សំណុំលំហាត់គណិតវិទ្យា

ថ្នាក់ទី ១២

ភាគ ១

អ្នករៀបរៀង

តេ ណៃលាង

គណៈកម្មការនិពន្ធ

ទ្រឹង បើមស្រ៊ី

វត្ត សាគរ

សាន សិត

អៀម ស៊ុផាត

គណៈកម្មការពិនិត្យ

ពាន់ ពន

អ៊ុន គឹមស្រ៊ន

ចេង យា

សៅ ស្វារ៉េត

ហ៊ាង ខេងតិ

ទេព សុគន្ធ

ណាង ដួនលី ៣

បានទទួលការអនុញ្ញាតអោយបោះពុម្ពផ្សាយពីក្រសួងអប់រំ យុវជន និង កីឡា ប្រកាសលេខ ៣៩១ អយក ចុះថ្ងៃទី ២៧ ឧសភា ឆ្នាំ ១៩៩៧ ដើម្បីប្រើប្រាស់នៅតាមសាលាចំនេះទូទៅ ។

អារម្ភកថា

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជាយើង កំពុងអភិវឌ្ឍធនធានមនុស្សដោយផ្តើមចេញពីវិស័យអប់រំ ។ សព្វថ្ងៃ គ្រូ និង សិស្សកំពុងខ្វះខាតឯកសារសំរាប់សិក្សារៀនសូត្រ ។ យើងខ្ញុំទាំងអស់គ្នាបានយកអស់កំលាំងកាយចិត្ត ជ្រើសរើសលំហាត់ពីសៀវភៅផ្សេងៗ និងវិញ្ញាសាប្រលងតាមឆ្នាំនានាមកស្រាយជាគំរូ និងរៀបចំតាក់តែងសៀវភៅលំហាត់គណិតវិទ្យានេះឡើង ដើម្បីជួយអ្នកបង្រៀន និងអ្នកសិក្សាអោយចេះធ្វើលំហាត់អនុគមន៍ត្រឹមត្រូវ ។

យើងខ្ញុំ សូមឧទ្ទិសស្នាដៃនេះចំពោះ បុព្វការីជន ដែលបានធ្វើពលីកម្មដើម្បីជាតិ ។ ពិសេសទៅទៀត ក្នុងពេលបច្ចុប្បន្ននេះ គណៈបក្សប្រជាជនកម្ពុជាកំពុងយកចិត្តទុកដាក់លើវិស័យអប់រំ យើងខ្ញុំក៏សូមឧទ្ទិសស្នាដៃនេះ ចំពោះ **សម្តេចនាយករដ្ឋមន្ត្រីទី២ ហ៊ុន សែន** និង **លោកជំទាវ ប៊ុន រ៉ានី ហ៊ុនសែន** សំរាប់ទុកធ្វើជាអំណោយដល់សិស្សានុសិស្សនៅទូទាំងព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា ក្នុងការសិក្សាពង្រីកចំនេះដឹងតទៅទៀត ។

យើងខ្ញុំរង់ចាំទទួលការរិះគន់ស្ថាបនារបស់ប្អូនៗសិស្សានុសិស្ស និងលោកគ្រូ អ្នកគ្រូទាំងអស់ ។

ក្រុមអ្នកនិពន្ធ

មាតិការ

យើងខ្ញុំជាអ្នកនិពន្ធ មានវត្ថុបំនងតែមួយគត់ គឺជួយអ្នកសិក្សាដែលខ្សោយ មធ្យម និងពូកែអោយចេះវិធីរកលំហាត់អនុគមន៍ ដោយយើងបានរៀបរៀងតាមលំដាប់នៃមេរៀន ៖

- **ដែនកំនត់ ៖** ដោយរៀបរៀងតាមលំដាប់ពីងាយទៅលំបាក
- **លីមីត**
- **របៀបប្រើដេរីវេ ៖** ប្រើដេរីវេប្រែប្រួលទៅតាមប្រភេទសំនួរក្នុងលំហាត់មានវិសមភាព និងចំនោទបរមា
- **សំនុំចំនុច ៖** វិធីរកសំនុំចំនុចក្នុងពិជគណិត ដំបូងត្រូវរកអាប់ស៊ីស និងអរដោនេ រួចមើលប្រភេទទី១ ទីទី២ ទីទី៣
- **កូអរដោនេ ចំនុចប្រសព្វរវាង ៖**
  - ខ្សែកោង និង ខ្សែកោង
  - ខ្សែកោង និង បន្ទាត់
- **គូសខ្សែកោងពីងាយទៅលំបាក ៖** (ភាពខុសគ្នានៃខ្សែកោង តាងអនុគមន៍តំលៃដាច់ខាត)
- **មីកាបំលែងចាំងនៃខ្សែកោង**

