pi}{2}} ; k\in Z\right\}$

លំហាត់៦ : រកដែនកំនត់នៃអនុគមន៍ :

$f(x)=\arccos\sqrt{x^2+4x-5}$

ចំលើយ : ដោយអនុគមន៍ $\arccos x$ កំនត់កាលណា $-1\le x\le 1$

គេបាន $f(x)$ កំនត់កាលណា

$$\begin{cases} -1\le \sqrt{x^2+4x-5}\le 1 & (1)\\ x^2+4x-5\ge 0 & (2)\end{cases}$$

$(1)\Leftrightarrow x^2+4x-5\le 1\Leftrightarrow -2-\sqrt{10}\le x\le -2+\sqrt{10}$

$(2)\Leftrightarrow x\le -5$ ឬ $x\ge 1$

ដែនកំនត់នៃអនុគមន៍គឺ :

$-2-\sqrt{10}\le x\le -5$ រឺ $1\le x\le -2+\sqrt{10}$

លំហាត់៧ : រកដែនកំនត់នៃអនុគមន៍ : $f(x)=\sqrt{\log_{0.8}\frac{2x+1}{x+5}-2}$

ចំលើយ : អនុគមន៍កំនត់កាលណា :

$$\begin{cases} \frac{2x+1}{x+5}>0 & (1)\\ \log_{0.8}\frac{2x+1}{x+5}-2\ge 0 & (2)\end{cases}$$

$(1)\Leftrightarrow x<-5$ រឺ $x>\frac{-1}{2}$

$(2)\Leftrightarrow \log_{0.8}\frac{2x+1}{x+5}\ge \frac{1}{2}=2\cdot\log_{0.8}0.8=\log_{0.8}(0.8)^2$

ដោយ $0.8<1$ គេបាន :

គណិតវិទ្យា សុខ ពិសិដ្ឋ
សុខ ពិសិដ្ឋ (គ្រូបង្រៀនគណិតវិទ្យានៅវិ.សម្តេចតេជោ ហ៊ុន សែន កំពង់ត្របែក)
www.pisethsok.wordpress.com

$$\frac{2x+1}{x+5}\le\left(\frac{4}{5}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x+5}-\frac{16}{25}\le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{34x-55}{25(x+5)}\le 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le x\le\frac{55}{34}$$

ដូចនេះដែនកំនត់នៃអនុគមន៍គឺ : $D=\left]-\frac{1}{2};\frac{55}{34}\right]$

លំហាត់ : រកដែនកំនត់នៃអនុគមន៍ដូចតទៅ :

១/ - $f(x)=\sqrt{\frac{1-|x|}{|x|-2}}$; ២/ - $f(x)=\ell og\frac{x-1}{x^2-x-6}$

៣/ - $f(x)=arcSin\frac{x-3}{2}-\ell g4x$

៤/ - $f(x)=Cotg\pi+arcCos2x$

៥/ - $f(x)=\ell g\left[1-\ell g\left(x^2-5x+6\right)\right]$

៦/ - $f(x)=\sqrt{\frac{\ell gx+1}{1-\ell gx}}$

សិក្សាភាពគូ - សេសនៃអនុគមន៍

វិធីសាស្រ្ត :

គេអោយអនុគមន៍ f កំនត់លើ D :

១/ - ចង់ស្រាយបញ្ជាក់ f ជាអនុគមន៍គូ គេចាំបាច់ស្រាយបញ្ជាក់

ថា : $\begin{cases}\forall x\in D\Rightarrow -x\in D\\ \forall x\in D; f(-x)=f(x)\end{cases}$

២/ - ចង់ស្រាយបញ្ជាក់ថា f ជាអនុគមន៍សេសគេចាំបាច់ស្រាយ

បញ្ជាក់ថា : $\begin{cases}\forall x\in D\Rightarrow -x\in D\\ \forall x\in D: f(-x)=-f(x)\end{cases}$

* **សំគាល់** :

- ក្រាបនៃអនុគមន៍ គូ មានអ័ក្សអរដោនេ ជាអ័ក្សឆ្លុះ ។
- ក្រាបនៃអនុគមន៍ សេសមានគល់អ័ក្សកូអរដោនេជាផ្ចិតឆ្លុះ ដូច្នេះដើម្បីស្រាយបញ្ជាក់ក្រាបនៃអនុគមន៍ f ណាមួយនោះមានអ័ក្សអរដោនេជាអ័ក្សឆ្លុះ ឬ ក៏គល់អ័ក្សកូអរដោនេជាផ្ចិតឆ្លុះគេត្រូវស្រាយបញ្ជាក់ថា f ជាអនុគមន៍គូ រឺ ក៏សេស ។
- មានអនុគមន៍ខ្លះមិនគូមិនសេស ។

លំហាត់៨ : គេអោយអនុគមន៍ f កំនត់ដោយ :

$$f(x)=\frac{|1+x|-|1-x|}{|1+x|+|1-x|}$$

បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍សេស ។

ចំលើយ : អនុគមន៍មិនកំនត់កាលណា

$$|x+1|+|1-x|=0\Leftrightarrow\begin{cases}|1+x|=0\\ |1-x|=0\end{cases}$$

គេមាន : $|x+1|=0\Leftrightarrow x=-1\Rightarrow|1-x|=2\ne 0$

$|1-x|=0\Leftrightarrow x=1\Rightarrow|1+x|=2\ne 0$

ហេតុនេះ $\forall x\in IR\ |1+x|+|1-x|\ne 0$

នោះកំនត់ $f\ \forall x\in IR$

សុខ ពិសិដ្ឋ (គ្រូបង្រៀនគណិតវិទ្យានៅវិ.សម្ដេចតេជោ ហ៊ុន សែន កំពង់ត្របែក)
www.pisethsok.wordpress.com

គេឃើញ $\forall x \in IR$ នោះ $-x \in IR$ និង

$$f(x)=\frac{|1-x|-|1-(-x)|}{|1-x|+|1-(-x)|}=\frac{|1-x|-|1+x|}{|1+x|+|1+x|}$$

$$=-\frac{|1+x|-|1-x|}{|1+x|+|1-x|}=-f(x)$$

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍សេស

លំហាត់៩ : គេអោយអនុគមន៍ f កំនត់ដោយ

$$f(x)=\begin{cases} 2x \text{ បើ } x<0 & (a) \\ x^2 \text{ បើ } x\geq 0 & (b) \end{cases}$$

សិក្សាភាពគូសេសនៃអនុគមន៍ ។

ចំលើយ : តាមសមតិកម្មគេឃើញអនុគមន៍ f កំនត់ $\forall x \in IR$

គេមាន : $1\geq 0 \Rightarrow f(1)=1^2=1$

$-1<0 \Rightarrow f(-1)=(-2)\cdot 1=-2$

នោះ $f(-1)\neq f(1)$ និង $f(-1)\neq -f(1) \Rightarrow f$ មិនគូមិនសេស

លំហាត់១០ : សិក្សាភាពគូសេសនៃអនុគមន៍

$f(x)=x^4+2x^2+6$ ដោយ $-3\leq x\leq 6$

ចំលើយ : តាមសមតិកម្មដែលកំនត់នៃអនុគមន៍គឺ : $D=[-3;6]$

គេឃើញ $\exists x\in D$ ដែល $(-x)\notin D;(4\leq x\leq 6)$

ដោយ $f(-x)=(-x)^4+2(-x)^2+6$

$=x^4+2x^2+6$

គេថា f ពុំមែនជាអនុគមន៍គូទេ ។

ការស្រាយបញ្ជាក់អនុគមន៍ពីរស្មើគ្នា

វិធីសាស្ត្រ:

ដើម្បីស្រាយបញ្ជាក់ពីរអនុគមន៍ f និង g ស្មើគ្នាគេស្រាយបញ្ជាក់:

- f និង g មានដែនកំនត់រួម D
- $\forall x\in D$: $f(x)=g(x)$

លំហាត់១១ : គេអោយពីរអនុគមន៍ f និង g កំនត់ដោយ

$\forall x\in IR^*: f(x)=x^2+\sqrt{(x+1)^2}; g(x)=x^2+x+1$

តើអនុគមន៍ f និង g ស្មើគ្នាឬទេ?

ចំលើយ : f និង g មានដែនកំនត់រួម IR^* ។គេមាន: $f(x)=x^2+|x+1|$

$\forall x\in IR^* \Rightarrow |x+1|=x+1 \Rightarrow f(x)=x^2+x+1$

ហេតុនេះ $\forall x\in IR^*\ f(x)=g(x) \Rightarrow f=g$

ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

១) អនុគមន៍ជាប់ត្រង់ចំនុច x_0

វិធីសាស្ត្រ :

ដើម្បីស្រាយបញ្ជាក់អនុគមន៍ f មួយ ជាប់ត្រង់ចំនុច x_0 គេចាំបាច់ស្រាយបញ្ជាក់ពីរលក្ខខ័ណ្ឌ:

$$\begin{cases} +f(x_0) \text{ កំនត់} & (1) \\ +\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) & (2) \end{cases}$$

គណិតវិទ្យា សុខ ពិសិដ្ឋ
សុខ ពិសិដ្ឋ (គ្រូបង្រៀនគណិតវិទ្យានៅវិ.សម្តេចតេជោ ហ៊ុន សែន កំពង់ត្របែក)
www.pisethsok.wordpress.com

ចំពោះ (២) :

បើ $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ នោះ f ជាប់ខាងស្តាំនៃ x_0

បើ $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ នោះ f ជាប់ខាងឆ្វេងនៃ x_0

f ជាប់ត្រង់ $x_0 \Leftrightarrow f$ ជាប់ខាងស្តាំនិង f ជាប់ខាងឆ្វេងនៃ x_0

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

២) <u>អនុគមន៍ជាប់លើ $]a ; b[$</u>

ដើម្បីស្រាយបញ្ជាក់ f ជាប់លើ $]a ; b[$ គេស្រាយបញ្ជាក់ថា f ជាប់ត្រង់ចំនុចសាមញ្ញមួយ $\in]a;b[$

៣) <u>អនុគមន៍ជាប់លើ $[a ; b]$</u>

ដើម្បីស្រាយបញ្ជាក់ថា f ជាប់លើ $[a ; b]$ គេស្រាយបញ្ជាក់

$$\begin{cases} +f \text{ ជាប់លើ }]a;b[\\ +f \text{ ជាប់ខាងស្តាំ } a \\ +f \text{ ជាប់ខាងឆ្វេង } b \end{cases}$$

<u>**សំគាល់**</u> :- ផលបូក , ផលដក , ផលគុណ, ផលចែក នៃបណ្តាអនុគមន៍ជាប់ (ក្នុងលក្ខណៈកំនត់បាន) ជាអនុគមន៍ជាប់ជានិច្ច ។

- គ្រប់អនុគមន៍ពហុធា ,អនុគមន៍ដំបូង (Fonction élimentaire) : $Sin\,x$; $Cosx$; $tg\,x$; $Cotgx$; $arcSinx$; $arcCosx$; $arctgx$; Lnx ; e^x... ជាអនុគមន៍ជាប់លើដែនកំនត់របស់វា ។

<u>**លំហាត់ ១២**</u> : គេអោយអនុគមន៍ f កំនត់ដោយ :

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{\sqrt{x^2}}{x} \text{ បើ } x \neq 0 \\ 1 \quad \text{បើ } x = 0 \end{cases}$$

សិក្សាភាពជាប់ត្រង់ $x = 0$

<u>**ចំលើយ**</u> : តាមនិយមន័យនៃ f គេបាន

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{|x|}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} = \begin{cases} x + \frac{x}{x} = x + 1 & \text{បើ } x > 0 \\ x - \frac{x}{x} = x - 1 & \text{បើ } x < 0 \\ 1 & \text{បើ } x = 0 \end{cases}$$

គេមាន : $f(0) = 1$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ (x>0)}} (x+1) = 1 = f(0) \Rightarrow f$ ជាប់ខាងស្តាំ $x = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ (x<0)}} (x-1) = -1 = f(0) \Rightarrow f$ មិនជាប់ខាងឆ្វេង $x = 0$

f ជាប់ខាងស្តាំ $x = 0$; មិនជាប់ខាងឆ្វេង $x = 0$

នោះ <u>f មិនជាប់ត្រង់ $x = 0$</u>

<u>**លំហាត់១៣**</u> : គេអោយអនុគមន៍ f កំនត់ដោយ :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{Sin\,\pi x}{x-1} \text{ បើ } x \neq 1 \\ -\pi \quad \text{បើ } x = 1 \end{cases}$$

សុខ ពិសិដ្ឋ (គ្រូបង្រៀនគណិតវិទ្យានៅវិ.សម្តេចតេជោ ហ៊ុន សែន កំពង់ត្របែក)
www.pisethsok.wordpress.com

បង្ហាញថា f ជាប់លើ IR ។

ចំលើយ : ចំពោះ $x\neq 1$: $f(x)=\dfrac{\sin\pi x}{x-1}$

គេបាន : $\sin\pi x$ និង $x-1$ ជាប់ចំពោះ $x\neq 1$

$\Rightarrow f(x)=\dfrac{\sin\pi x}{x-1}$ កំនត់ចំពោះ $x\neq 1$ ហើយជាផលចែក

នៃពីរអនុគមន៍ជាប់ $\Rightarrow f(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ចំពោះ $x\neq 1$ (1)

គេអាចស្រាយបញ្ជាក់ថា f ជាប់ត្រង់ $x_0 = 1$

គេបាន : $f(1)=-\pi$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\pi x}{x-1}$

តាង $U=x-1\Rightarrow x=U+1$

បើ $x\to 1\Rightarrow U\to 0$

នោះ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\pi x}{x-1}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin\pi(u+1)}{u}$

$=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin(\pi u+u)}{u}$

$=-\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin\pi u}{u}$

$=-\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin\pi u}{\pi u}\times\pi$

$=-\pi=f(1)$

ហេតុនេះ f ជាប់ត្រង់ $x=1$ (2)

តាម(1) និង(2) គេបាន f ជាប់លើ IR

លំហាត់

១) គេអោយអនុគមន៍ f កំនត់ដោយ :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2}-x}{\sqrt{x^2}+x}; & x\neq 0\\ 0 & ; x=0\end{cases}$$

សិក្សាជាភាពជាប់នៃ f ត្រង់ $x=0$

២) គេអោយអនុគមន៍ f កំនត់ដោយ

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|+\sin x}{x} & \text{បើ } x\neq 0\\ 2 & \text{បើ } x=0\end{cases}$$

សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $x=0$

◆ ◆ ◆

សិក្សាលក្ខណៈម៉ូនូតូននៃអនុគមន៍

មាន អនុគមន៍ f កំនត់លើ $]a;b[$

* អនុគមន៍កើនក្នុងចន្លោះ $]a;b[$ បើ :

$\forall x_1;x_2\in]a;b[:\quad x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$

* អនុគមន៍ f ចុះក្នុងចន្លោះ $]a;b[$ បើ :

$\forall x_1;x_2\in]a;b[:\quad x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$

អនុគមន៍មួយកើន ឬ ចុះហៅថា **អនុគមន៍ម៉ូនូតូន**

ទ្រឹស្តីបទ : គេអោយអនុគមន៍ f មានដេរីវេល្បែសក្នុងចន្លោះ $]a;b[$

១) f ជាអនុគមន៍ថេរលើចន្លោះ $]a;b[\Leftrightarrow f'(x)=0$

សុខ ពិសិដ្ឋ (គ្រូបង្រៀនគណិតវិទ្យានៅវិ.សម្តេចតេជោ ហ៊ុន សែន កំពង់ត្របែក)
www.pisethsok.wordpress.com

២) f ជាអនុគមន៍កើនក្នុងចន្លោះ $]a;b[\Leftrightarrow f'(x) > 0;$ $\forall x \in]a;b[$ លើកលែងបណ្ដាចំនុចដាច់ដែលដេរីវេ $f'(x)$ មិនអាចមាន ។

៣) f ជាអនុគមន៍ចុះក្នុងចន្លោះ $]a;b[\Leftrightarrow f'(x) < 0;$ $\forall x \in]a;b[;$ លើកលែងបណ្ដាចំនុចដាច់ដែលដេរីវេ $f'(x)$ មិនអាចមាន ។

* x ជាចំនុចដាច់នៃ ចន្លោះ $]a;b[$ បើគេមានវ៉ៃស៊ីណាសមួយ $\forall x$ នៃ x :

$$\forall x \cap \ ]a;b[= \{x\}$$

* បើដេរីវេ $f'(x)$ មានលក្ខណៈសញ្ញាថេរ (មិនប្ដូរសញ្ញា) ក្នុងចន្លោះ $]a;b[$ នោះអនុគមន៍ f ម៉ូណូតូនក្នុង $]a;b[$ ។

<u>លំហាត់</u>១៤ : កំនត់ចន្លោះកើន , ចុះនៃអនុគមន៍ :

$$y = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$$

<u>ចំលើយ</u> : $y = \dfrac{x^2+x-1}{x-1}$ អនុគមន៍មិនកំនត់ពេល $x = 1$

គេមាន

$$y' = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}; y' = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = 2$$

<u>តារាងអថេរភាព</u>

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	5	↗	$+\infty$

សន្និដ្ឋាន : អនុគមន៍កើនក្នុងចន្លោះ $]-\infty;0[\ \cup\ ]2;+\infty[$

ហើយចុះក្នុងចន្លោះ $]0;1[\ \cup\ ]1;2[$

<u>លំហាត់</u>១៥ : កំនត់ចន្លោះកើន , ចុះនៃអនុគមន៍

$y = 2Sinx + Cos2x \ ; 0 < x < 2\pi$

<u>ចំលើយ</u> : គេមាន : $y' = 2Cosx(1 - 2Sinx)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow Cosx = 0 \ ; \ 1 - 2Sinx = 0$$

$$Cosx = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}; x = \frac{3\pi}{2} \quad (0 < x < 2\pi)$$

$$1 - 2Sinx = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}; x = \frac{5\pi}{6}$$

<u>តារាងអថេរភាព</u>

x	0		$\pi/6$		$\pi/2$		$5\pi/6$		$3\pi/2$		2π
$Cos\,x$		+		+	0	−		−	0	+	
$1\text{-}2Sinx$		+		−		−	0	+		+	
y'		+		−		+	0	−	0	+	
y	1	↗	3/2	↘	1	↗	3/2	↘	−3	↗	1

សុខ ពិសិដ្ឋ (គ្រូបង្រៀនគណិតវិទ្យានៅវិ.សម្តេចតេជោ ហ៊ុន សែន កំពង់ត្របែក)
www.pisethsok.wordpress.com