សូមជូនពរដល់អ្នកសិក្សាទទួលបានជោគជ័យគ្រប់ប្រការ ។

អ្នកនិពន្ធ

រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

1) $y = lg(x^2 - x - 6)$

ចំលើយ $lg(x^2 - x - 6)$ មានន័យលុះត្រាតែ $x^2 - x - 6 > 0$

$x^2 - x - 6$ ជាត្រីធាដឺក្រេទី២ នៃx ដែលមានឫស $x_1 = -2,\ x_2 = 3$

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$x^2 - x - 6 > 0$		$+$	0	////////	0	$+$	

យើងបាន $\mathcal{D} =]-\infty\ ;\ -2[\ \cup\ ]3\ ;\ +\infty[$

2) $y = \sqrt{x^2 - 2x - 8}$

ចំលើយ $\sqrt{x^2 - 2x - 8}$ មានន័យលុះត្រាតែ $x^2 - 2x - 8 \geq 0$

$2x^2 - 2x - 8$ ជាត្រីធាដឺក្រេទីពីរនៃ x ដែលមានឫស$x_1 = -2$និង $x_2 = 4$

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
$x^2 - 2x - 8 \geq 0$		$+$	0	////////	0	$+$	

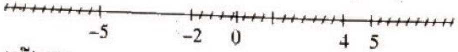
យើងបាន $\mathcal{D} =]-\infty\ ;\ -2]\ \cup [4\ ;\ +\infty[$

3) $y = lg(x^2 - 2x - 8) \pm g(25 - x^2)$

ចំលើយ អនុគមមានន័យលុះត្រាតែ $\begin{cases} x^2 - 2x - 8 > 0 \\ 25 - x^2 > 0 \end{cases}$

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
$x^2 - 2x - 8 > 0$		$+$	0	//////	0	$+$	

x	$-\infty$		-5		5		$+\infty$
$25 - x^2 > 0$		//////	0	$+$	0	//////	



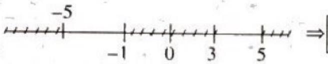
យើងបាន $\mathcal{D} =]-5\ ;\ -2[\ \cup\ ]4;\ 5[$

4) $y = lg(x^2 - 2x - 3) \pm \sqrt{25 - x^2}$

អនុគមន៍មានន័យលុះត្រាតែ $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 > 0 \\ 25 - x^2 \geq 0 \end{cases}$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$x^2 - 2x - 3 > 0$		$+$	0	//////	0	$+$	

x	$-\infty$		-5		5		$+\infty$
$25 - x^2 \geq 0$		//////	0	$+$	0	//////	



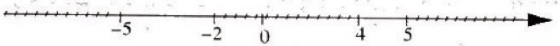
$\Rightarrow \mathcal{D} = [-5\ ,\ -1[\ \cup\ ]3;\ 5]$

5) $y = \sqrt{x^2 - 2x - 8} \pm \dfrac{1}{\sqrt{25 - x^2}}$

ចំលើយ : អនុគមន៍មានន័យលុះត្រាតែ $\begin{cases} x^2 - 2x - 8 \geq 0 \\ 25 - x^2 > 0 \end{cases}$

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
$x^2 - 2x - 8 \geq 0$		$+$	0	//////	0	$+$	

x	$-\infty$		-5		5		$+\infty$
$25 - x^2 > 0$		//////	0	$+$	0	//////	



យើងបាន $\mathcal{D} =]-5\ ,\ -2] \cup [4\ ;\ 5[$

6) $y = lg\left(\dfrac{x^2 - x - 2}{16 - x^2}\right)$

ចំលើយ : អនុគមន៍នេះមានន័យលុះត្រាតែ $\dfrac{N(x)}{D(x)} = \dfrac{x^2 - x - 2}{16 - x^2} > 0$

x	$-\infty$		-4		-1		2		4		$+\infty$
$N(x)$		$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	
$D(x)$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$\dfrac{N(x)}{D(x)} > 0$		//////	|	$+$	0	//////	0	$+$	|	//////	