សន្និដ្ឋាន : - អនុគមន៍កើនក្នុងចន្លោះ :

$$\left]0\,;\frac{\pi}{6}\right[U \left]\frac{\pi}{2}\,;\frac{5\pi}{6}\right[U \left]\frac{3\pi}{2}\,;2\pi\right[$$

- អនុគមន៍ចុះក្នុងចន្លោះ

$$\left]\frac{\pi}{6}\,;\frac{\pi}{2}\right[U \left]\frac{5\pi}{6}\,;\frac{3\pi}{2}\right[$$

<u>**លំហាត់**</u> : សិក្សាបណ្ដាចន្លោះកើន , ចុះនៃអនុគមន៍ដូចតទៅ :

១) . $y = 4x^2 - 5x + 1$

២) . $y = Ln(1 + x)$

៣) . $y = x - 2Sinx \quad (0 < x < 2\pi)$

៤) . $y = e^x$

៥) . $y = x - e^x$

បរិមានៃអនុគមន៍

ដើម្បីសិក្សាអតិបរិមា រឺ អប្បបរិមានៃអនុគមន៍ f មួយ គេអនុវត្តបណ្ដាទ្រឹស្ដីបទ :

* <u>**លក្ខណៈចាំបាច់**</u>

- បើ f មានឌីជេរ៉ង់ស្យែល និង មានបរិមាត្រង់ x_0 នោះ $f'(x) = 0$

*<u>**លក្ខណៈគ្រប់គ្រាន់**</u>

a). បើ f មានឌីជេរ៉ង់ស្យែលក្នុងវាំស៊ីណាសមួយនៃ x តែ $f'(x)$

ប្ដូរសញ្ញាពី + ទៅ - រឺក៏ពី - ទៅ + នោះអនុគមន៍មានអតិបរិមា (ឬអប្បបរិមា) ត្រង់ x ។

x		x	
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	អតិបរិមា	↘

x		x	
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	អប្បបរិមា	↗

b). បើ f មានដេរីវេទី២ $f''(x)$ ជាប់ត្រង់ x តែ $f'(x) = 0$ ហើយបើ:

- $f''(x) < 0$ នោះ អនុគមន៍មានអតិបរិមាត្រង់ x
- $f''(x) > 0$ នោះ អនុគមន៍មានអប្បបរិមាត្រង់ x

<u>គណនាបរិមានៃអនុគមន៍ f</u>

<u>**វិធីសាស្ត្រ**</u> :

តាមគ្រប់លក្ខណៈខ័ណ្ឌខាងលើដើម្បីរកអតិបរិមារឺក៏អប្បបរិមានៃអនុគមន៍ f គេចាំបាច់ :

- គណនាដេរីវេ $f'(x)$ ហើយពិនិត្យសញ្ញានៃដេរីវេផ្នែកតាម ក្នុងការប្ដូរសញ្ញាគេបានលទ្ធផល ។

- ចំពោះបណ្ដាអនុគមន៍ដឺក្រេទី៣ និង ទី៤គេគណនាដេរីវេទី២ $f''(x)$ រួចពិនិត្យសញ្ញា និង ប្រើប្រាស់លក្ខខ័ណ្ឌគ្រប់គ្រង b) ។

<u>**សំគាល់**</u>:

បើអនុគមន៍ f មួយមានឌីជេរ៉ង់ស្យែលត្រង់ x និងមានបរិមាត្រង់ x

សុខ ពិសិដ្ឋ (គ្រូបង្រៀនគណិតវិទ្យានៅវិ.សម្ដេចតេជោ ហ៊ុន សែន កំពង់ត្របែក)
www.pisethsok.wordpress.com

នោះ $f'(x_0)=0$ ។

ប្រការច្រាសមកវិញពុំត្រឹមត្រូវទេ គឺថាបើ $f'(x_0)=0$ នោះគេពុំទាន់មានលក្ខណៈសន្និដ្ឋានលក្ខខ័ណ្ឌអ្វីមួយបានឡើយ លុះត្រាតែពេលណា $f'(x_0)$ ប្តូរសញ្ញាកាលណា x ឆ្លងកាត់ x_0 នោះទើបមានបរិមាណត្រង់ x_0 ។

ឧទាហរណ៍ : $f(x)=x^3 \Rightarrow f'(x)=2x^2$ គេមាន $f'(0)=0$

បណ្តាចំនុច $x=0$ ពុំមែនជាបរិមាណនៃអនុគមន៍ព្រោះ

បើ $x<0 \Rightarrow f(x)=x^3<0=f(0)$

រីឯ $x>0 \Rightarrow f(x)=x^3>0=f(0)$

$\Rightarrow f(0)$ ពុំមែនជា f_{max} រឺ f_{min}

លំហាត់១៦ : រកបរិមាណនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

១/ - $y=\frac{x}{Lnx}$, ២/ - $y=x^{\frac{1}{x}}$

ចំលើយ : ១/ - $y=\frac{x}{Lnx}$ អនុគមន៍កំនត់កាលណា $\begin{cases} x>0 \\ x\neq 0 \end{cases}$

ដែនកំនត់នៃអនុគមន៍គឺ $D=IR^{+}-\{1\}$

គេបាន $y'=\frac{Lx-1}{(Lnx)^2}$

$y'=0 \Leftrightarrow Lnx-1=0 \Leftrightarrow Lnx=1 \Rightarrow x=e$

$y'>0 \Leftrightarrow Lnx-1>0 \Leftrightarrow Lnx>1 \Leftrightarrow x>e$

$y'<0 \Leftrightarrow Lnx-1<0 \Leftrightarrow Lnx<1 \Leftrightarrow x<e$

x	0		1		e		$+\infty$
y'	‖		‖		0	$+$	
y	‖ 0	↘	‖	↘	e	↗	$+\infty$

អនុគមន៍មានអប្បបរិមាណត្រង់ $x=e$ ហើយ $y_{min}=e$

២/ - $y=x^{\frac{1}{x}}$

អនុគមន៍មានដែនកំនត់ $D=IR-\{0\}$

គេមាន : $Lny=\frac{1}{x}Lnx$

$\Rightarrow \frac{y'}{y}=\left(\frac{1}{x}Lnx\right)'=-\frac{1}{x^2}Lnx+\frac{1}{x^2}$

$y'=y\frac{1}{x^2}(1-Lnx)=x^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}(1-Lnx)$

$y'=0 \Leftrightarrow 1-Lnx=0 \Leftrightarrow Lnx=1 \Leftrightarrow x=e$

(ព្រោះ $x^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}>0$)

$y'>0 \Leftrightarrow 1-Lnx>0 \Leftrightarrow x<e$

x	$-\infty$		0		e		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	0	$-$	
y		↗	‖	↗	$e^{1/e}$	↘	$e^{1/e}$

អនុគមន៍មានអតិបរិមាណត្រង់ $x=e$ ហើយ $y_{max}=e^{\frac{1}{e}}$

លំហាត់១៧ : កំនត់តំលៃ a ដែលអនុគមន៍ :

$f(x)=aSinx+\frac{1}{3}Sin3x$ មានបរិមាត្រង់ $x=\frac{\pi}{3}$ ក្នុងករណី

គណិតវិទ្យា សុខ ពិសិដ្ឋ
សុខ ពិសិដ្ឋ (គ្រូបង្រៀនគណិតវិទ្យានៅវិ.សម្តេចតេជោ ហ៊ុន សែន កំពង់ត្របែក)
www.pisethsok.wordpress.com

$x=\frac{\pi}{3}$, $f(x)$ មានអតិបរិមាណ រឺ អប្បបរិមា ។

រកតំលៃអតិបរិមា រឺ អប្បបរិមាខាងលើនេះ ។

ចំលើយ : គេមាន $f(x)= aSinx+\frac{1}{3}Sin3x$

គេបាន $f'(x)= aCosx+ Cos3x$

ដោយ $f(x)$ មានបរិមាត្រង់ $x=\frac{\pi}{3}$ នោះ $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)= 0$

$\Leftrightarrow aCosx\frac{\pi}{3}+ Cos3\frac{\pi}{3}= 0$

$\frac{1}{2}a+(-1) = 0 \Leftrightarrow a= 2$

រួច $f(x)=-aSinx- 3Sin3x$

ក្នុងករណី $x=\frac{\pi}{3}$; $a= 2$ គេបាន

$f''\left(\frac{\pi}{3}\right)= 2Sin\frac{\pi}{3}- 3Sin\frac{\pi 3}{3}=\frac{-2\sqrt{3}}{2} 0=-\sqrt{3}< 0$

នោះក្នុងករណីនេះអនុគមន៍មានអតិបរិមាត្រង់ $x=\frac{\pi}{3}$ ហើយ

$f_{max}= f\left(\frac{\pi}{3}\right)= \underline{\sqrt{3}}$

លំហាត់១៨ : រកបរិមានៃអនុគមន៍ :

$f(x)= 2Sinx+ Cos2x(0< x< 2\pi)$

ចំលើយ : យក $y= f(x)= 2Sinx+ Cos2x$; $0< x< 2\pi$

គេបាន :

$y'= 2Cosx(1- 2Sinx)$

$y'= 0 \Leftrightarrow Cosx= 0$; $1- 2Sinx= 0$

$0 < x < 2\pi$:

សុខ ពិសិដ្ឋ (គ្រូបង្រៀនគណិតវិទ្យានៅវិ.សម្តេចតេជោ ហ៊ុន សែន កំពង់ត្របែក)
www.pisethsok.wordpress.com

$Cosx= 0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}$; $x=\frac{3\pi}{2}(0< x< 2\pi)$

$1- 2Sinx= 0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}$; $x=\frac{5\pi}{6}$

x	0		$\pi/6$		$\pi/2$		$5\pi/6$		$3\pi/2$		2π
$Cos\,x$		+		+	0	-		-	0	+	
$1\text{-}2Sinx$		+	0	-		-	0	+		+	
y'		+	0	-	0	+	0	-	0	+	
y	1	↗	3/2	↘	1	↗	3/2	↘	-3	↗	

-f មានអតិបរិមាត្រង់ $x=\frac{\pi}{6}$; $x=\frac{5\pi}{6}$ ហើយ

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)= f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}$

-f មានអប្បបរិមាត្រង់ $x=\frac{\pi}{2}$; $x=\frac{3\pi}{2}$ ហើយ

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)= 1 ; f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-3$

* <u>ប្រើប្រាស់លក្ខណៈអតិបរិមា , អប្បបរិមា រឺក៏ ភាពកើនចុះនៃអនុគមន៍មួយដើម្បីស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព</u>

> ចំពោះវិសមភាពនៃអនុគមន៍ដែលចាំបាច់ត្រូវស្រាយ បញ្ជាក់ គេបង្កើតវាជាអនុគមន៍មួយសមមូលគ្នា ហើយសិក្សាអនុគមន៍នេះ ពិនិត្យគ្រប់បរិមានៃអនុគមន៍ រួចកំនត់លទ្ធផល ។

លំហាត់១៩ : ស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាពដូចតទៅ :

a). $e^x > 1+x$

b). $x-\frac{x^3}{6} < Sinx < x$ កាលណា $x>0$

c). $x-\frac{x^2}{2} < Ln(1+x) < x$ កាលណា $x>0$

ចំលើយ : a). $e^x > 1+x$ កាលណា $x>0$

គេបាន : $e^x > 1+x$ កាលណា $x>0 \Leftrightarrow e^x-1-x>0$ ពេល $x>0$

តាង $f(x)=e^x-1-x$ អនុគមន៍កំនត់លើ IR

$f'(x)=e^x-1$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow e^x-1=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow x=0$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow e^x-1>0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow x>0$

$f'(x)<0 \Leftrightarrow e^x-1>0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow x<0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$		$+$	
y	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

b). $x-\frac{x^3}{6} < Sinx < x$ កាលណា $x>0$

គេបាន :

a) $x-\frac{x^3}{6} < Sinx < x$ ពេល $x>0 \Leftrightarrow \begin{cases} Sinx < x \quad (1) \\ x-\frac{x^3}{6} < Sinx \quad (2) \end{cases}$ ពេល $x>0$

$(1) \Leftrightarrow x - Sinx > 0$ បើ $x>0$

តាម $y = x - Sinx$ អនុគមន៍កំនត់លើIR

$y' = 1 - Cosx > 0$ (ព្រោះ $Cos\,x < 1$)

$\Rightarrow y$ កើនជានិច្ច

$\Rightarrow x>0 \Rightarrow y>y(0)$

$\Leftrightarrow x-Sinx>0 (y_{(0)}=0) \Rightarrow Sinx<x$

$(2) \Leftrightarrow Sinx-x+\frac{x^3}{6}>0$ បើ $x'>o$

តាង $f(x)=Sinx-x+\frac{x^3}{6}$

$f'(x)=Cosx-1+\frac{x^2}{2}$

$f''(x)=x-Sinx$

តាម(1) គេបាន: $f''(x)=x-Sinx>0 \Rightarrow f'(x)$ ជាអនុគមន៍កើន

បើ $x>0 \Rightarrow f'(x)>f'(0) \Leftrightarrow Cosx-1+\frac{x^2}{x}>0$

ដោយ $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ កើនជានិច្ច

បើ $x>0 \Rightarrow f(x)>f(0)$

$\Leftrightarrow Sinx-x+\frac{x^3}{6}>0$

$\Leftrightarrow Sinx>x-\frac{x^3}{6} \quad (3)$

តាម(1) និង(3) គេបាន :

$x-\frac{x^3}{6}<Sinx<x$ បើ $x>0$ (ពិត)

c). $x-\frac{x^2}{2}<Ln(x+)<x$ ពេល $x>0$

សុខ ពិសិដ្ឋ (គ្រូបង្រៀនគណិតវិទ្យានៅវិ.សម្តេចតេជោ ហ៊ុន សែន កំពង់ត្របែក)
www.pisethsok.wordpress.com

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Ln(1+x) < x & (1) \\ Ln(1+x) > x - \dfrac{x^2}{2} & (2) \end{cases} \text{ បើ } x \rangle 0$$

$(1) \Leftrightarrow x - Ln(1+x) > 0$ បើ $x > 0$

តាង $y = x - Ln(1+x)$

គេបាន $y' = 1 - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{x}{x+1} > 0$ (ព្រោះ $x > 0$)

ហេតុនេះ y ជាអនុគមន៍កើន

បើ $x > 0 \Rightarrow y > y'(0) \Leftrightarrow x - Ln(1+x) > 0 \Rightarrow x > Ln(x+1)$

$(2) \Leftrightarrow Ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2} > 0$ បើ $x > 0$

តាង $f(x) = Ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}$

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 + x = \dfrac{x^2}{1+x} > 0$

នោះ f ជាអនុគមន៍កើន

ពេល $x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0)$

$\Leftrightarrow Ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2} > 0$

$\Leftrightarrow Ln(1+x) > x - \dfrac{x^2}{2}$ (3)

តាម (1) និង(3) គេបាន :

$$x - \frac{x^2}{2} < Ln(1+x) < x \text{ បើ } x > 0$$

លំហាត់ : រកបរិមានៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

១/ - [illegible] $y = x - Ln(1+x^2)$ [illegible]

ចំលើយ : កើនជានិច្ច

២/ - $y = xSinx + Cosx - \dfrac{1}{4}x^2 ; \dfrac{-\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}$

ចំលើយ : $y_{max} = \dfrac{6\pi\sqrt{3} - \pi^2 + 18}{36}$ ត្រង់ $x = \pm\dfrac{\pi}{3}$

$y_{min} = 1$ ត្រង់ $x = 0$

៣/ - រកគ្រប់តំលៃ a និង b ដើម្បីអោយអនុគមន៍

$y = aLnx + bx^2 + x$ មានបរិមាត្រង់ $x_1 = 1 ; x_2 = 2$

បង្ហាញថាចំពោះតំលៃនៃ a និង b ដែលរកឃើញអនុគមន៍មាន

អប្បបរិមាត្រង់ x_1 និងអតិបរិមាត្រង់ x_2 ។

៤/ - $y = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + 8^2}$

ចំលើយ : $y_{max} = 2$ ត្រង់ $x = 0; y_{min} = \sqrt[3]{4}$ ត្រង់ $x = 2$

៥/ - ស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព :

a). $2\sqrt{x} \rangle 3 - \dfrac{1}{x}$ ពេល $x \rangle 1$

b). $Lnx \langle \dfrac{2(x-1)}{x+1}$ បើ $x \rangle 1$

c). $2x\, arctgx \ge Ln(1+x^2)$

d). $Sinx + arctgx \ge 2x$ ពេល $0 \langle x \langle \dfrac{\pi}{2}$

សុខ ពិសិដ្ឋ (គ្រូបង្រៀនគណិតវិទ្យាផ្នែក ...) www.pisethsok.wordpress.com

រកភាពប៉ោង ផត និង ចំនុចរបត់នៃខ្សែកោង

ដើម្បីសិក្សាភាព ប៉ោង ផត និង ចំនុចរបត់នៃខ្សែកោងគេប្រើប្រាស់ទ្រឹស្តីបទខាងក្រោម :

ឧបមាថា $y=f(x)$ មានដេរីវេទី២ :

១/- បើ $f''(x)<0;\forall x\in]a;b[$ នោះខ្សែកោង $y=f(x)$ ប៉ោងក្នុងចន្លោះនោះ ។

២/- $y=f''(x)>0;\forall x\in]a;b[$ នោះខ្សែកោង $y=f(x)$ ផតក្នុងចន្លោះនោះ ។

៣/- បើ $f''(x)=0$ ត្រង់ចំនុច $x=x_0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពេល x ឆ្លងកាត់ x_0 នោះ $M(x_0;y_0)$ ជាចំនុចរបត់ ។

លំហាត់២០ : កំនត់តំលៃ a និង b ដើម្បីអោយចំនួន (1;3) ជាចំនុចរបត់នៃខ្សែកោង $f(x)=ax^3+bx^2$

ចំលើយ : ចំនុច (1;3) ជាចំនុចរបត់នៃខ្សែកោង $f(x)=ax^3+bx^2$

លុះត្រាតែ : $\begin{cases} 3=a+b & (1) \\ f''(1)=0 & (2) \\ f''(x) & \text{ប្តូរសញ្ញាបើ } x \text{ ឆ្លងកាត់ចំនុច } x=1 \end{cases}$

គេបាន $f''(x)=6ax+2b$

(1) និង$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 3=a+b \\ 0=6a+2b \end{cases} \Rightarrow a=-\frac{3}{2}; b=\frac{9}{2}$

លំហាត់២១ : ស្រាយបញ្ជាក់ថាខ្សែកោង $y=\frac{x+1}{x^2+1}$ មានបីចំនុចរបត់ស្ថិតលើបន្ទាត់តែមួយ ។

សុខ ពិសិដ្ឋ (គ្រូបង្រៀនគណិតវិទ្យានៃវិ.សម្តេចតេជោ ហ៊ុន សែន កំពង់ត្របែក)
www.pisethsok.wordpress.com

ចំលើយ : គេមាន $y=\frac{x+1}{x^2+1} \Rightarrow y'=\frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}$

$$y''=\frac{2(x-1)(x^2+4x+1)}{(x^2+1)^3}$$

$y''=0 \Leftrightarrow x=1; x=-2-\sqrt{3}; x=-2+\sqrt{3}$

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{3}$		$-2+\sqrt{3}$		1		$+\infty$
$x-1$		-		-		-	0	+	
x^2+4x+1		+	0	-	0	+		+	
y''		-		+		-		+	

គេឃើញ y'' ប្តូរសញ្ញាពេល x ឆ្លងកាត់ចំនុច $x_1=1; x_2=-2+\sqrt{3}; x_3=-2-\sqrt{3}$

នោះបីចំនុច $M_1(x_1;f(x_1)); M_2(x_2;f(x_2)); M_3(x_3;f(x_3))$ ជាចំនុចរបត់នៃខ្សែកោង ។

បីចំនុច $M_1; M_2; M_3$ ស្ថិតលើបន្ទាត់តែមួយលុះត្រាតែ

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{f(x_3)-f(x_2)}=\frac{x_1-x_2}{x_3-x_2}$$

គេបាន : $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{f(x_3)-f(x_2)}=\frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$ (1)

$\frac{x_1-x_2}{x_3-x_2}=\frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$ (2)

តាម(1) និង(2) $\Rightarrow M_1; M_2; M_3$ ស្ថិតលើបន្ទាត់តែមួយ

អាស៊ីមតូតនៃខ្សែកោង

អាស៊ីមតូតឈរ

បើ $x\to\alpha$ (ថេរ) តែ $y\to\infty$

នោះបន្ទាត់ $x=\alpha$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

នៃខ្សែកោងដែលមានសមីការ $y=f(x)$

អាស៊ីមតូតដេក

បើ តែ $x\to\infty$ តែ $y\to\beta$ (β ថេរ)

នោះបន្ទាត់ $y=\beta$ ជាអាស៊ីតូតដេក

នៃខ្សែកោងដែលមានសមីការ $y=f(x)$

អាស៊ីមតូតទ្រេត

* បន្ទាត់ $y=ax+b$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតដែល

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}\ ;\ b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-ax]$$

***ករណីពិសេស** បើគេជួបប្រទះអនុគមន៍ f រាង $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ ហើយដឺក្រេនៃ $P(x)$ ខ្ពស់ជាងដឺក្រេនៃ $Q(x)$ មួយដឺក្រេគេយកភាគយកចែកអោយភាគបែងដើម្បី អោយបានរាង :

$\frac{P(x)}{Q(x)}=ax+b+\varepsilon(x)$ ហើយ $\lim_{x\to\pm\infty}\varepsilon(x)=0$ ពេលនោះគេថា $f(x)$ មានអាស៊ីមតូតទ្រេតគឺ $y=ax+b$ ក្នុងករណីដឺក្រេនៃ $P(x)$ ខ្ពស់ជាងដឺក្រេនៃ $Q(x)$ ពីរឡើងនោះគេមាន អាស៊ីមតូតជាខ្សែកោង ។

*បើគេជួបប្រទះអនុគមន៍មានរាង

$$f(x)=\sqrt{ax^3+bx+c}\quad (a>0)$$

គេបំបែក $f(x)$ ជារាង $f(x)=\sqrt{a}\left|x+\frac{b}{2a}\right|+\varepsilon(x)$ និង

$\lim_{x\to\pm\infty}\varepsilon(x)=0$ ពេលនោះ $f(x)$ មានអាស៊ីមតូតទ្រេតគឺ $y=\sqrt{a}\left|x+\frac{b}{2a}\right|$ ។

លំហាត់២២ : រកអាស៊ីមតូតនៃខ្សែកោងដែលមានសមីការ

$$a).\ y=\frac{2x^2+3x+2}{x^2+x+1}\quad ;\quad b.)y=\sqrt[3]{a^3-x^3}$$

$$C).y=\frac{2x^2-5x+1}{x-2}$$

ចំលើយ : $a).\ y=\frac{2x^2+3x+2}{x^2+x+1}$ មានខ្សែកោង(c)

$$\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=2$$

នោះ (c): $y=\frac{2x^2+3x+2}{x^2+x+1}$ មានអាស៊ីតូតដេក $y=2$

$b).\ y=\sqrt[3]{a^3-x^3}$ មានខ្សែកោង(c)

គេបាន : $\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{a^3-x^3}}{x}$

$$=\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{-1+\frac{a^3}{x}}=-1=a$$

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-ax]=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{a^3-x^3}+x\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{a^3-x^3+x^3}{x\left[\sqrt[3]{\left(\frac{a^3}{x^3}-1\right)^2}-\sqrt[3]{\frac{a^3}{x^3}-1}+1\right]}=0$$

សុខ ពិសិដ្ឋ
www.pisethsok.wordpress.com

នោះ (C) មានអាស៊ីមតូតទ្រេត $y=-x$

C). $y=\dfrac{2x^2-5x+1}{x-2}$ មានខ្សែកោង (C)

$$y=2x-1-\frac{1}{x-2}=2x-1+\varepsilon(x)$$

$$\lim_{x\to\infty}\varepsilon(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{x-2}=0$$

នោះ (C) មានអាស៊ីមតូតទ្រេត $y=2x-1$

លំហាត់២៣ : រកអាស៊ីមតូតនៃខ្សែកោង $(c): f(x)=\dfrac{x^3}{x-1}$

ចំលើយ : គេមាន :

$\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3}{x-1}=\infty \Rightarrow x=1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

ឬ $f(x)=\dfrac{x^3}{x-1}=x^2+x+1\dfrac{1}{x-1}$

គេបាន : $\lim_{x\to\infty}\varepsilon(x)=\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{x-1}=0$

នោះ $y=x^2+x+1$ ជាអាស៊ីមតូតនៃ (C) ក្នុងករណីនេះ អាស៊ីមតូតជាប៉ារ៉ាបូល ។

លំហាត់២៤ : រកអាស៊ីមតូតនៃអនុគមន៍ f កំនត់ដោយ

$$f(x)=x+2+\sqrt{4x^2-4x+3}$$

ចំលើយ : គេមាន : $\sqrt{4x^2-4x+3}=\sqrt{4}\left|x-\dfrac{1}{2}\right|+\varepsilon(x)$

និង $\varepsilon(x)\to 0$ ពេល $x\to\infty$

$\Rightarrow f(x)=x+2+\sqrt{4x^2-4x+3}$

អាស៊ីមតូតទ្រេត: $y=ax+b$

$a=\lim\frac{f(x)}{x}=\lim\frac{x+2+\sqrt{4x^2-4x+3}}{x}=\lim\left(1+\frac{2}{x}+\ldots\right)$

$b=\lim_{x\to\infty}f(x)-ax=\lim_{x\to\infty}x+2+\sqrt{4x^2-4x+3}+x$

$$=x+2+2\left|x-\frac{1}{2}\right|+\varepsilon(x)$$

បើ $x\to+\infty : x-\dfrac{1}{2}>0\Rightarrow\left|x-\dfrac{1}{2}\right|=x-1$

នោះ $f(x)=x+2+2x-1+\varepsilon(x)=3x-1+\varepsilon(x)$

ដោយ $\varepsilon(x)\to 0$ ពេល $x\to+\infty$

គេបាន $(D_1): y=3x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង (C)

មានសមីការ : $f(x)=x+2+\sqrt{4x^2-4x+3}$

បើ $x\to-\infty : x-\dfrac{1}{2}<0\Rightarrow\left|x-\dfrac{1}{2}\right|=-x+\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow f(x)=x+2-2x+1+\varepsilon(x)=-x+3+\varepsilon(x)$

ដោយ $\varepsilon(x)\to 0$ ពេល $x\to-\infty$

នោះបន្ទាត់ $(D_2): y=-x+3$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង (C) មានសមីការ $f(x)=x+2+\sqrt{4x^2-4x+3}$

លំហាត់២៥ : រកអាស៊ីមតូតនៃខ្សែកោង

$(c): y=2arctgx+x$

ចំលើយ : គេមាន : $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x+2arctgx}{x}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2arctgx}{x}\right)=1=a_1$$

$$b_1=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-a_1x]=\lim_{x\to+\infty}(x+2arctgx-x)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}2arctgx=2\frac{\pi}{2}=\pi=b_1$$

នោះបន្ទាត់ $y=a_1x+b_1=x+\pi$ ជាអាស៊ីមតូតនៃខ្សែកោង(C)

សុខ ពិសិដ្ឋ (គ្រូបង្រៀនគណិតវិទ្យានៅវិ.សម្តេចតេជោ ហ៊ុន សែន កំពង់ត្របែក)
www.pisethsok.wordpress.com

*គេមាន : $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+2arctgx}{x}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{2arctgx}{x}\right)=1=a_2$$

$$b_2=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-a_2x]=\lim_{x\to-\infty}(x+2arctgx-x)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}2arctgx=2\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\pi$$

នោះ (C) មានអាស៊ីមតូតទ្រេត $y=a_2x+b_2$; $y=x-\pi$

សន្និដ្ឋាន : ខ្សែកោង (C) មានអាស៊ីមតូតទ្រេតពីរគឺ

$y=x+\pi$; $y=x-\pi$

លំហាត់២៦ : រកអាស៊ីមតូតនៃខ្សែកោង (x): $y=-xe^{\frac{1}{x^2}}$

ចំលើយ : ដោយ $\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{xe^{\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x^2}}$

$$=e^0=1=a$$

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-ax]=\lim_{x\to\infty}\left(xe^{\frac{1}{x^2}}-x\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(e^{\frac{1}{x^2}}-1\right)x$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}-1}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{2}{x^3}e^{\frac{1}{x^2}}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$=2\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x}=0=b$$ (តាមច្បាប់ឡូពីតាល់)

នោះខ្សែកោង(C) មានអាស៊ីមតូតទ្រេត $y=x$

* $\lim_{x\to0}y=\lim_{x\to0}xe^{\frac{1}{x^2}}=\infty$

នោះខ្សែកោង(C) មានអាស៊ីមតូតឈរ $x=0$

ច្បាប់ឡូពីតាល់ (Règele de L'Hospital)

*បើ $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$ (ឬ $\frac{\infty}{\infty}$)

នោះ $\lim_{x\to x}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

លំហាត់ : រកអាស៊ីមតូតនៃអនុគមន៍ :

1). $y=\sqrt{x^2+x+1}$; 2). $y=x+2+\sqrt{x^2-1}$

3). $y=x\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$; 4). $y=x\sqrt{\frac{x}{x-1}}$

5). $y=\sqrt[3]{x^3-6x^2}$; 6). $y=-x\,arctgx$

7). $y=x\sqrt{1-\frac{1}{|x|}}$; 8). $y=2x-\frac{Cosx}{x}$

សំរាយបញ្ជាក់ខ្សែកោង(C) មានចំនុច I (α ; β) ជាផ្ចិតឆ្លុះ

ដើម្បីស្រាយបញ្ជាក់ខ្សែកោង (C) មានចំនុច I (α ; β) ជាផ្ចិតឆ្លុះ

គេអនុវត្ត :

1). ប្តូរអ័ក្សកូអរដោនេ តាមវិធីបំលែងកិលវ៉ិចទ័រ $\vec{OI}$ (ប្តូរតំរុយ (xoy) ទៅជាតំរុយ (XIY) ហើយ I (α ; β) ជាគល់នៃអ័ក្សដែល $\vec{IX}//\vec{ox}$; $\vec{Iy}//\vec{oy}$)

2). ប្រើរូបមន្តប្តូរអ័ក្សដើម្បីរកសមីការ

$y=F(x)=(C)$ ក្នុងតំរុយ (XIY) ។

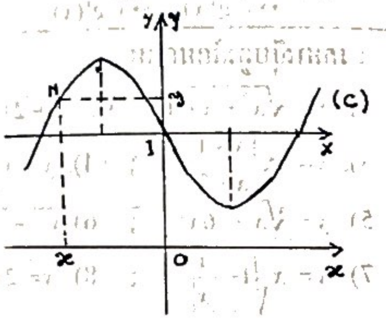
3). ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការ $Y=F(x)$ ជាសមីការនៃអនុគមន៍សេស។

សុខ ពិសិដ្ឋ
www.pisethsok.wordpress.com

លំហាត់២៧ : គេអោយអនុគមន៍ $y = x^3+\rho x+q$ មានខ្សែកោង (C) ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថាខ្សែកោង(C) មានI (0 ; q) ជាផ្ចិតឆ្លុះ ។

ចំលើយ : ឧបមាថា$M(x;y)$ ជាចំនុចសាមញ្ញនៃ(C)



គេបាន : $\begin{cases} x = X + x_1 = X & (1)\\ y = Y + y_1 = Y + q & (2)\end{cases}$

តាម(1) និង(2) និងសមីការខ្សែកោងគេបាន :

$$y = x^3+\rho x+q \Leftrightarrow Y+q = X^3+\rho X+q$$
$$\Leftrightarrow Y = X^3+\rho X$$

ហេតុនេះសមីការខ្សែកោង(C) ក្នុងតំរុយ(XIY) គឺ

$$Y = F(x) = X^3+\rho X$$

ព្រោះ $F(-X) = (-X)^3+p(-X) = -X^3-pX$

$F(-X) = -F(x)$

នោះ $Y = X^3+pX$ ជាអនុគមន៍សេស ហេតុនេះខ្សែកោង (C) មានI ជាផ្ចិតឆ្លុះ ។

សំរាយបញ្ជាក់ខ្សែកោង (C) មានបន្ទាត់ $x = x_\circ$ មួយជាអ័ក្សឆ្លុះ

ដើម្បីស្រាយបញ្ជាក់ថាខ្សែកោង(C) មានបន្ទាត់ $x = x_\circ$ មួយជាអ័ក្សឆ្លុះ

គេចាំបាច់ :

1). ប្តូរអ័ក្សតាមវិធីបំលែងកិលរ៉ិចទ័រ $\vec{OI}$ ដើម្បីបានតំរុយថ្មីមួយ (XIY) ហើយI $(X = x_\circ ; Y = 0)$ ព្រោះIY // oy និងIX // ox ។

2). រកសមីការថ្មី $Y = F(x)$ នៃខ្សែកោង(C) ធៀបនឹងតំរុយ(XIY) ។

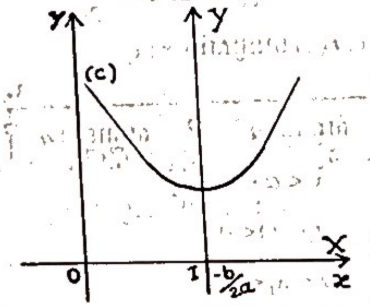
3). ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការ $Y = F(x)$ ជាសមីការនៃអនុគមន៍គូ ។

លំហាត់២៨ : ស្រាយបញ្ជាក់ថា បន្ទាត់ $x = \frac{-b}{2a}$ ជាអ័ក្សឆ្លុះនៃខ្សែកោង (C):

$y = ax^2+bx+c \quad (a\neq 0)$

ចំលើយ : ប្តូរអ័ក្សតាមវិធីបំលែងកិលរ៉ិចទ័រ$\vec{OI}$ ដែល $I\left(x=\frac{-b}{2a} ; y=0\right)$

. ឧបមាថា $M(x;y)$ ជាចំនុចសាមញ្ញនៃ(C)



គេបាន $M(x;y)/xoy \Leftrightarrow M(X;Y)/XIY$

សុខ ពិសិដ្ឋ
www.pisethsok.wordpress.com

ដែល :

$$\begin{cases} x = X + x_1 = X - \dfrac{b}{2a} \\ y = Y + y_1 = Y \end{cases}$$

ហេតុនេះ $y = ax^2 + bx + c \Leftrightarrow Y = a\left(X - \dfrac{b}{2a}\right)^2 + b\left(X - \dfrac{b}{2a}\right) + c$

$$\Leftrightarrow Y = aX^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = F(x) \quad (1)$$

តាមសមីការ(1) ឃើញថា $Y = F(x)$ ជាអនុគមន៍គូ

ហេតុនេះ(C) មានបន្ទាត់ $x = \dfrac{-b}{2a}$ ជាអ័ក្សឆ្លុះ ។

☞ **រំលឹក**

គេមាន : $f(x) = ax^2 + bx + c$

*បើ $\Delta < 0$: $f(x)$ មានសញ្ញាដូចa $\forall x$

$\Delta = 0$: $f(x)$ សញ្ញាដូច $a \forall x \neq -\dfrac{b}{2a}$

$\Delta > 0$: $f(x)$ មានឫសពីរ $x_1; x_2$

x		x_1		x_2	
$f(x)$	សញ្ញាដូចa	0	សញ្ញាផ្ទុយ a	0	សញ្ញាដូច a

*ចង់បាន : $x_1 < \alpha < x_2$

លុះត្រាតែ: $a f(\alpha) < 0$

*ចង់បាន : $\alpha < x_1 < x_2$

លុះត្រាតែ $\begin{cases} \Delta > 0 \\ a f(\alpha) > 0 \\ \dfrac{S}{2} - \alpha > 0 \text{ ដែល } S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{2a} \end{cases}$

*ចង់បាន $x_1 < x_2 < \alpha$

លុះត្រាតែ $a f(x) < 0$

*ចង់បាន : $\alpha < x_1 < x_2$

លុះត្រាតែ $\begin{cases} \Delta > 0 \\ a f(\alpha) > 0 \\ \dfrac{S}{2} - \alpha > 0 \text{ ដែល } S = x_1 + x_2 = -b/2a \end{cases}$

*ចង់បាន $x_1 < x_2 < \alpha$

លុះត្រាតែ $\begin{cases} \Delta > 0 \\ a f(\alpha) > 0 \\ \dfrac{S}{2} - \alpha < 0 \end{cases}$

កំនត់ m ដើម្បីអោយអនុគមន៍មានអតិបរិមា និង អប្បបរិមា :

គេចាំបាច់កំនត់ m ដើម្បីអោយ $f'(x) = 0$ មានឫសពីរផ្សេងគ្នា ហើយ $f'(x)$ ប្ដូរសញ្ញាកាលណា x ឆ្លងកាត់ឫសទាំងពីរនោះ ។

x		x_1		x_2	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	f_{max}	↘	f_{min}	↗

x		x_1		x_2	
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	f_{min}	↗	f_{max}	↘