យើងបាន $\mathcal{D} =]-4\ ;\ -1[\ \cup\ ]2;\ 4[$

www.pisethsok.wordpress.com

7) $y = \sqrt{\dfrac{x^2-2x-8}{25-x^2}}$

ចំលើយ អនុគមន៍នេះមានន័យលុះត្រាតែ $\dfrac{x^2-2x-8}{25-x^2} \geqslant 0$

x	$-\infty$		-5		-2		4		5		$+\infty$
x^2-2x-8		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$25-x^2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{x^2-2x-8}{25-x^2} \geqslant 0$		$-$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	‖	$-$	

យើងបាន $\mathcal{D} =]-5; \ -2] \cup [4; \ 5[$

8) $y = lg\left(\dfrac{x^2-x-12}{x^2+x+1}\right)$

ចំលើយ : អនុគមន៍នេះមានន័យលុះត្រាតែ $\dfrac{N(x)}{D(x)} = \dfrac{x^2-x-12}{x^2+x+1} > 0$

$D(x) = x^2+x+1$ មាន $\begin{cases} a = 10 \\ \Delta = 1-4 = -3 < 0 \end{cases} \Rightarrow D(x) > 0, \ \forall x \in IR$

ដូចនេះ $\dfrac{N(x)}{D(x)}$ យកសញ្ញាតាម $N(x)$, $\dfrac{N(x)}{D(x)} > 0 \Rightarrow N(x) > 0$

x	$-\infty$		-3		4		$+\infty$
$N(x) > 0$		$+$	0	$-$	0	$+$	

យើងបាន $\mathcal{D} =]-\infty \ , \ -3[\ \cup \ ]4; \ +\infty[$

9) $y = lg(x^3-4x^2+3)$

ចំលើយ : អនុគមន៍មានន័យលុះត្រាតែ : $x^3-4x^2+3 > 0$

តាង $P(x) = x^3-4x^2+3$ ដោយ $P(1) = 1-4+3 = 0 \Rightarrow x = 1$

ជាឫសនៃ $P(x)$ ហើយ $P(x)$ ចែកដាច់និង $x-1$

$$\begin{array}{rrr|l} x^3 & -4x^2 & +3 & x-1 \\ \hline -x^3 & +x^2 & & x^2-3x-3 \\ \hline & -3x^2 & +3 & \\ & 3x^2 & -3x+3 & \\ \hline & & -3x+3 & \\ & & +3x-3 & \\ \hline & & 0 \quad 0 & \end{array}$$

x^2-3x-3 ជាត្រីធាដឺក្រេទី២នៃ x មាន $\Delta = 9+12 = 21$ ដូច្នេះ

វាមានឫស $x_1 = \dfrac{3-\sqrt{21}}{2}$, $x_2 = \dfrac{3+\sqrt{21}}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{3-\sqrt{21}}{2}$		1		$\frac{3+\sqrt{21}}{2}$		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-3x-3		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$P(x) > 0$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

យើងបានដែនកំនត់ $\mathcal{D} =]\dfrac{3-\sqrt{21}}{2} \ ; 1[\ \cup \ ]\dfrac{3+\sqrt{21}}{2} \ ; +\infty \ [$

10) $y = lg(9x^2-6x+1)$

អនុគមន៍មានន័យលុះត្រាតែ $9x^2-6x+1 > 0$

$9x^2-6x+1 = (3x-1)^2$ មានឫស $x_1 = x_2 = \dfrac{1}{3}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$9x^2-6x+1$		$+$	0	$+$	

$\mathcal{D} = IR - \left\{\dfrac{1}{3}\right\}$

11) $y = lg(\sqrt{x-1}+\sqrt{7-x})$

ចំលើយ : អនុគមន៍មានន័យលុះត្រាតែ $\begin{cases} x-1 \geqslant 0 \\ 7-x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leqslant 7 \end{cases}$

យើងបាន $\boxed{\mathcal{D} = [1\ ;\ 7]}$

12) $y = lg(\sqrt{x-1} - \sqrt{7-x})$

ចំលើយ អនុគមន៍មានន័យលុះត្រាតែ : $\sqrt{x-1} - \sqrt{7-x} > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geqslant 0 \\ 7-x \geqslant 0 \\ \sqrt{x-1} > \sqrt{7-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 1 \\ x \leqslant 7 \\ x-1 > 7-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 7 \\ x > 4 \end{cases}$$