សុខ ពិសិដ្ឋ (គ្រូបង្រៀនគណិតវិទ្យានៅវិ.សម្ដេចតេជោ ហ៊ុន សែន កំពង់ត្របែក)
www.pisethsok.wordpress.com

លំហាត់២៩ : គេអោយអនុគមន៍ $y=\frac{2x(x-m)}{x^2+x-6}$

កំនត់ m ដើម្បីអោយអនុគមន៍មានអតិបរិមា និង អប្បបរិមា

ចំលើយ : គេមាន : $y'=\frac{2(m+1)x^2-24x+12m}{\left(x^2+x-6\right)^2}$

គេបាន : $y'=0 \Leftrightarrow 2(m+1)x^2-24x+12m=0$ (1)

អនុគមន៍មានអតិបរិមា និង អប្បបរិមាកាលណាសមីការ(1)

មានឬសពីរ គេបាន :

$\Delta'=144-24m(m+1)\rangle 0$ និង $m\neq -1$

$\Leftrightarrow -24m^2-24m+144\rangle 0\ ;\ m\neq -1$

$\Leftrightarrow \quad m^2+m-6\langle 0\ ;\ m\neq -1$

$\Leftrightarrow \quad -3\langle m\langle 2\ ;\ m\neq -1$

ដូចនេះ អនុគមន៍ មានអតិបរិមា និង អប្បបរិមា

កាលណា : $m\in]-3\,;\,2[-\{-1\}$

កំណត់តំលៃ m ដើម្បីអោយអនុគមន៍កើនជានិច្ច (ចុះជានិច្ច)

គេចាំបាច់កំនត់ m ដើម្បីអោយ $f'(x)\geq 0\,\forall x$ បើ $f'(x)$ មាន

រាងជាត្រីធាដឺក្រេទី២ : ax^2+bx+c គេចាំបាច់កំនត់ m ដោយអោយ

$$\begin{cases}\Delta\leq 0\\ a\rangle 0\end{cases}$$

លំហាត់៣០ : កំនត់បណ្តាតំលៃ m ដើម្បីអោយអនុគមន៍ $y=x+mCosx$

កើនជានិច្ច ។

ចំលើយ : គេមាន : $y'=1-mSinx$

ដើម្បីអោយអនុគមន៍កើនជានិច្ចចាំបាច់មាន :

$y'\geq 0\forall x \Leftrightarrow 1-mSinx\geq 0\forall x$

$\Leftrightarrow 1-mt\geq 0\forall x$ ដែល $t=Sinx$

តាង $f(t)=1-mt$ កំនត់ m ដើម្បីអោយ :

$f(t)\geq 0\,;\forall t\in[-1;1]$

a). បើ $m\rangle 0$ គេបាន :

t		$1/m$	
$f(t)=1\text{-}mt$	+	0	−

គេឃើញ $f(t)=1-mt\geq 0\forall t\leq \frac{1}{m}$

ចង់អោយ $f(t)\geq 0\forall t\in[-1;1]$ ចាំបាច់មាន

$\frac{1}{m}\geq 1 \Leftrightarrow m\leq 1$

ហេតុនេះដើម្បីអោយ $f(t)=1-mt\geq 0\forall t\in[-1;1]$

លុះត្រាតែ $\begin{cases}m\rangle 0\\ m\leq 1\end{cases} \Leftrightarrow 0\langle m\leq 1$ (1)

b). បើ $m=0 \Rightarrow f(t)=1>0\ \ \forall t\in[-1;1]$

នោះ $m=0$ ជាតំលៃដែលកំនត់យក (2)

c). បើ $m<0$ គេបាន :

t		$1/m$	
$f(t)=1\text{-}mt$	−	0	+

គណិតវិទ្យា សុខ ពិសិដ្ឋ
www.pisethsok.wordpress.com

គេឃើញ $f(t)=1-mt\geq 0\ ;\forall t\geq \frac{1}{m}$

ចង់អោយ $f(t)=1-mt\geq 0\ ;\ \forall t\in[-1;1]$ គេចាំបាច់

មាន : $\frac{1}{m}\leq -1\Leftrightarrow m\geq -1$

ហេតុនេះដើម្បីអោយ : $f(t)=1-mt\geq 0\ ;\ \forall t\in[-1;1]$

លុះត្រាតែ $\begin{cases} m<0 \\ m\geq -1 \end{cases}\Leftrightarrow -1\leq m<0$ (3)

នោះ $f(t)=1-mt\geq 0\ ;\ \forall t\in[-1;1]$ កាលណា

$m=(1)\cup(2)\cup(3)\Leftrightarrow -1\leq m\leq 1$

ដូចនេះ ដើម្បីអោយ $y=x+mCosx$ កើនជានិច្ច ចាំបាច់ $-1\leq m\leq 1$

លំហាត់៣១ : គេអោយអនុគមន៍ $y=(m-1)x^3-mx^2+2x$ កំនត់តំលៃ m ដើម្បីអោយអនុគមន៍កើនជានិច្ច ។

ចំលើយ : គេមាន : $y'=3(m-1)x^2-2mx+2$ ដើម្បីអោយអនុគមន៍កើនជានិច្ច គេចាំបាច់មាន $y'\geq 0\forall x$ ក្នុងករណីនេះគេបាន :

$\begin{cases} \Delta=m^2-6(m-1)\leq 0 \\ 3(m-1)>0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m^2-6m+6\leq 0 \\ m>1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases} 3-\sqrt{3}\leq m\leq 3+\sqrt{3} \\ m>1 \end{cases}\Leftrightarrow 3-\sqrt{3}\leq m\leq 3+\sqrt{3}$

លំហាត់៣២ : កំនត់តំលៃ m ដើម្បីអោយអនុគមន៍ $y=\frac{mx+4}{2x-m}$ ចុះជានិច្ច

ចំលើយ : គេមាន : $y'=\frac{m(-m)-8}{(2x-m)^2}=\frac{-m^2-8}{(2x-m)^2}<0\forall m$

ហេតុនេះ អនុគមន៍ជានិច្ចចំពោះ $\forall m$

កំនត់តំលៃ m ដើម្បីអោយអនុគមន៍កើនចំពោះ $x>\alpha$ (α ជាចំនួនដែលអោយ) :

គេចាំបាច់កំនត់ m ដើម្បីអោយ $f'(x)>0\forall x>\alpha$

* បើ $f'(x)$ មានរាងស្មុគ្រស្មាញ (អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ អនុគមន៍អេចស្ប៉ូណង់ស្យែល ...) គេកំនត់តំលៃតូចបំផុតនៃ $f'(x)$ ហើយអោយតំលៃតូចបំផុតនោះ $>0\forall x>\alpha$ គេអាចកំនត់ m បាន ។

* បើ $f'(x)$ មានរាងត្រីធាដឺក្រេទី ២ $f'(x)=g(x)=ax^2+bx+c$ (a,b,c ជាចំនួនថេរ, m ជាបារ៉ាម៉ែត) គេអនុវត្តន៍បណ្តាគោលការណ៍សិក្សាសញ្ញាត្រីធាដឺក្រេទី២ ដើម្បីកំនត់ m ។ ហេតុនេះគេចាំបាច់សិក្សាបណ្តាករណីខាងក្រោម :

\+ កាលណា $a=0$

$f'(x)=ax^2+bx$ គេសិក្សាសញ្ញានៃកន្សោមនេះ រួចកំនត់ m ក្នុងលក្ខខ័ណ្ឌ $f'(x)>0$ កាលណា $x>\alpha$ ។

\+ កាលណា $a\neq 0$ មានពីរករណី :

ករណីទី១ $a>0$:
- $\Delta\leq 0$ (1) $f'(x)=g(x)\geq 0,\forall x$; $a>0\ ;\Delta\leq 0\Rightarrow$ តំលៃ m អាចកំនត់បានដើម្បីអោយ $f'(x)=g(x)>0$
- $\Delta>0$ (2) ត្រីធា $f'(x)=g(x)$ មានឬសពីរគឺ x_1 និង x_2

សុខ ពិសិដ្ឋ (គ្រូបង្រៀនគណិតវិទ្យានៅវិ.សម្តេចតេជោ ហ៊ុន សែន កំពង់ត្រាបែក)
www.pisethsok.wordpress.com

x		x_1		x_2	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

គេឃើញ $f'(x)>0$ បើ $x<x_1$ ឬ $x>x_2$ ។

ចង់អោយ $f'(x)>0\ \forall x>0$ គេចាំបាច់មាន:

$x_1<x_2\le\alpha$; លក្ខខណ្ឌនេះកើតឡើងលុះត្រាតែ

$$\begin{cases} ag(\alpha)\ge 0 & (3) \\ \frac{S}{2}-\alpha<0 & (4) \end{cases}$$

តំលៃនៃ m ដែលកំនត់បានជាប្រសព្វនៃ (1) ; (2) ; (3) ; (4) ។

$a<0$: $\begin{cases} \Delta\le 0 : f'(x)=g(x)<0 \text{ គ្រប់តំលៃនៃ } \\ m \text{ ក្នុងករណីនេះមិនយក} \\ \Delta>0 : \text{ ត្រីធា } f'(x)=g(x) \text{ មានឫស} \\ \text{ពីរ } x_1 \text{ និង } x_2 \end{cases}$

x		x_1		x_2	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

គេឃើញ $f'(x)=g(x)>0\ \forall x\in[x_1;x_2]$ ពេលនោះមិនមាន: $f'(x)>0\ \forall x>0$ គេមិនអាចរក m បានទេក្នុងករណីនេះ ។

លំហាត់៣៣ : គេអោយអនុគមន៍ $y=(m+2)x^3-3mx^2+x$ កំនត់ m ដើម្បីអោយអនុគមន៍កើនចំពោះ $x>0$ ។

ចំលើយ : $y'=3(m+2)x^2-6mx+1=g(x)$ គេចាំបាច់គណនា m ដើម្បីអោយ $g(x)\ge 0\ \forall x>0$

ករណីទី១ : បើ $3(m+2)=0\Leftrightarrow m=-2$ ។

គេបាន : $y'=12x+1$ នោះ $y'\ge 0\Leftrightarrow x\ge -\frac{1}{12}$

ដោយ $y'\ge 0\ ;\forall x\ge -\frac{1}{12}$ ពេលនោះ $y'>0\ ;\forall x>0$ ។

ហេតុនេះ $m=-2$ អាចយកបាន

ករណីទី២ : បើ $3(m+2)>0\Leftrightarrow m>-2$

Δ' នៃ y' គឺ : $\Delta'=9m^2-3(m+2)=9m^2-3m-6$

សញ្ញានៃ Δ' :

m		$-2/3$		1	
Δ'	$+$	0	$-$	0	$+$

a). $\Delta'\le 0\Leftrightarrow -\frac{2}{3}\le m\le 1$ ក្នុងករណីនេះដេរីវេ $y'\ge 0\ \forall x$

ហេតុនេះតំលៃ m គឺ : $m>-2\cap\left\{-\frac{2}{3}\le m\le 1\right\}$

$\Leftrightarrow -\frac{2}{3}\le m\le 1$

b). $\Delta'>0\Leftrightarrow m<-2/3$ ឬ $m>1$ ក្នុងករណីនេះដេរីវេ $y'=0$

សុខ ពិសិដ្ឋ (គ្រូបង្រៀនគណិតវិទ្យា...)
www.pisethsok.wordpress.com

មានឫសពីរ x_1 និង x_2 ដែល $x_1 < x_2$ គេបាន

x		x_1		x_2	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$

គេឃើញ $y > 0$ បើ $x < x_1$ ឬ $x > x_2$ ។ ចង់ឱ្យករណីនេះអាច

កើតឡើងលុះត្រាតែ :

$$\begin{cases} 3(m+2).g(0) \geq 0 \\ \dfrac{\frac{5}{2} - 0}{} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(m+2) \geq 0 \quad (g(0)=1) \\ \dfrac{m}{m+2} < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -2 \\ -2 < m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq m < 0$$

ក្នុងករណីនេះដើម្បីអោយ $y \geq 0 ; \forall x > 0$

លុះត្រាតែ $\begin{cases} m > -2 \\ m < -\frac{2}{3} \text{ ឬ } m > 1 \\ -2 \leq m < 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \qquad \underline{-2 \leq m < -\frac{2}{3}}$$

ករណីទី៣ :

* បើ $3(m+2) < 0 \Leftrightarrow m < -2$

$\Delta' = 9m^2 - 3m - 6$

a). $\Delta' \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leq m \leq 1$ នោះ y' មានសញ្ញាដូច

$3(m+2) \Rightarrow y' \leq 0 ; \forall x$ អនុគមន៍ចុះជានិច្ច

ហេតុនេះគ្មានតំលៃ m ដែលនាំអោយ $y > 0$ ។

b). $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m < -\frac{2}{3}$ ឬ $m > 1$; $y' = 0$ មានឫសពីរ

$x_1 ; x_2 (x_1 < x_2)$

x		x_1		x_2	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$

គេឃើញ $y \geq 0$ ចំពោះ $x \in [x_1 ; x_2]$ ពេលនោះមិនអាចមាន

$y \geq 0 ; \forall x > 0$ ក្នុងករណីនេះតំលៃ m មិនអាចមាន ។

<u>សន្និដ្ឋាន</u> : ដើម្បីអោយអនុគមន៍កើនចំពោះ $x > 0$ គឺជាដើម្បីអោយ

$y > 0 \forall x > 0$

គេបាន $\left[\begin{array}{l} m = -2 \\ \left(-2 < m < -\frac{2}{3} \cup -\frac{2}{3} \leq m \leq 1 \right) \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \quad \underline{-2 \leq m \leq 1}$

<u>លំហាត់</u> : ១/- គេមាន $y = (m-1)x^2 + 4mx + 5$ ។ កំនត់ m ដើម្បី

អោយអនុគមន៍មានអប្បបរិមា ។

២/- គេអោយ $y = x - mSinx$ ។ កំនត់តំលៃ m ដើម្បីអោយ

អនុគមន៍ចុះជានិច្ច ។

៣/- គេអោយ $y = x + m + \dfrac{1}{mx+1} (m \neq 0)$ កំនត់តំលៃ m

ដើម្បីអោយអនុគមន៍ចុះលើ $]0;1[$ ។

<u>គ្រួសារខ្សែកោងកាត់តាមចំនុចនឹង</u> :

<u>វិធីសាស្ត្រទី១</u> : ដើម្បីស្រាយបញ្ជាក់គ្រួសារខ្សែកោង $y = f(x ; m)$ កាត់តាម

សុខ ពិសិដ្ឋ www.pisethsok.wordpress.com

មួយរឺ ពីរចំនុចនឹង $\forall m$ គេធ្វើការដោះស្រាយដូចតទៅ :

-ឧបមាថា : $M_0(x_0;y_0)$ ជាចំនុចនឹងដែលគ្រួសារខ្សែកោង (Cm) កាត់តាម ។ ពេលនោះគូអរដោនេនៃ $M_0(x_0;y_0)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ សមីការនៃ(Cm) គេបាន :

$$y_0 = f(x_0;m) \qquad (*)$$

-បង្រួមរួចដាក់ជាកត្តារួមនូវប៉ារ៉ាម៉ែត m នៃសមីការ (*) ហើយមិនបង្កើតអោយបានរាង :

$Am+B=0;\forall m$ (បើm ដឺក្រេ១) (1) រឺ

$Am^2+Bm+C=0_{\forall m}$ (បើm នៃដឺក្រេ២) (2)

- ចង់អោយគ្រួសារខ្សែកោង (Cm) កាត់ចំនុចនឹងជានិច្ច $\forall m$ នោះ សមីការ(*) ផ្ទៀងផ្ទាត់ជានិច្ចហើយសមីការសមមូល(1) រឺ(2) (អញ្ញាតិ m) ផ្ទៀងផ្ទាត់ជានិច្ច $\forall m$ (មានន័យថាសមីការ) (1) រឺ (2) កំនត់មិនបាន) លក្ខខ័ណ្ឌនេះកើតមានឡើងកាលណាបណ្តាមេគុណនៃសមីការ(1) រឺ(2) ជាបន្តបន្ទាប់ស្មើសូន្យ :

* ចំពោះសមីការ(1) : $\begin{cases} A=0 \\ B=0 \end{cases}$

* ចំពោះសមីការ(2) : $\begin{cases} A=0 \\ B=0 \\ C=0 \end{cases}$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការនេះ បើគេរកបានបណ្តាគូចំលើយ $(x_0;y_0)$ នោះ $(x_0;y_0)$ ជាគូអរដោនេ នៃបណ្តាចំនុចនឹង ។ បើគេមានប៉ុន្មានចំនួនគូឬស

$(x_0;y_0)$ នោះគេបានមានប៉ុណ្ណឹងចំនុចនឹង ។

បើប្រព័ន្ធសមីការគ្មានឬស គឺ គ្មាន $(x_0;y_0)$ នៅគ្រួសារខ្សែកោង (Cm) មិនកាត់តាមចំនុចនឹងទេ ។

ទិធីសាស្រ្ត : គេតាង $M_0(x_0;y_0)$ ជាចំនុចនឹងបើមាន ដោយគ្រួសារខ្សែកោង $(Cm): y=f(x;m)$ កាត់តាម ។

ពេលនោះ $y_0=f(x_0;m)$ (*)

- បង្កើត $f(x_0;m)=F_{(m)}$ ។

(សមីការ (*) សមមូលនឹងសមីការ $F_{(m)}=y_0$ ថេរ ពេលនោះ ដេរីវេ $F'(m)=0$ (*)(*) ដោះស្រាយសមីការ(*)(*) គេកំនត់បាន x_0 ។

(សមីការ $F_{(m)}=y_0$ ថេរ មានន័យថាសមីការនេះមានអញ្ញាតិm ។

លំហាត់៣៤ : ស្រាយបញ្ជាក់ថាគ្រួសារខ្សែកោង (Cm) មានសមីការ $y=(1-2m)x^2(3m-1)x+5m-2$ កាត់ពីចំនុចនឹងកាលណាm ប្រែប្រួល ។

ចំលើយ : តាង $M_0(x_0;y_0)$ ជាចំនុចនឹងបើមានដែលគ្រួសារខ្សែកោង (Cm) កាត់តាម$\forall m$ ។ គេបាន :

$$M_0(x_0;y_0)\in(Cm)\Leftrightarrow y_0=(1-2m)x_0^2-(3m-1)x_0+5m-2$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(-2x_0^2-3x_0+5)}_{A}m+\underbrace{x_0^2+x_0-y_0-2}_{B}=0 \quad (1)$$

សមីការ(1) ផ្ទៀងផ្ទាត់$\forall m$ លុះត្រាតែ :

$$\begin{cases} A=0 \\ B=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} -2x_0^2-3x_0+5=0 \\ x_0^2+x_0-y_0-2= \end{cases}$$

គណិតវិទ្យា សុខ ពិសិដ្ឋ ... www.pisethsok.wordpress.com

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការនេះគេបាន :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \,;\, y_0 = 0 \\ x_0 = -\dfrac{5}{2} \,;\, y_0 = \dfrac{7}{4} \end{cases}$$

ហេតុនេះ គ្រួសារខ្សែកោង(Cm) ជានិច្ចកាត់តាម

$A(1\,;\,0)\,;\,B\left(-\dfrac{5}{2}\,;\,\dfrac{7}{4}\right)$

លំហាត់ទី ២ :

តាង $M_0(x_0\,;\,y_0)$ ជាចំនុចនឹងបើមាន ដែល (Cm) កាត់តាម $\forall m$ ។ គេបាន :

$$y_0 = (1-2m)x_0^2-(3m-1)x_0+5m-2$$

$$\Leftrightarrow y_0 = x_0^2-2mx_0^2-3mx_0+x_0+5m-2$$

$$\Leftrightarrow y_0 = (2x_0^2-3x_0+5m)m+x_0^2+x_0-2 = F_{(m)} \quad (1)$$

បើ $F_{(m)} = y_0$ ថេរ $\forall m$ នោះ $F'_{(m)} = 0$

$$\Leftrightarrow -2x_0^2-3x_0+5=0$$

$$\Leftrightarrow x_0 = 1\,;\, x_0 = -5/2$$

ជំនួស $x_0 = 1; x_0 = \dfrac{-5}{2}$ ក្នុងសមីការ(1) គេបាន :

$$y_0 = 0\,;\, y_0 = \frac{7}{4}$$

លំហាត់៣៥ : ស្រាយបញ្ជាក់ថាគ្រួសារខ្សែកោង (Cm) មានសមីការ $y = x^3-(m+1)x^2-(2m^2-3m+2)x+2m(2m-1)$

មានចំនុចរួមមួយ ។

ចំលើយ : គ្រួសាខ្សែកោង (Cm) មានចំនុចរួមមួយ $\Leftrightarrow$ វាកាត់តាមចំនុចនឹងM_0 ។

តាង $M_0(x_0\,;\,y_0)$ ជាចំនុចនឹងបើមានដែល (Cm) កាតតាម $\forall m$ ។ គេបាន : $M_0(x_0\,;\,y_0) \in (Cm)$ លុះត្រាតែ :

$$y_0 = x_0^3-(m+1)x_0^2-(2m^2-3m+2)x_0+2m(2m-1)$$

$$\Leftrightarrow x_0^2-mx_0^2-2m^2x_0+3mx_0-2x_0+4m^2-2m-y=0$$

$$\Leftrightarrow (4-2x_0)m^2+(-x_0^2+3x_0-2)m+(x_0^3-x_0^2-2x_0-y_0)=0 \quad (2)$$

សមីការនេះ(2) ផ្ទៀងផ្ទាត់ជានិច្ច $\forall m$ លុះត្រាតែ :

$$\begin{cases} -2x_0+4=0 \\ -x_0^2+3x_0-2=0 \\ x^3-x^2-2x_0-y_0=0 \end{cases}$$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធខាងលើនេះគេបាន : $x_0 = 2\,;\, y_0 = 0$

ហេតុនេះ $\forall m$ គ្រួសារខ្សែកោង (Cm) មានចំនុចរួមមួយគឺ : $M_0\,(2;0)$ ។

លំហាត់ : ១/- ស្រាយបញ្ជាក់ថាខ្សែកោង(Cm) មានសមីការ $y=(1-m)x^4-mx^2+2m-1$ កាត់តាមពីរចំនុចនឹងជានិច្ច។

ចំលើយ : $A(-1;0)\,;\,B(1;0)$

២/- បង្ហាញថា គ្រួសារខ្សែកោង :

សុខ ពិសិដ្ឋ
www.pisethsok.wordpress.com

$$(Cm):\ y=\frac{mx^2-(m^2+m-1)x+m^2-m+2}{x-m}$$

មិនកាត់តាមចំនុចនឹងណាមួយឡើយ ។

៣/- គេអោយ : $y=\dfrac{mx-p}{px+m+1}$

កំនត់តំលៃp បើ $\forall m$ អនុគមន៍កាត់តាម

ចំលើយ : $P=\pm 1/2$

ស្រាយបញ្ជាក់ថាមានតំលៃលេខនៃ m ដែលគ្រួសារខ្សែកោង $(Cm): f(m;x)$ កាត់តាមចំនុចនឹង :

វិធីសាស្ត្រ :

- តាង $M_0(x_0;y_0)$ ជាចំនុចនឹងស្ថិតលើ(Cm) គេបាន : $y_0=f(x_0;m)$

- ផ្តុំនិងដាក់ជាកត្តារួមនូវប៉ារ៉ាម៉ែតm ក្រោមរាង

$Am+B=0$ (1) រឺ $Am^2+Bm^2+C=0$ (2)

* បើសមីការ(1) រឺ (2) មានប៉ុន្មានឫស m នោះ មានប៉ុណ្ណឹងតំលៃលេខនៃm ដើម្បីអោយ(Cm) កាត់តាមចំនុចនឹង $M_0(x_0;y_0)$ ។

លំហាត់៣៦ : គេអោយ $y=x^4-2mx^2+m^2+1$

ឧបមាថា : $A(x_0;y_0)$ ជាចំនុចមួយនៃបន្ទាត់$y=1$

ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំពោះ A នេះ ជានិច្ចកាលមានតំលៃលេខ m មួយដែលក្រាបនៃអនុគមន៍កាត់តាមA ។

គណិតវិទ្យា សុខ ពិសិដ្ឋ
សុខ ពិសិដ្ឋ (គ្រូបង្រៀនគណិតវិទ្យា)
www.pisethsok.wordpress.com

ចំលើយ : តាង$A(x_0;y_0)$ ជាចំនុចនៃបន្ទាត់$y=1$

ឧបមាថា : ក្រាបនៃអនុគមន៍កាត់តាម A ជានិច្ចចំពោះតំលៃលេខនៃ m ណាមួយនោះ ។ ពេលនោះគេបាន :

$y_0=x_0^4-2mx_0^2+m^2+1=1$

$\Leftrightarrow m^2-2mx_0^2+x_0^4=0$ (2) (អញ្ញាតិm)

សមីការ(2) មាន $\Delta'=x_0^4-x_0^4=4$ ឫសឌុប នោះមានតំលៃលេខនៃm មួយដែលក្រាបកាត់A

កំនត់បណ្តាចំនុចដែលគ្រួសារខ្សែកោងមិនកាត់តាមនោះបើ m យកតំលៃ ណាក៏ដោយ

វិធីសាស្ត្រ : គេអោយគ្រួសារខ្សែកោង $(Cm)=f(x;m)$ ។

ឧបមាថា : $A(x_0;y_0)$ ជាចំនុចដែលគ្រួសារខ្សែកោងមិនកាត់តាមពេល m ប្រែប្រួល ពេលនោះសមីការ $y_0=f(x;m)$ គ្មានឫស ។

* ក្នុងអនុវត្តន៍ ដើម្បីកំនត់ $A(x_0;y_0)$ ខាងលើគេបំប្លែងសមីការ $y_0=f(x;m)$ អោយបានរាង : $Am+B=0$ (1) រឺ $Am^2+Bm+C=0$ (2)

* បន្ទាប់មកគ្រាន់តែអនុលោមបណ្តាលក្ខខ័ណ្ឌធ្វើអោយសមីការ (1) រឺ (2) គ្មានឫសដើម្បីកំនត់ $x_0;y_0$ ។

លំហាត់៣៧ : គេអោយអនុគមន៍ $y=\dfrac{2x^2+(m-2)x}{x-1}$ រកបណ្តាចំនួនដែល

ក្រាបនៃអនុគមន៍ មិនកាត់តាមនោះ ទោះបី m យកតំលៃណាក៏ដោយ ។

ចំលើយ : អនុគមន៍មិនកំនត់ពេលណា $x=1$ នោះក្រាបនៃអនុគមន៍ មិនកាត់តាមបណ្តាចំនុចមានអាប់ស៊ីស $x=1$ ។

តាង $A(x;y)$; $x\neq 1$ ជាចំនុចដែលគ្រួសារខ្សែកោងមិនកាត់តាម $\forall m$ ។

គេបានសមីការ : $y=\dfrac{2x^2+(m-2)x}{x-1}$ (*) គ្មានឫស

$\Leftrightarrow (x-1)y=2x^2+x(m-2)x$ គ្មានឫស

$\Leftrightarrow xm+2x^2-2x-xy+y=0$ (1) គ្មានឫស

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 2x^2-2x-xy+y\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y\neq 0 \end{cases}$

ហេតុនេះបណ្តាចំនុចដែលគ្រួសារខ្សែកោងមិនកាត់តាម គឺ :

- បណ្តាចំនុចស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ $x=1$

- បណ្តាចំនុចស្ថិតនៅលើអ័ក្សអរដោនេលើកលែងចំនុច 0 គល់នៃអ័ក្ស ។

លំហាត់ :

១/- គេអោយអនុគមន៍ $y=\dfrac{mx^2-(m^2+m-1)x+m^2-m+2}{x-m}$ ហើយ $A(x;y)$; $x\rangle 0$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថាមានតំលៃលេខនៃ m ពីរដែលអនុគមន៍កាត់តាម A ជានិច្ច ។

២/- កំនត់បណ្តាចំនុចក្នុងប្លង់ដែល :

$(Cm): y=\dfrac{2x^2+(6-m)x+4}{mx+2}$ មិនកាត់តាម ទោះបី m យកតំលៃណាក៏ដោយ ។

ប្រសព្វរវាងពីរខ្សែកោង

គេអោយពីរខ្សែកោង (C_1) និង (C_2) តាមលំដាប់មានសមីការ $y=f(x)$ និង $y=g(x)$

ខ្លឹមសារថា : $M(x;y)$ ជាចំនុចប្រសព្វរវាង (C_1) និង (C_2) ហេតុនេះកូអរដោនេនៃ M ផ្ទៀងផ្ទាត់ពីរសមីការ $y=f(x)$ និង $y=g(x)$ គេបាន :

$f(x)=g(x)$ (1)

សមីការ $f(x)=g(x)$ ដែលកំនត់បាន ជាសមីការអាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វនៃ (C_1) និង (C_2) ។ (C_1) ប្រសព្វនៃ និង (C_2) អាស្រ័យទៅនឹង ឫសនៃសមីការខាងលើ ។

* ដោយហេតុនេះដើម្បីសិក្សាប្រសព្វរវាង (C_1) និង (C_2) គេសិក្សាឫសនៃសមីការ $f(x)=g(x)$ ។

- បើសមីការ $f(x)=g(x)$ មាន n ឫសត្រូវនឹង $x_1;x_2\ldots x_n$ នោះ (C_1) និង (C_2) កាត់គ្នាបាន n ចំនុចដែលមានអាប់ស៊ីស $x_1;x_2;x_3\ldots x_n$ ។ ជំនួសបណ្តាអាប់ស៊ីសនេះក្នុងសមីការ $y=f(x)$ ឬ $y=g(x)$ គេកំនត់បានបណ្តាអរដោនេ ។

សុខ ពិសិដ្ឋ www.pisethsok.wordpress.com

- បើសមីការ $f(x)=g(x)$ មានឫសឌុប (ឫសរួម) នោះ (C_1) និង (C_2) ប៉ះគ្នាត្រង់ចំនុចមានអាប់ស៊ីស $x=x_0$ ។

- បើសមីការ $f(x)=g(x)$ គ្មានឫសនោះ (C_1) និង (C_2) គ្មានចំនុចប្រសព្វ ។

លំហាត់៣៨ : គេអោយអនុគមន៍ $y=x^3-2x+1$ (C) និង បន្ទាត់ (D) : $y=ax+b$ ។ រកលក្ខខ័ណ្ឌនៃ a និង b ដើម្បីអោយ (D) ប៉ះទៅនឹង (C) ។

ចំលើយ : អាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វនៃ (C) និង (D) បើមាន គឺជាឫសនៃសមីការ : $x^3-2x+1=ax+b \Leftrightarrow x^3-(2+a)x+1=b$ (*) ។

សមីការ(*) ជាសមីការអាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វនៃ២ខ្សែកោង :

- ខ្សែកោងដឺក្រេទី៣ មានសមីការ : $y=x^3-(2+a)x+1$ (C_1)

បន្ទាត់(D') មានសមីការ $y=b$ ។

(C) ប៉ះទៅនឹងបន្ទាត់ (D) បើសមីការ (*) មានឫសឌុប $\Leftrightarrow (C_1)$ ប៉ះនឹង $(D') \Leftrightarrow b=y_{max}$ រឺ $b=y_{min}$ ចំពោះ y_{max} និង y_{min} ជាតំលៃអតិបរិមា និង អប្បបរិមានៃ $y=x^3-(2+a)x+1$ តាមសមីការ $y=x^3-(2+a)x+1$

គេបាន : $y'=3x^2-(2+a)$

$$y'=0 \Leftrightarrow 3x^2-(2+a)=0 \Leftrightarrow x^2=\frac{2+9}{3}$$

$$\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{2+a}{3}} \quad (a>2)$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{a+2}{3}}$		$+\sqrt{\frac{a+2}{3}}$		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	−	↗	y_{max}	↘	y_{min}	↗	+

$$y_{max}=-\left(\sqrt{\frac{a+2}{3}}\right)^3+(2+a)\sqrt{\frac{a+2}{3}}+1=2\frac{2+a}{3}\sqrt{\frac{a+2}{3}}+1$$

$$y_{min}=\left(\sqrt{\frac{a+2}{3}}\right)^3-(2+a)\sqrt{\frac{a+2}{3}}+1=-2\frac{2+a}{3}\sqrt{\frac{a+2}{3}}+1$$

ហេតុនេះដើម្បីអោយ(C) ប៉ះនឹង(D) គេចាំបាច់មាន :

$$b=2\frac{2+a}{3}\sqrt{\frac{a+2}{3}}+1 \text{ ចំពោះ } a\geq -2$$

$$b=-2\frac{2+a}{3}\sqrt{\frac{a+2}{3}}+1 \text{ ចំពោះ } a\geq -2$$

លំហាត់៣៩ : គេអោយអនុគមន៍ $y=x^3-1-m(x-1)$ មានខ្សែកោង(C) ។

a). កំនត់ m ដើម្បីអោយ(C) ប៉ះទៅនឹងអ័ក្ស$(0x)$ ។

b). កំនត់ m ដើម្បីអោយ(C) កាត់នឹងអ័ក្ស$(0x)$ ។ត្រង់៣ ចំនុច។

ចំលើយ : a). តំលៃលេខនៃ m ដើម្បីអោយ (C) ប៉ះនឹង (ox)

សុខ ពិសិដ្ឋ www.pisethsok.wordpress.com

អាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វនៃ (C) និង (ox) បើមានជាឫសនៃសមីការ : $x^3-1-m(x-1)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+1)-m(x-1)=0 \Rightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+1-m)=0 \quad (*)$

សមីការ(*) ជាសមីការដឺក្រេទី៣ ជានិច្ចមានឫសមួយ $x=1$ ។ ចង់អោយ(C) ប៉ះនឹង(ox) លុះត្រាតែសមីការ(*) មានឫសឌុប ។ មានពីរករណី :

- **ករណីទី១** : សមីការ (*) មានឫសឌុប x = 1 ពេលនោះសមីការ $x^2+x+1-m=0$ មានឫសតែមួយគត់ x = 1 ករណីនេះកើតឡើងពេល $m=3$ (គេឃើញ x = 1 និ $x^2+x+1-m=0$) ។

- **ករណីទី២** : សមីការ (*) មានឫសឌុប $x\neq 1$ បើសមីការដឺក្រេទី២ : $x^2+x+1-m=0$ មានឫសឌុប ។ ករណីនេះកើតឡើងបើ:

$\Delta=1-4(1-m)=0 \Leftrightarrow 1-4+4m=0 \quad \Leftrightarrow m=\frac{3}{4}$

ឫសឌុបគឺ $x=-\frac{1}{2}$ ក្នុងករណីនេះ (C) ប៉ះទៅនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ចំនុច $x=-\frac{1}{2}$ ។

ហេតុនេះដើម្បីអោយ (C) ប៉ះនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីសគេចាំបាច់មាន : $m=3$ រឺ $m=\frac{3}{4}$

b). <u>តំលៃលេខនៃ m ដើម្បីអោយ(C) កាត់(ox) ត្រង់៣ ចំនុច</u>

អាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វនៃ(C) និង(0x) ជាឫសនៃសមីការ :

$(x-1)(x^2+x+1-m)=0 \quad (*)$

ខ្សែកោង (C) កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់បីចំនុចលុះត្រាតែសមីការ(*) មានឫសបី ។ ចង់អោយសមីការដឺក្រេទី២ : $x^2+x+1-m=0$ មានឫសពីរផ្សេងគ្នាខុសពី ១ លុះត្រាតែ

$$\begin{cases} m\neq 3 \\ \Delta>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 3 \\ m>\frac{3}{4} \end{cases}$$

ហេតុនេះដើម្បីអោយ (C) កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ ៣ ចំនុច គេចាំបាច់មាន :

$m\in \left]\frac{3}{4};+\infty\right[-\{3\}$

លំហាត់ : គេអោយ(C) : $y=mx+1+\frac{1}{x+2m}$

a). កំនត់m ដើម្បីអោយ(C) មានផ្ចិតឆ្លុះស្ថិតលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។

b). រកបណ្តាតំលៃ m ដែលក្រាបនៃអនុគមន៍កាត់បន្ទាត់ $y=1$ ត្រង់បណ្តាចំនុចមានអាប់ស៊ីសវិជ្ជមាន ។

សមីការបន្ទាត់ប៉ះនៅនៃខ្សែកោងមួយ

មានបីបែប :

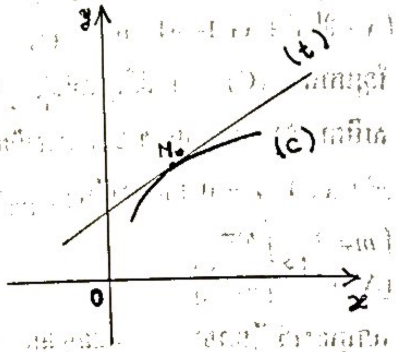
១/ - កំនត់សមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹង(C) ត្រង់ចំនុច $M_0\in(C)$ ។

២/ - កំនត់សមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹង(C) ដែលគូសចេញពី $M_0\notin(C)$ ។