យើងបាន $\boxed{\mathcal{D} = \,]4;\ 7\,]}$

13) $y = \sqrt{1-2x\sqrt{1-x^2}} \pm \sqrt{1+2x\sqrt{1-x^2}}$

ចំលើយ : $1-2x\sqrt{1-x^2} = x^2 - 2x\sqrt{1-x^2} + 1 - x^2 = (x - \sqrt{1-x^2})^2$

$1+2x\sqrt{1-x^2} = x^2 + 2x\sqrt{1-x^2} + 1 - x^2 = (x + \sqrt{1-x^2})^2$

$\Rightarrow \sqrt{1-2x\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{(x-\sqrt{1-x})^2} = \left|x - \sqrt{1-x^2}\right|$

$\sqrt{1+2x\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{(x+\sqrt{1-x^2})} = \left|x + \sqrt{1-x^2}\right|$

ដូច្នេះ $y = \left|x - \sqrt{1-x^2}\right| \pm \left|x + \sqrt{1-x^2}\right|$

អនុគមន៍នេះមានន័យកាលណា $1 - x^2 \geqslant 0$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x^2$		//////	0	+	0	//////	

យើងបាន $\boxed{\mathcal{D} = [-1\ ;\ 1]}$

14) $y = lg(lgx)$

អនុគមន៍មានន័យលុះត្រាវតែ $lgx > 0 = lg\ 1 \Rightarrow x > 1$

ដូច្នេះយើងបាន $\boxed{\mathcal{D} = \,]1\ ;\ +\infty[}$

15) $y = lg(\log_{0.5}x)$

អនុគមន៍មានន័យលុះត្រាតែ $\log_{0.5}x > 0 = \log_{0.5}1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 1 \end{cases}$

$\boxed{\mathcal{D} = \,]0\ ,\ 1[}$ $\Leftrightarrow |\log_2 x| \leqslant 3 \Leftrightarrow$

16) $y = \sqrt{3 - |\log_2 x|}$ = អនុគមន៍មានន័យលុះត្រាតែ $3 - |\log_2 x| \geqslant 0$

$\Leftrightarrow |\log_2 x| \leqslant 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x \geqslant -3 = \log_2 2^{-3} = \log_2 \frac{1}{8} \\ \log_2 x \leqslant 3 = \log_2 2^3 = \log_2 8 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x \geqslant \frac{1}{8} \\ x \leqslant 8 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\mathcal{D} = \left[\frac{1}{8}\ ;\ 8\right]}$

17) $y = \sqrt{\log_{\sin\alpha}(|\log_2 x| - 3)}$ បើ $\alpha \in \,]0\ ,\ \frac{\Pi}{2}[$

រំលឹក ក) $0 < a < 1$ $\log_a f(x) \geqslant 0$ លុះត្រាតែ $0 < f(x) \leqslant 1$

ខ) $a > 1$ $\log_a f(x) \geqslant 0$ លុះត្រាតែ $f(x) \geqslant 1$

$|A(x)| \geqslant K \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A(x) \leqslant -k \\ A(x) \geqslant k \end{array}\right.$; $|A(x)| \leqslant K \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) \geqslant -K \\ A(x) \leqslant K \end{cases}$

ដោយ $\alpha \in \,]0\ ;\ \frac{\Pi}{2}[\Rightarrow 0 < a = \sin\alpha < 1$

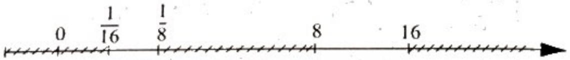
អនុគមន៍មានន័យលុះត្រាតែ $\log_{\sin\alpha}(|\log_2 x| - 3) \geqslant 0$

ដោយគោល $0 < \sin\alpha < 1 \Rightarrow \begin{cases} |\log_2 x| - 3 > 0 \\ |\log_2 x| - 3 \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |\log_2 x| > 3 \quad (1) \\ |\log_2 x| \leqslant 4 (2) \end{cases}$

$(1) \Rightarrow |\log_2 x| > 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x < -3 = \log_2 2^{-3} = \log_2 \frac{1}{2^3} = \log_2 \frac{1}{8} \Rightarrow 0 < x < \frac{1}{8} \\ \log_2 x > 3 = \log_2 2^3 = \log_2 8 \Rightarrow x > 8 \end{array}\right.$

$(2) \Rightarrow |\log\ x| \leqslant 4 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x \geqslant -4 = \log_2 2^{-4} = \log_2 \frac{1}{2^4} = \log_2 \frac{1}{16} \Rightarrow x \geqslant \frac{1}{16} \\ \log_2 x \leqslant 4 = \log_2 2^4 = \log_2 16 \Rightarrow 0 < x \leqslant 16 \end{cases}$