៣/ - កំនត់សមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹង(C) ដោយដឹងមេគុណប្រាប់ទិសk ។

គណិតវិទ្យា សុខ ពិសិដ្ឋ www.pisethsok.wordpress.com

១/- បន្ទាត់ប៉ះទៅនឹង(C) ត្រង់ចំនុច $M_0 \in (C)$



តាមនិយមន័យដេរីវេនៃអនុគមន៍មេគុណប្រាប់ទិស k នៃបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំនុច $M_0 \in (C)$ ស្មើនឹងតំលៃលេខដេរីវេត្រង់ចំនុចប៉ះ $k=f'(x_0)$ សមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ : $y-y_0=k(x-x_0)$

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$

លំហាត់៤០ : រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹង $(C): y=\frac{x^2+x+1}{x^2-x-2}$ ត្រង់ចំនុច B នៅលើ(C) មានអាប់ស៊ីស x = 1 ។

ចំលើយ : បើ $B\in(C)$ នោះ $y_B=\frac{x_B^2+x_B+1}{x_B^2-x_B-2}=-\frac{3}{2}$

ដេរីវេ : $y'=\frac{(2x+1)(x^2-x-2)-(2x-1)(x^2+x+1)}{(x^2-x-2)^2}$

$$y'=\frac{-2x^2-6x-1}{(x^2-x-2)^2}$$

មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះត្រង់B គឺ :

$$k=y'_B=\frac{-2(1)^2-6(1)-1}{(1^2-1-2)^2}=-\frac{9}{4}$$

ហេតុនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងខ្សែកោង(C) ត្រង់B គឺ :

$$y-y_B=k(x-x_B)\Leftrightarrow y+\frac{3}{2}=-\frac{9}{4}(x-1)$$

$$y=-\frac{9}{4}x+\frac{3}{4}$$

លំហាត់៤១ : គេអោយខ្សែកោង $(C): y=2x^3+x^2+x+1$

a). ស្រាយបញ្ជាក់ថានៅលើខ្សែកោង (C) នៃអនុគមន៍មិនអាចមានពីរចំនុចដែលបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងខ្សែកោងត្រង់ពីរចំនុចនោះកែងគ្នា ។

b). គេអោយបន្ទាត់ $(D): y=mx+1$ ។ កំនត់ m ដើម្បីអោយក្រាប (C) មានមួយចំនុចដែលត្រង់នោះបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោងកែងនឹង(D) ។

ចំលើយ : a). តាមសមីការនៃ(C) គេមាន :

$y'=6x^2+2x+1$ យក k_1 និង k_2 ជាមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹង(C) ត្រង់ពីរចំនុច មានអាប់ស៊ីស x_1 និង x_2 សាមញ្ញ ។ គេមាន :

$$k_1=y'_{x_1}=6x_1^2+2x_1+1>0 \quad \forall x_1$$

$$k_2=y'_{x_2}=6x_2^2+2x_2+1>0 \quad \forall x_2$$

សុខ ពិសិដ្ឋ
www.pisethsok.wordpress.com

គេឃើញ $\forall x_1;x_2 : k_1k_2 > 0$: ពេលនោះគ្មាន ២ ចំនុច $x_1 ; x_2$ ដែលនាំអោយ $k_1.k_2=-1$ ហេតុនេះនៅលើ (C) មិនអាចមានពីរចំនុចដែលត្រង់ពីរចំនុចនោះ បន្ទាត់ប៉ះកែងគ្នា ។

b). តាមសមីការ (C) $\Rightarrow y'=6x^2+2x+1$ យក $M_0(x_0;y_0)$ ជាចំនុចដែលត្រង់នោះបន្ទាត់ប៉ះកែងនឹង $(D): y=mx+1$ (*)

គេមាន : $y'_x \times m=-1 ; (m\neq 0)$ ហើយ y'_x ជាមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ M_0 ។

$$* \Leftrightarrow (6x_0^2+2x_0+1)m=-1 \; (m\neq 0)$$

$$\Leftrightarrow 6mx_0^2+2mx_0+m+1=0 \; ; (m\neq 0) \quad (**)$$

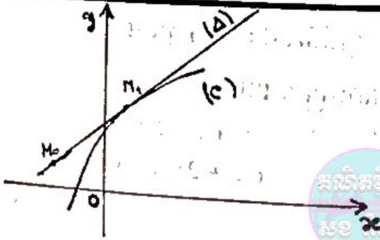
ដើម្បីមាន $M_0(x_0;y_0)$ ដែលត្រូវនោះបន្ទាត់ប៉ះកែងនឹង (D) លុះត្រាតែសមីការ(**) មានឫសជានិច្ចគេបាន :

$$\Delta'=m^2-6m(m+1)\geq 0 \; ; m\neq 0$$

$$\Leftrightarrow \; -\frac{6}{5}\leq m<0$$

២- កំនត់សមីការបន្ទាត់ប៉ះនៅនឹងខ្សែកោង $(C): y=f(x)$ គូសចេញពី $M_0 \notin (C)$

វិធីទី ១ :



- ឧបមាថា $M_1(x_1;y_1)$ ជាចំនុចប៉ះសមីការបន្ទាត់ប៉ះ (Δ) មានរាង $y-y_1=k(x-x_1)$ (*) ចំពោះ $k=f'(x_1)$
- ដើម្បីអោយ $M_1\in(C)$ លុះត្រាតែកូអរដោនេ M_1 ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ (C) ។ គេបាន : $y_1=f(x_1)$ (1)
- ដើម្បីអោយមានបន្ទាត់ប៉ះ (Δ) កាត់តាម $M_0(x_0;y_0)$ លុះត្រាតែកូអរដោនេនៃ M_0 ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ(*) គេបាន :

$y_0-y_1=k(x_0-x_1)$ (2)

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases}(1)\\(2)\end{cases}$

គេកំនត់បាន $M_1(x_1;y_1)$ ។ ជំនួស $(x_1;y_1)$ ក្នុងសមីការ (*) គេកំនត់បានសមីការបន្ទាត់ប៉ះ ។

វិធីទី២ :

- សមីការបន្ទាត់ប៉ះ (Δ') មានរាង :

$y-y_0=k(x-x_0)\Leftrightarrow y=k(x-x_0)+y_0$ (**)

- អាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វនៃ(C) និង (Δ) ជាឫសសមីការ :

$f(x)=k(x-x_0)+y_0$ (3)

- ដើម្បីអោយ (C) និង (Δ') ប៉ះគ្នាលុះត្រាតែសមីការ (3) មានឫសរួម (ឫសឌុប) ។
- ប្រើលក្ខខណ្ឌដើម្បីមានឫសរួមគេកំនត់បាន k ។ ជំនួស k ក្នុង(**) គេកំនត់បានសមីការបន្ទាត់ប៉ះ ។

សុខ ពិសិដ្ឋ (គ្រូបង្រៀនគណិតវិទ្យានៅវិ. សម្តេចតេជោ ហ៊ុន សែន កំពង់ត្របែក)
www.pisethsok.wordpress.com

លំហាត់៤២ : កំនត់សមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងខ្សែកោង : $y = x^2 + 2x + 5$ ដែលគូសចេញពី $A(0;1)$

ចំលើយ :

វិធីទី១ : គេឃើញចំនុច $A(0;1)$ មិនស្ថិតលើខ្សែកោង $(C): y = x^2 + 2x + 5$ គេបាន: $y' = 2x + 2$

តាង $M_1(x_1;y_1)$ ជាចំនុចប៉ះ ។ តាមនិយមន័យនៃដេរីវេ គេបាន : $y'_{x_1} = k$ (មេគុណប្រាប់ទិស) ។ $y'_{x_1} = 2x_1 + 2$

សមីការបន្ទាត់ប៉ះមានរាង :

$y - y_1 = k(x - x_1) \Leftrightarrow y - y_1 = (2x_1 + 2)(x - x_1)$

ដើម្បីអោយបន្ទាត់ប៉ះកាត់តាម $A(0;1)$ លុះត្រាតែគូអរដោនេនៃA ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ(*) គេបាន :

$1 - y_1 = (2x + 2)(-x_1)$ (1)

ដើម្បីអោយ $M_1(x_1;y_1) \in (C)$ លុះត្រាតែ :

$y_1 = x_1^2 + 2x + 5$ (2)

ហេតុនេះគូអរដោនេនៃចំនុចប៉ះជាឬសប្រព័ន្ធ :

$$\begin{cases} 1 - y_1 = (2x_1 + 2)(-x_1) & (1) \\ y_1 = x_1^2 + 2x_1 + 5 & (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \,;\, y_1 = 13 \\ x_1 = -2 \,;\, y_1 = 5 \end{cases}$$

ជំនួសតំលៃ x_1 និង y_1 ក្នុងសមីការ(*) គេបាន :

$y = 6x + 1$

$y = -2x + 1$

វិធីទី ២ : សមីការបន្ទាត់ប៉ះ(Δ) មានរាង :

$y - y_1 = k(x - x_1)$

$\Leftrightarrow y - 1 = k(x - 0) \Leftrightarrow y = kx + 1$ (**)

អាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វនៃ(Δ) និង(C) ជាឬសសមីការ :

$x^2 + 2x + 5 = kx + 1$

$\Leftrightarrow x^2 + (2 - k)x + 4 = 0$ (3)

ដើម្បីអោយ (Δ) និង (C) ប៉ះគ្នាលុះត្រាតែសមីការ (3) មានឬសឌុប : $\Delta = 0 \Rightarrow (2 - k)^2 - 16 = 0$

$\Leftrightarrow k_1 = -2 \,;\, k_2 = 6$

ជំនួសតំលៃk ក្នុងសមីការ (**) គេបាន :

$y = -2x + 1 \,;\, y = 6x + 1$

៣- កំនត់សមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងខ្សែកោងដោយ នឹងមេគុណប្រាប់ទិស k

វិធីទី ១ : ប្រើនិយមន័យដេរីវេនៃអនុគមន៍ :

- តាង $M_o(x_o;y_o)$ ជាចំនុចប៉ះ គេមានមេគុណប្រាប់ទិស k នៃបន្ទាត់ប៉ះ(Δ) ត្រង់ M_o គឺ $k = y'(x_o)$ (*)

- ដោយសមីការ (*) កំនត់បាន x_o ។ ជំនួស x_o ក្នុងសមីការខ្សែកោង $(C): y = f(x)$ គេបាន y_o ។

- ជំនួស $x_o;y_o$ ក្នុងសមីការ $y - y_o = k(x - x_o)$ គេកំនត់បានសមីការបន្ទាត់ប៉ះ(Δ) ។

សុខ ពិសិដ្ឋ (គ្រូបង្រៀនគណិតវិទ្យានៅវិ.សម្តេចតេជោ ហ៊ុន សែន កំពង់ត្របែក)
www.pisethsok.wordpress.com

វិធីទី២ : ប្រើលក្ខខ័ណ្ឌមានឫសឌុបនៃសមីការអាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វ ។

- សមីការបន្ទាត់ប៉ះ(Δ) មានរាង

$(\Delta): y = kx + b \quad (2)$

- អាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វនៃបន្ទាត់ប៉ះ(Δ) និង ខ្សែកោង(C) ជាឫសនៃសមីការ : $f(x) = kx + b \quad (**)$ ។

- ដើម្បីអោយ (C) ប៉ះនឹង (C) លុះត្រាតែសមីការ (**) មានឫសឌុប ។

- ប្រើលក្ខខ័ណ្ឌនេះ (ឫសឌុប) គេកំនត់បាន b ជំនួស b ក្នុងសមីការ (2) គេបានសមីការបន្ទាត់ប៉ះ ។

លំហាត់៤៣ : កំនត់សមីការបន្ទាត់ប៉ះរួមទៅនឹងទាំងពីរប៉ារ៉ាបូល

$y = 2x^2 \quad (P_1)$ និង $y = 2x^2 + x - 3 \quad (P_2)$

ចំលើយ : សមីការបន្ទាត់ប៉ះមានរាង $y = ax + b : (\Delta)$

- អាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វរវាង (Δ) និង (P_1) ជាឫសនៃសមីការ : $2x^2 = ax + b \Leftrightarrow 2x^2 - ax - b = 0$

$\Delta_1 = a^2 + 8b$

- អាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វរវាង(Δ) និង(P_2) ជាឫសនៃសមីកា $2x^2 + x - 3 = ax + b \Leftrightarrow 2x^2 + (1-a)x - 3 - b = 0$

$\Delta_2 = (1-a)^2 + 8(3+b)$

ដើម្បីអោយ (Δ) ប៉ះរួមទៅនឹង (P_1) និង (P_2) លុះត្រាតែ $\Delta_1 = 0$ និង $\Delta_2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 8b = 0 \\ (1-a)^2 + 8(3+b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{25}{2} \; ; \; b = \frac{-625}{32}$$

ដូចនេះសមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ :

$$(\Delta): y = \frac{25}{2}x - \frac{625}{2}$$

លំហាត់៤៤ : រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងខ្សែកោង :

$(c): y = -x^2 + 4x - 3$ ដោយដឹងមេគុណប្រាប់ទិស $k = 2$

ចំលើយ :

វិធីទី ១ : គេមាន : $(c): y = -x^2 + 4x - 3$

$\Rightarrow y' = -2x + 4$

យក $M_0(x_0; y_0)$ ជាចំនុចប៉ះ ។ នោះមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ M_0 ស្មើនឹងតំលៃលេខដេរីវេត្រង់ចំនុចនោះ

គេបាន : $k = y'_{(x_0)} \Leftrightarrow 2 = -2x_0 + 4 \Rightarrow x_0 = 1 \; ; \; y_0 = 0$

សមីការបន្ទាត់ប៉ះមានរាង :

$y - y_0 = (x - x_0) \Leftrightarrow y = (x-1)2 = 2x - 2$

វិធីទី ២ : សមីការបន្ទាត់ប៉ះមានរាង

$(\Delta): y = kx + b = 2x + b \quad (2)$

អាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វនៃ (Δ) និង (c) ជាឫសនៃសមីការ :

$-x^2 + 4x - 3 = 2x + b \Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 + b = 0 \; (**)$

បើ(Δ) ប៉ះនឹង(c) លុះត្រាតែ(**) មានឫសឌុប

គេបាន : $\Delta' = 0 \Leftrightarrow 1 - (b+3) = 0 \Leftrightarrow b = -2$

សុខ ពិសិដ្ឋ
www.pisethsok.wordpress.com

ក្រាបនៃអនុគមន៍ មិនកាត់តាមនោះ ទោះបី m យកតំលៃណាក៏ដោយ ។

ចំលើយ : អនុគមន៍មិនកំនត់ពេលណា $x=1$ នោះក្រាបនៃអនុគមន៍ មិនកាត់តាមបណ្តាចំនុចមានអាប់ស៊ីស $x=1$ ។

តាង $A(x;y)$; $x\neq 1$ ជាចំនុចដែលត្រូវសារខ្សែកោងមិនកាត់តាម $\forall m$ ។

គេបានសមីការ : $y=\dfrac{2x^2+(m-2)x}{x-1}$ (*) គ្មានឫស

$\Leftrightarrow (x-1)y=2x^2+(m-2)x$ គ្មានឫស

$\Leftrightarrow xm+2x^2-2x-xy+y=0$ (1) គ្មានឫស

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 2x^2-2x-xy+y\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y\neq 0 \end{cases}$

ហេតុនេះបណ្តាចំនុចដែលត្រូវសារខ្សែកោងមិនកាត់តាម គឺ :

- បណ្តាចំនុចស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ $x=1$
- បណ្តាចំនុចស្ថិតនៅលើអ័ក្សអរដោនេលើកលែងចំនុច 0 គល់នៃអ័ក្ស ។

លំហាត់ :

១/- គេអោយអនុគមន៍ $y=\dfrac{mx^2-(m^2+m-1)x+m^2-m+2}{x-m}$ ហើយ $A(x;y)$; $x>0$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថាមានតំលៃលេខនៃ m ពីរដែលអនុគមន៍កាត់តាម A ជានិច្ច ។

២/- កំនត់បណ្តាចំនុចក្នុងប្លង់ដែល :

$(Cm): y=\dfrac{2x^2+(6-m)x+4}{mx+2}$ មិនកាត់តាម ទោះបី m យកតំលៃណាក៏ដោយ ។

ប្រសព្វរវាងពីរខ្សែកោង

គេអោយពីរខ្សែកោង (C_1) និង (C_2) តាមលំដាប់មានសមីការ $y=f(x)$ និង $y=g(x)$

ឧបមាថា : $M(x;y)$ ជាចំនុចប្រសព្វរវាង (C_1) និង (C_2) ហេតុនេះកូអរដោនេនៃM ផ្ទៀងផ្ទាត់ពីរសមីការ $y=f(x)$ និង $y=g(x)$ គេបាន :

$f(x)=g(x)$ (1)

សមីការ $f(x)=g(x)$ ដែលកំនត់បាន ជាសមីការអាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វនៃ (C_1) និង (C_2) ។ (C_1) ប្រសព្វនៃ និង (C_2) អាស្រ័យទៅនឹង ឫសនៃសមីការខាងលើ ។

* ដោយហេតុនេះដើម្បីសិក្សាប្រសព្វរវាង (C_1) និង (C_2) គេសិក្សាឫសនៃសមីការ $f(x)=g(x)$ ។

- បើសមីការ $f(x)=g(x)$ មាន n ឫសត្រូវនឹង $x_1;x_2\dots x_n$ នោះ (C_1) និង (C_2) កាត់គ្នាបាន n ចំនុចដែលមានអាប់ស៊ីស $x_1;x_2;x_3\dots x_n$ ។ ជំនួសបណ្តាអាប់ស៊ីសនេះក្នុងសមីការ $y=f(x)$ រឺ $y=g(x)$ គេកំនត់បានបណ្តាអរដោនេ ។

សុខ ពិសិដ្ឋ
www.pisethsok.wordpress.com

សមីការសំណុំចំនុច ។ ផ្អែកតាមលក្ខខ័ណ្ឌនៃប៉ារ៉ាម៉ែត m គេកំនត់បានរូបនៃសំណុំចំនុច ។

លំហាត់៤៥ : រកសំណុំចំនុចផ្ចិតឆ្លុះនៃអនុគមន៍អ៊ីប៉ែបូល :

$$(Cm): y=\frac{mx+2}{x+m-1}$$

ចំលើយ : តាងI ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃ (Cm) គេបាន :

$$I=\begin{cases} x=-\frac{d}{c}=1-m & (1)\\ y=\frac{a}{c}=m & (2)\end{cases}$$

* ជំនួស (2) និង (1) គេបាន $x=1-y \Rightarrow =1-x$

ដូចនេះសំណុំចំនុចI ជាបន្ទាត់ $y=1-x$

លំហាត់៤៦ : គេអោយប៉ារ៉ាបូលមានសមីការ $y=x^2+5$ (P) និងបន្ទាត់ (D) មានសមីការ $y=-2mx+4m$ ពេល (D) កាត់ (P) ត្រង់ពីចំនុចA ; B រកសំណុំចំនុចកណ្តាលI នៃ$[AB]$ ។

ចំលើយ : អាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វនៃ(P) និង(D) ជាឫសនៃ :

$x^2+5=-2mx+4m \Leftrightarrow x^2+2mx+5-4m=0$ (*)

ដើម្បីអោយ (P) និង (D) កាត់គ្នាបានពីរចំនុចលុះត្រាតែសមីការ(*) មានឫសពីរផ្សេងៗគ្នាគឺ :

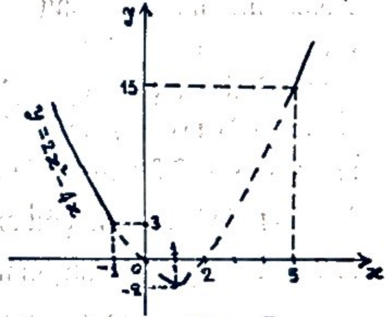
$\Delta' > \Rightarrow m^2+4m-5>0 \Leftrightarrow m<-5$ ឬ $m>1$

កូអរដោនេI កណ្តាល$[AB]$ គឺ :

$$I=\begin{cases} x=\frac{x_A+x_B}{2}=-m & (1)(x_A;x_B \text{ ឫសនៃ } (*))\\ y=-2mx+4m & (2)\end{cases}$$

តាម(1) និង(2) គេបាន : $y=2x^2-4x$ (c)

លីមីតសំណុំចំនុច : ដើម្បីមានI គេចាំបាច់មានA ; B គឺ $m<-5$ ឬ $m>1$



- ចំពោះ $m<-5$ គេបានអាប់ស៊ីសI គឺ $x_1=-m>5$
- ចំពោះ $m>1$ គេបាន $x_2=-m<-1$ ដូចនេះសំណុំចំនុច I កណ្តាល $[AB]$ ជាប៉ារ៉ាបូល $(c): y=2x^2-4x$ លើកលែងបណ្តាចំនុចដែលមានអាប់ស៊ីស $x<-1$ ឬ $x>5$

លំហាត់៤៦ : គេអោយអនុគមន៍ $y=\frac{x^2+(m-2)x-10}{x^2-2x-3}$ (Cm)

a). កំនត់m ដើម្បីអោយអនុគមន៍មានអតិបរិមា និងអប្បបរិមា ។

b). រកសំណុំចំនុចបរិមាពេលm ប្រែប្រួល ។

ចំលើយ : **a).** តំលៃលេខនៃ m ដើម្បីអោយអនុគមន៍មានអតិបរិមា និងអប្បបរិមា

សុខ ពិសិដ្ឋ (គ្រូបង្រៀនគណិតវិទ្យានៅវិ.សម្តេចតេជោ ហ៊ុន សែន កំពង់ត្របែក)
www.pisethsok.wordpress.com

អនុគមន៍មិនកំនត់កាលណា $x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow x=-1$ រឺ $x=3$ ដែនកំនត់នៃអនុគមន៍គឺ $D=IR-\{-1;3\}$ ដេរីវេ

$$y'=\frac{-mx^2+14x-3m-14}{(x^2-2x-3)^2}$$

សញ្ញានៃដេរីវេគឺ ជាសញ្ញានៃកន្សោម :

$g(x)=-mx^2+14x-3m-14$

សញ្ញានៃដេរីវេគឺ ជាសញ្ញានៃកន្សោម :

$g(x)=-mx^2+14x-3m-14$

អនុគមន៍អាចមានអតិបរិមានិង អប្បបរិមាបើ $y'=0$ មានឫស ពីរខុសពី-1 និង 3 ហើយប្តូរសញ្ញាពេល x ឆ្លងកាត់ឫសទាំង ពីរនោះ ។ លក្ខខ័ណ្ឌនេះអាចកើតឡើងកាលណាសមីការ :

$-mx^2+14x-3m-14$ មានឫសពីរខុសពី-1 និង3

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ \Delta'=-3m^2-14m+49>0 \\ g(-1)\neq \text{ និង } g(3)\neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ -3m^2-14m+49>0 \\ m\neq -7 \text{ និង } m\neq 7/3 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow -7<m<7/3$ និង $m\neq 0$

$\Leftrightarrow m\in \left]-7;\frac{7}{3}\right[-\{0\}$ (*)

b). <u>សំណុំនៃបណ្តាចំនុចបរិមាពេល m ប្រែប្រួល :</u>

m បំពេញលក្ខខ័ណ្ឌ (*) អនុគមន៍មានអតិបរិមា និង អប្បបរិមា ។ អាប់ស៊ីសបណ្តាចំនុចបរិមា គឺជាឫសនៃសមីការ $-mx^2+14x-3m-14=0$ ហេតុនេះកូអរដោនេបណ្តាចំនុចបរិមា$M_{1,2}$ កំនត់ដោយ :

$$M_{1;2}\begin{cases} -mx^2+14x-3m-14=0 & (1) \\ y=\frac{U'}{V'}=\frac{2x+(m-2)}{2(x-1)} & (2) \end{cases}$$

តាម(1) : $-mx^2+14x+3m-14=0$

$\Leftrightarrow -m(x^2+3)=-14(x-1)$

$\Leftrightarrow \quad m=\frac{14(x-1)}{x^2+3}$ (3)

ជំនួស(3) ក្នុង(2) គេបាន :

$$y=\frac{2x+\frac{14(x-1)}{x^2+3}-2}{2(x-1)}=\frac{x^3-x^2+10x-10}{(x-1)(x^2+3)}$$

$$y=\frac{x^2+10}{x^2+3}$$

<u>លីមីតសំណុំចំនុច</u> : អនុគមន៍មានអតិបរិមា និង អប្បបរិមា ពេល : $-7<m<\frac{7}{3}$ និង $m\neq 0$ តាម (3) គេបាន : $-7<\frac{14(x-1)}{x^2+3}<\frac{7}{3}$ (*) និង $\frac{14(x-1)}{x^2+3}\neq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ x\neq -1 \\ x\neq 3 \end{cases}$$

សុខ ពិសិដ្ឋ (គ្រូបង្រៀនគណិតវិទ្យានៅវិ.សម្តេចតេជោ ហ៊ុន សែន កំពង់ត្របែក)
www.pisethsok.wordpress.com

ហេតុនេះ សំណុំបណ្ដាចំនុចបរិមា M_1 គឺជាខ្សែកោងមានសមីការ $y=\frac{x^2+1}{x^2+3}$ លើកលែងបណ្ដាចំនុចមានអាប់ស៊ីស $x=1; x=-1; x=3$ ។

លំហាត់ : ១/- គេអោយ $(Cm): y=x+m+\frac{1}{mx-1}; (m\neq 0)$

a). រកតំលៃលេខនៃ m ដើម្បីអោយអនុគមន៍មានអតិបរិមា និងអប្បបរិមា ។

b). រកសំណុំចំនុចបរិមាពេល m ប្រែប្រួល

២/- រកសំណុំចំនុចរបត់នៃក្រាប :

$(Cm): y=2mx^3-(m+3)x^2+5x+m$

៣/- រកសំណុំចំនុចបរិមានៃក្រាប :

$(Cm): y=\frac{2x^2-3x+m}{x-2}$

ដោះស្រាយ និង ពិភាក្សាសមីការតាមក្រាភិច

ដើម្បីដោះស្រាយនិង ពិភាក្សាសមីការពិជគណិត $f(x;m)=0$ (1) (មាន m ជាប៉ារ៉ាម៉ែត) គេអនុវត្តដូចតទៅ :

១/- ពន្លាត-បំប្លែងសមីការអោយរាង $f(x)=m$ (2) ពីនេះចាត់ទុក(2) ដូចជាសមីការអាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វនៃពីរខ្សែកោង

- មួយជាខ្សែកោង(C) មានសមីការ $y=f(x)$
- មួយទៀតជាបន្ទាត់ $(D): y=m$

២/- សិក្សានិងគូសក្រាប(C) ។ តាមចំនុចប្រសព្វនៃ(D) និង(D) និង(C) គេបានលទ្ធផលនូវសមីការ ។

* បើសមីការ $f(x;m)=0$ ក្រោយពីបំប្លែងមានរាង $f(x)=f(m)$ ។ ពេលនោះគេតាង $k=g(m)$ រួចគេដោះស្រាយនិង ពិភាក្សា $f(x)=k$ ដោយសិក្សា k តាម $g(m)$ ។

លំហាត់៤៧ : សិក្សា និង សង់ខ្សែកោង $(c): y=\frac{x^2+3x+6}{x+2}$ រួចដោះស្រាយ និង ពិភាក្សាសមីការ : $f(x)=m^3+1$

ចំលើយ : សិក្សានិងសង់ខ្សែកោង(C) :

១/- ដែនកំនត់ : $D=IR-\{-2\}$

២/- ដេរីវេ : $y'=\frac{x^2+4x}{(x+2)^2}; y'=0 \Leftrightarrow x=0$ រឺ $x=-4$

៣/- លីមីត :

* បើ $x\to -2: y\to\infty \Rightarrow x=-2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ
* គេបាន : $y=\frac{x^2+3x+6}{x+2}=x+1+\frac{4}{x+2}$

បើ $x\to\infty: \frac{4}{x+2}\to 0 \Rightarrow y=x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ។

៤/- តារាងអថេរភាព :

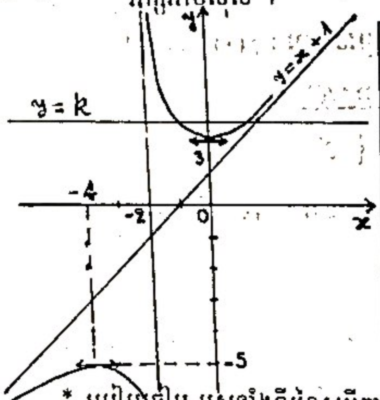
សុខ ពិសិដ្ឋ (គ្រូបង្រៀនគណិតវិទ្យានៅវិ.សម្ដេចតេជោ ហ៊ុន សែន កំពង់ត្របែក)
www.pisethsok.wordpress.com

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-5 y_{max}	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3 y_{min}	↗	$+\infty$

៥/- ចំនុចពិសេស :

បើ $x=0\ ;\ y=3$

$y=0 \Leftrightarrow x^2+3x+6=0$ គ្មានឫសនោះក្រាបមិនកាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីស ។



k	m	ឫសសមីការ
+	$+\infty$	ឫសពីរ
3	$\sqrt[3]{2}$	ឫសឌុប $x=0$
		គ្មានឫស
-5	$\sqrt[3]{-6}$	ឫសឌុប $x=4$
		ឫសពីរ

* ប្រៀបធៀប ឫសទាំងពីរនៃសមីការដឺក្រេទី ២ ទៅនឹងពីរចំនួន $\alpha\ ;\ \beta$ ដែលអោយ :

លំហាត់៤៨ : គេអោយសមីការ $(m-2)x^2-4x+(m-5)=0$ ដោយប្រើក្រាភិច ចូរប្រៀបធៀបឫសនៃសមីការខាងលើទៅនឹងពីរចំនួន

-1 និង 2 ទៅតាមតំលៃ m ។

ចំលើយ : គេមាន : $(m-2)x^2-4x+(m-5)=0$ (1)

$\Leftrightarrow mx^2-2x^2-4x+m-5=0$

$\Leftrightarrow m(x^2+1)=2x^2+4x+5$

$$m=\frac{2x^2+4x+5}{x^2+1} \qquad (2)$$

សមីការ(2) ជាសមីការអាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វនៃពីរខ្សែកោង :

- ខ្សែកោង $(c): y=\dfrac{2x^2+4x+5}{x^2+1}$
- បន្ទាត់ $(\Delta): y=m$

ដើម្បីប្រៀបធៀបឫសនៃសមីការ(1) គេត្រូវសង់ខ្សែកោង(c) បន្ទាត់ : $(D_1): x=-1\ ;\ (D_2): x=2$ និង $(\Delta): y=m$ ។

ដោយ $(c): y=\dfrac{2x^2+4x+5}{x^2+1}$

$$\Rightarrow y'=\frac{-4x^2-6x+4}{(x^2+1)^2}$$

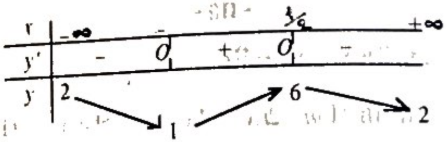
បើ $y'=0 \Leftrightarrow -4x^2-6x+4=0$

$\Leftrightarrow x=-2\ ;\ x=\dfrac{1}{2}$

បើ $x\to\infty\ ;\ y\to 2 \Rightarrow y=2$ ជាអាស៊ីមតូតដេក

តារាងអថេរភាព :

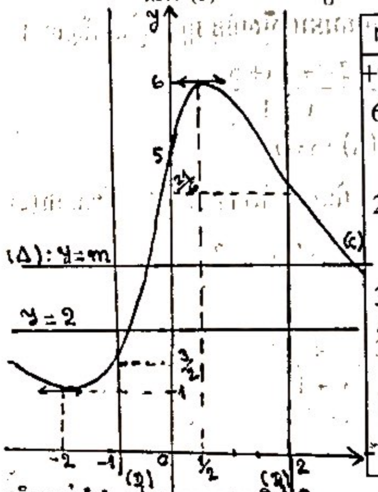
សុខ ពិសិដ្ឋ (គ្រូបង្រៀនគណិតវិទ្យា...) www.pisethsok.wordpress.com



ចំនុចពិសេស : បើ $x = 0\,;\, y = 5$

បើ $y = 0 \Rightarrow 2x^2 + 4x + 5 = 0$ គ្មានឫស

នោះ (c) មិនកាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីស ។



m	ឫសសមីការ
$+\infty$	គ្មានឫស
6	ឫសឌុប $x = \frac{1}{2}$
	ឫសពីរ $-1 < x_1 < x_2 < 2$
2	ឫសពីរ $-1 < x_1 < x_2 = 2$
	ឫសពីរ $-1 < x_1 < -2 < x_2$
$3/2$	ឫសពីរ $x_1 < -1 = x_2 < 2$
	ឫសពីរ $x_1 < x_2 < -1$
1	ឫសឌុប $x = -2$
$-\infty$	គ្មានឫស

លំហាត់៤៩ : ដោះស្រាយ និង ពិភាក្សាសមីការខាងក្រោមតាមក្រាភិច :

a). $Cos^2u + (m-3)Sinu - 7 + 2m = 0$

$$-\frac{\pi}{2} \le u \le \frac{\pi}{2}$$

b). $e^{2t} + (3-m)e^t + 2(3-m) = 0$

ចំលើយ: a). $Cos^2U + (m-3)SinU - 7 + 2m = 0 ; \frac{-\pi}{2} \le u \le \frac{\pi}{2}$ (1)

សមីការ(1) :

$\Leftrightarrow 1 - Sin^2U + (m-3)SinU - 7 + 2m = 0$

$\Leftrightarrow -Sin^2U + (m-3)SinU - 6 + 2m = 0$

$\Leftrightarrow Sin^2U - (m-3)SinU + 6 - 2m = 0$

$\Leftrightarrow SinU + 3SinU + 6 = m(SinU + 2)$

$\Leftrightarrow \frac{SinU + 3SinU + 6}{SinU + 2} = m$ (បើ $SinU + 2 \ne 0$)

$\Leftrightarrow \frac{x^2 + 3x + 6}{x + 2} = m$ ដែល $-1 \le x = SinU \le 1$ (2)

សមីការ (2) ជាសមីការអាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វរវាងពីរខ្សែកោង

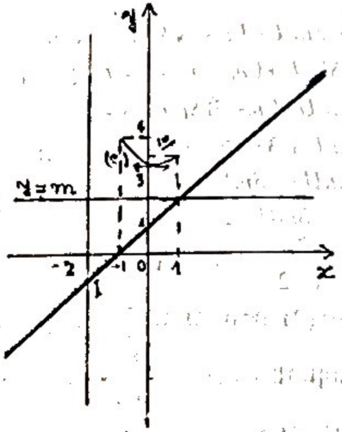
: - ខ្សែកោង $(c): y = \frac{x^2 + 3x + 6}{x + 2} \,;\, -1 \le x \le 1$

- បន្ទាត់ $(D): y = m$

m	ឫស x	ឫស u
$+\infty$	គ្មានឫស	គ្មានឫស
4	ឫសមួយ $x = -1$	ឫសមួយ $U =$
	ឫសមួយ	ឫសមួយ
$\frac{10}{3}$	ឫសពីរ $x = -1$	ឫសពីរ
	ឫសពីរ	ឫសពីរ
3	ឫសមួយ $x = 1$	ឫសមួយ $u = 0$
$-\infty$	គ្មានឫស	គ្មានឫស

គណិតវិទ្យា សុខ ពិសិដ្ឋ
សុខ ពិសិដ្ឋ (គ្រូបង្រៀនគណិតវិទ្យានៅវិ.សម្តេចតេជោ ហ៊ុន សែន កំពង់ត្របែក)
www.pisethsok.wordpress.com

ពិភាក្សា



b). សមីការ : $e^{2t}+(3-m)e^{t}+2(3-m)=0 \quad (3)$

សមីការ : $(3): e^{2t}+(3-m)e^{t}+6-2m=0$

$$\Leftrightarrow e^{2t}+3e^{t}+6=m\left(e^{t}+2\right)$$

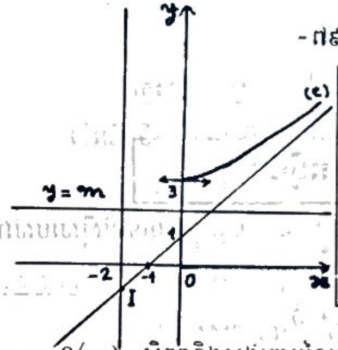
$$\frac{e^{2t}+3e^{t}+6}{e^{t}+2}=m \ (\text{បើ } e^{t}+2\neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+3x+6}{x+2}=m \ (\text{ដែល } x=e^{t}>0 \quad (4))$$

សមីការ(4) ជាសមីការអាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោងពីរ :

- មួយផ្នែកនៃ(C) ត្រូវនឹង $x>0$
- បន្ទាត់ $(D): y=m$

ពិភាក្សា



m	ឫស x	ឫស t
+∞	ឫសមួយគឺ x	ឫសមួយ t=Lnx
3	x=0	គ្មានឫស
	គ្មានឫស	គ្មានឫស
−∞		

១/-a). សិក្សានិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍

$y=\frac{(x-1)^2}{2x-4}$ ។ បង្ហាញថាខ្សែកោងមានផ្ចិតឆ្លុះមួយ ។

b). ដោយប្រើក្រាភិចពិភាក្សាឫសនៃសមីការ :

$x^2-2(m+1)x+4m+1=0$

២/- ដោយប្រើក្រាភិចបង្ហាញថាសមីការ :

$x^2-(m+1)x+2(m-3)=0$ មានឫសពីរជានិច្ច $\forall m$ ។

៣/- សិក្សា និង សង់ $(c): y=\frac{x^2-4}{x}$

ដោយប្រើក្រាភិច ពិភាក្សាតាមm ឫសនៃបណ្ដាសមីការ :

a). $(m^2-5)x^2+4=0$ ហើយប្រៀបធៀបឫសបើមានទៅនឹងពីរចំនួន-3 និង $\frac{1}{2}$

b). $Ln(x-2)+Ln(x+2)-2Lnx=Lnm$

៤/- សិក្សាសង់ខ្សែកោង $(c): y=\frac{x^2-5x+4}{x}$

ដោយប្រើក្រាភិច(C) ពិភាក្សាតាមm ឫសនៃសមីការ

គណិតវិទ្យា សុខ ពិសិដ្ឋ
សុខ ពិសិដ្ឋ (គ្រូបង្រៀនគណិតវិទ្យានៃវិ.សម្តេចតេជោ ហ៊ុន សែន កំពង់ត្របែក)
www.pisethsok.wordpress.com

ចំណែកអាម៉ូនិច

បើយើងដឹងអាប់ស៊ីសនៃចំនុចទាំង ៤ យើងត្រូវយកអាប់ស៊ីសរបស់វា មកផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង :

$$2(ab+cd)=(a+b)(c+d)$$

លំហាត់៨០ : គេអោយអនុគមន៍ $y=-x^2+2(m+1)x+m-5$ និង (Cm) ជាក្រាបរបស់វា ។ ក្នុងករណីដែល(Cm) កាត់(0x) ត្រង់ពីរចំនុច M' និង M" បង្ហាញថាចំនុច M' និង M" ឆ្លាស់អាម៉ូនិកគ្នាធៀបនឹងA និងB ដែលមានអាប់ស៊ីស-3 និង2 ។

ចំលើយ : សមីការអាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វរវាង(Cm) និងអ័ក្ស(0x) គឺ

$$-x^2+2(m+1)x+m-5=0$$

តាងx' និងx'' ជាអាប់ស៊ីសនៃM' និងM"

គេបាន : $x'+x''=2(m+1)$

$x'x''=-(m-5)$

បើ M' និង M" , A, B រៀបបានជាបំណែកអាម៉ូនិកនោះ អាប់ស៊ីសចំនុចទាំង4 ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង :

$$(x'+x'')(a+b)=2(x'x''+ab)$$
$$2(m+1)(-3+2)=2[-(m-5)-3.2]$$
$$-2(m+1)=2(-m+5-6)$$

$-2(m+1)=-2(m+1)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

ដូច្នេះM' និងM" ឆ្លាស់អាម៉ូនិកធៀបនឹងA ហើយនិងB ។

បើយើងមិនដឹងអាប់ស៊ីសចំនុចទាំង ៤ ទេ គេត្រូវរក :

- ទំនាក់ទំនងគ្មានm រវាងឫសx' និង x''
- បញ្ចូលទំនាក់ទំនងអាម៉ូនិកពីទំនាក់ទំនងរវាងឫស ។

លំហាត់ ៨១ : គេអោយសមីការ $(2m-1)x^2-(m+2)x+m-1=0$ M' និងM" ជាចំនុចដែលមានអាប់ស៊ីសx' និងx'' ឫសនៃសមីការ ហើយឆ្លាស់អាម៉ូនិកគ្នាធៀបនឹង A និង B ដែលគេនឹង រកអាប់ស៊ីសរបស់វា ក្នុងករណីសមីការមានឫស ។

ចំលើយ : ករណីសមីការ $(2m-1)x^2-(m+2)x+m-1=0$ មានឫសពីរx' និង x'' យើងបាន :

$$S=\frac{m+2}{2m-1} \quad (1) \qquad P=\frac{m-1}{2m-1} \quad (2)$$

គេបាន : $S(2m-1)=(m+2)\Leftrightarrow 2Sm-S=m+2$

$$\Leftrightarrow m(2S-1)=S+2\Rightarrow m=\frac{S+2}{2S-1} \quad (3)$$
$$p(2m-1)=m-1\Leftrightarrow 2pm-p=m-1$$
$$\Leftrightarrow m(2p-1)=p-1\Rightarrow m=\frac{p-1}{2p-1} \quad (4)$$

(3) និង (4) គេបាន :

$$\frac{S+2}{2S-1}=\frac{p-1}{2p-1}\Leftrightarrow (S+2)(2p-1)=(P-1)(2S-1)$$
$$\Leftrightarrow 5p+S-3=0\Leftrightarrow 5x'x''+(x'+x'')-3=0$$

សុខ ពិសិដ្ឋ (គ្រូបង្រៀនគណិតវិទ្យានៅវិ.សម្តេចតេជោ ហ៊ុន សែន កំពង់ត្របែក)
www.pisethsok.wordpress.com

គេអាចសរសេរ : $x'x''+\frac{1}{5}(x'+x'')-\frac{3}{5}=0$

$$2\left(x'x''-\frac{3}{5}\right)=\frac{-2}{5}(x'+x'')$$

ដោយប្រៀបធៀបនឹងទំនាក់ទំនងអាម៉ូនិកគេបាន :

$$2(x'x''-ab)=(a+b)(x'+x'')$$

យើងបាន :

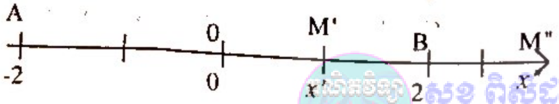
$$\begin{cases}a+b=-\frac{2}{5}\\ ab=-\frac{3}{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\ b=\frac{3}{5}\end{cases}$$

ដូចនេះ M' និង M" ឆ្លាស់អាម៉ូនិកធៀបនឹង A និង B ដែលមានអាស់មានអាប់ស៊ីស-1 និង $\frac{3}{5}$ ។

បើគេដឹងផលគុណ $x'x''=k$, ជាចំនួនថេរនោះយើងយករូបមន្តញូតុន $\overline{IA}^2=\overline{IB}^2=\overline{IC}.\overline{IB}$ មកអនុវត្តតែម្តងគឺថា M' និង M " ឆ្លាស់អាម៉ូនិកធៀបនឹងA និងB ដែលមានអាប់ស៊ីស $-\sqrt{k}$ និង $+\sqrt{k}$ ។

លំហាត់ ៥២: គេអោយសមីការ $x^2-(m-4)x+4=0$ បង្ហាញថា M' និង M" មានអាប់ស៊ីស x',x'' ឆ្លាស់អាម៉ូនិកនឹងចំនុច A និង B ដែលគេនឹងកំនត់អាប់ស៊ីសវា ។

ចំលើយ :



ក្នុងករណីសមីការមួយឫស x',x'' គេបាន :

$$x'x''=\frac{c}{a}=\frac{4}{1}=4$$

$$\overline{OM'}\times\overline{OM''}=4$$

$$\Rightarrow \overline{OM'}\times\overline{OM''}=\overline{OA}^2=\overline{OB}^2=4$$

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថាM' និង M" ឆ្លាស់អាម៉ូនិកធៀបនឹងចំនុចA និងB ដែលមានអាប់ស៊ីសរៀងគ្នា-2 និង+2

លំហាត់៥៣ : គេអោយអនុគមន៍ $y=x^3-mx^2+1$

a) កំនត់m ដើម្បីអោយ(Cm) ប៉ះទៅនឹងបន្ទាត់ $y=5$

b) សិក្សានិងសង់ក្រាប (C) នៃអនុគមន៍ចំពោះតំលៃ m ដែលកំនត់បាន ។

c) បន្ទាត់ $y=5$ កាត់ (c) ត្រង់ពីរចំនុច ។ កំនត់កូអរដោនេនៃចំនុចប្រសព្វទាំងពីរនេះ ។

d) កំនត់ m ដើម្បីអោយនៅលើ (Cm) មានពីរចំនុចឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងO គល់នៃអ័ក្សអរដោនេ ។

e) ចំពោះm ប្រែប្រួល ។ រកសំណុំចំនុចនៃចំនុចអតិបរិមា ៕

ចំលើយ: a) <u>តំលៃm ដើម្បីអោយ(Cm) ប៉ះនឹងបន្ទាត់$y=5$</u>

អាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វនៃ(D) និង(Cm) ជាឫសនៃសមីការ

$$x^3-mx^2+1=5 \quad (*)$$

ដើម្បីអោយ(D) ប៉ះនឹង(Cm) ⇔ $5=y_{max}$ ឬ $5=y_{min}$ (**)

គណនា y_{max} និង y_{min} នៃ : $y=x^3-mx^2+1$

សុខ ពិសិដ្ឋ (គ្រូបង្រៀនគណិតវិទ្យានៅវិ.សម្តេចតេជោ ហ៊ុន សែន កំពង់ត្របែក)
www.pisethsok.wordpress.com

$y' = 3x^2 - 2mx = x(3x-2m)$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ឬ $x = \frac{2m}{3}$

ចំពោះ $m>0 \Rightarrow \frac{2m}{3} > 0$

x	$-\infty$		0		$\frac{2m}{3}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	1	↘	$-\frac{4m^3}{27}+1$	↗	$+\infty$

$y_{max} = y(0) = 1; y_{min} = y\left(\frac{2m}{3}\right) = \frac{-4m^3}{27}+1$

ចំពោះ $m<0 \Rightarrow \frac{2m}{3} < 0$

x	$-\infty$		$\frac{2m}{3}$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$\frac{4m}{27}+1$	↘	1	↗	$+\infty$

$y_{max} = y\left(\frac{2m}{3}\right) = \frac{-4m^3}{27}+1 \; ; \; y_{min} = y(0) = 1$

គេបាន : $y_{max} = \begin{cases} 1 & \text{ចំពោះ } m>0 \\ \frac{-4m^3}{27}+1 & \text{ចំពោះ } m<0 \end{cases}$

$y_{min} = \begin{cases} 1 & \text{ចំពោះ } m<0 \\ \frac{-4m^3}{27}+1 & \text{ចំពោះ } m>0 \end{cases}$

ដោយ $5 = y_{max}$; $5 = y_{min}$ គេបាន

$5 = -\frac{4m^3}{27} - 1$ ចំពោះ $m>0$ (1)

$5 = -\frac{4m^3}{27} + 1$ ចំពោះ $m<0$ (2)

(1) $\Leftrightarrow -4m^3 = 180$ ចំពោះ $m>0 \Leftrightarrow m = -3$ (មិនយក)

(2) $\Leftrightarrow -4m^3 = 180$ ចំពោះ $m<0 \Leftrightarrow m = -3$

ហេតុនេះបន្ទាត់(D) ប៉ះខ្សែកោង(Cm) ពេល <u>$m=-3$</u>

b) <u>សិក្សា និង សង់ក្រាប(C) ចំពោះ m = -3</u>

គេមាន $m=-3 \Rightarrow (C): y = x^3 + 3x^2 + 1$

ដែនកំណត់ $D = IR$

ដេរីវេ $y' = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \; ; \; x = -2$

$y' > 0 \Leftrightarrow x < 0$ រឺ $x > 2$

$y' < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$

$y'' = 6x + 6 = 6(x+1)$

$y'' = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow (-1;3)$

ជាចំនុចរបត់ ។

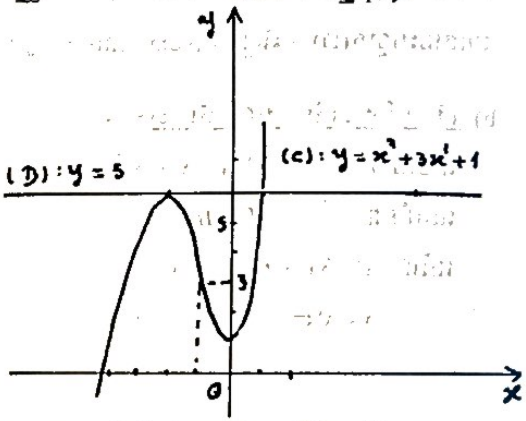
លីមីត: ពេល $x \to +\infty$; $y \to +\infty$

ពេល $x \to -\infty$; $y \to -\infty$

សុខ ពិសិដ្ឋ (គ្រូបង្រៀនគណិតវិទ្យានៅវិ.សម្តេចតេជោ ហ៊ុន សែន កំពង់ត្របែក)
www.pisethsok.wordpress.com

តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		+	0	−		−		+	
y''		−		−	0	+		+	
y	$-\infty$	↗	5	↘	3	↘	1	↗	$+\infty$



c) <u>កូអរដោនេនៃពីរចំនុចប្រសព្វរវាង(C) និង(D)</u> :

អាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វរវាង(C) និង(D) គឺជាឫសនៃសមីការ

$$x^3+3x^2+1=5 \Leftrightarrow x^3+3x^2-4=0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x+2)(x^2+x-2)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad x-9 \text{ ឬ } x=1$$

ហេតុនេះ(D) កាត់(C) ត្រង់ពីរចំនុច :

$(x=-2\ ;\ y=5)$ និង $(x=1\ ;\ y=5)$

b) <u>តំលៃm ដើម្បីអោយនៅលើ(Cm) មានពីរចំនុចឆ្លុះគ្នាធៀបO</u>

តាង $M_\circ(x_\circ ; y_\circ)$ និង $M'_\circ(-x_\circ ; -y_\circ)$ ជាពីរចំនុចឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងO

គេបាន : $M_\circ \in (Cm) \Leftrightarrow y_\circ = x_\circ^3 - mx_\circ^2 + 1 \ (1)$

$$M'_\circ \in (Cm) \Leftrightarrow -y_\circ = -x_\circ^3 - mx_\circ^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow y_\circ = x_\circ^3 + mx_\circ^3 - 1 \ (2)$$

តាម(1) និង(2) $\Rightarrow x_\circ^3 - mx_\circ^2 + 1 = x_\circ^3 + mx_\circ^2 - 1$

$$\Leftrightarrow 2mx_\circ^2 = 2 \Leftrightarrow mx_\circ^2 = 1(*)$$

សមីការ(*) មានឫស $x_\circ \neq 0$ (បើ$M_\circ \neq M'_\circ$) ចំពោះ $m > 0$

e) <u>សំណុំចំនុចនៃចំនុចអតិបរិមានៃ(Cm)</u>

តាមការសិក្សាសំនួរ a). គេឃើញចំពោះ : $m > 0$

ចំនុចអតិបរិមានៃ (Cm) គឺ (0;1) ចំពោះ $m<0$

ចំនុចអតិបរិមានៃ(Cm) គឺ : $M=\begin{cases} x=\dfrac{2m}{3} & (1) \\ y=-\dfrac{4m^3}{27}+1 & (2) \end{cases}$

តាម(1) $\Rightarrow m=\dfrac{3x}{2}$ ជំនួស(3) ក្នុង(2)

គេបាន : $(c'): y = -\dfrac{1}{2}x^3+1$

កាលណា $m<0$ តាម (3)$\Rightarrow \dfrac{3x_M}{2} < 0 \Leftrightarrow x_M < 0$ ហេតុនេះ

សំណុំចំនុចM ជាខ្សែកោង :

$(c'): y=-\dfrac{1}{2}x^3+1$ ត្រូវនឹងបណ្តាចំនុចមានអាប់ស៊ីស $x\leq 0$

សុខ ពិសិដ្ឋ (គ្រូបង្រៀនគណិតវិទ្យានៅវិ.សម្តេចតេជោ ហ៊ុន សែន កំពង់ត្របែក)
www.pisethsok.wordpress.com

លំហាត់ : $(Cm): y = x^3 + mx^2$

១/ - រកសំណុំចំនុចនៃចំនុចអតិបរិមារបស់ (Cm)

២/ - គេមានប៉ារ៉ាបូល $(P): y = x^2 + 1$ កំនត់ m ដើម្បីអោយ

a). (Cm) ប៉ះនឹង(P) ។ កំនត់កូអរដោនេចំនុចប៉ះ

b). (Cm) កាត់(P) ត្រង់មួយចំនុច

c). (Cm) កាត់(P) ត្រង់បីចំនុច

លំហាត់ : $(Cm): y = x^4 + 2(m-2)x^2 + m^2 - 5m + 5$

១/ - ចំពោះតំលៃ m ណាខ្លះដែល (Cm) កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីស ត្រង់ ៤ ចំនុច ។

២/ - សិក្សានិងសង់ខ្សែកោងចំពោះ $m = 1$

៣/ - កំនត់សមីការបន្ទាត់ប៉ះនិង (C_1) ត្រង់ចំនុចរបត់ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថាបន្ទាត់ទាំងនេះកាត់គ្នាត្រង់មួយចំនុចលើអ័ក្សអរដោនេ ។

៤/ - ដោះស្រាយនិងពិភាក្សាសមីការ :

$x^4 + 2x^2 - 1 + k = 0$

លំហាត់ : ១/ - សិក្សានិងសង់ក្រាប $(c): y = \dfrac{Cosx + 2}{3Sinx - Cosx - 1}$ $0 < x < 2\pi$

២/ - ពិភាក្សាតាមតំលៃឫសនៃសមីការ :

$3mSinx - (m+1)C0sx = m + 2 \quad (1)$

៣/ - កំនត់ m ដើម្បីអោយសមីការ(1) មានឫសពីរ $x_1; x_2$ ដែល $|x_1 - x_2| = \pi$ ៕

សូមស្វាគមន៍

មានលក់រាយ ដុំសៀវភៅគ្រប់ប្រភេទ

នៅតូបលេខ ៤៥ ផ្សារអូរឬស្សី

សេខានាន់ចិត្ត

ខាយគ្រឿងក្រដាសគាំ SEK RA

ផ្ទះលេខ ១៩ ផ្លូវ ១៩ ខ័ណ្ឌដូនពេញ ទល់មុខវត្តលង្កា

សូមអរគុណ !

www.pisethsok.wordpress.com

សុខ ពិសិដ្ឋ (គ្រូបង្រៀនគណិតវិទ្យា វិ.សម្តេចតេជោ ហ៊ុន សែន កំពង់ត្របែក)
www.pisethsok.wordpress.com