បើ $\mathcal{D}$ ជាដែនកំណត់នោះ $= (1) \cap (2)$

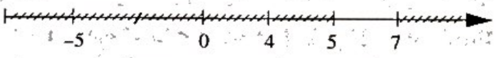


$$\mathcal{D} = \left[\frac{1}{16} ; \frac{1}{8}\right[\cup \left]8; 16\right]$$

18) $y = lg(\sqrt{x-1} - \sqrt{7-x}) + \sqrt{x^2-25}$

អនុគមន៍មានន័យលុះត្រាតែ : $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 7-x \geq 0 \\ x-1 > 7-x \\ x^2-25 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 7 \\ x > 4 \\ x^2-25 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x \leq 7 \\ x^2-25 \geq 0 \end{cases}$

x	$-\infty$		-5		5		$+\infty$
$x^2-25 \geq 0$		+	0	∕−∕	0	+	



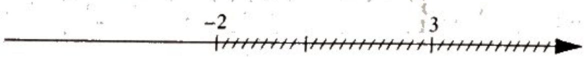
$$\mathcal{D} = [5;7]$$

19) $y = \dfrac{1}{|x|-x} \pm \sqrt{x^2-x-6}$

បើ $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow |x| - x = x - x = 0$ យើងយក $x < 0$

x^2-x-6 ជាត្រីធាដឺក្រេទីពីរនៃ x មានឫស $x_1 = -2$, $x_2 = 3$

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$x^2-x-6 \geq 0$		+	0	∖∖∖−∖∖∖	0	+	



យើងបាន $\mathcal{D} =]-\infty , -2]$

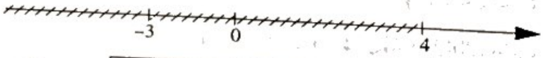
20) $y = \dfrac{2}{x+|x|} + lg(x^2-x-12)$

បើ $x \leq 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow x + |x| = x - x = 0$

យើងត្រូវយក $x > 0$

x^2-x-12 ជាត្រីធាដឺក្រេទី 2នៃ x មានឫស $x_1 = -3$, $x_2 = 4$

x	$-\infty$		-3		4		$+\infty$
$x^2-x-12>0$		+	0	∖∖−∖∖	0	+	



យើងបាន $\mathcal{D} =]4 ; +\infty[$

21) $y = \sqrt{\dfrac{lgx-1}{2-lgx}}$

អនុគមន៍មានន័យលុះត្រាតែ $\dfrac{lgx-1}{2-lgx} \geq 0$

lgx	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$\dfrac{lgx-1}{2-lgx} \geq 0$		////−////	0	+	‖	////−////	

$\begin{cases} lgx \geq 1 = lg10 \\ lgx < 2 = lg100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 10 \\ x < 100 \end{cases} \Rightarrow$ $\mathcal{D} = [10 ; 100[$

22) $y = \sqrt{9^x - 6^x - 4^x}$

អនុគមន៍មានន័យលុះត្រាតែ : $9^x - 6^x - 4^x \geq 0$

$9^x - 6^x - 4^x = 3^{2x} - 3^x \cdot 2^x - 2^{2x} \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - \left(\frac{3}{2}\right)^x - 1 \geq 0$

តាង $\left(\frac{3}{2}\right)^x = X$, $X > 0$ យើងបាន $X^2 - X - 1 \geq 0$ តែ

$X^2 - X - 1$ មាន $\Delta = 1 + 4 = 5$ មានឫស $X_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ និង

$X_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$

X	0		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$X^2 - X - 1 \geq 0$		////	0	$+$	

$X = \left(\frac{3}{2}\right)^x \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x \geq \log_{\frac{3}{2}} \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

យើងបាន $\mathcal{D} = \left[\log_{\frac{3}{2}} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \; ; \; +\infty\right[$

23) $y = lg(9^x - 6^x - 4^x)$

អនុគមន៍មានន័យលុះត្រាតែ : $9^x - 6^x - 4^x > 0$

ធ្វើសំរាយដូចខាងលើ ដោយយក $X = \left(\frac{3}{2}\right)^x > \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow$

$x > \log_{\frac{3}{2}} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \mathcal{D} = \left]\log_{\frac{3}{2}} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \; ; \; +\infty\right[$

24) $y = \sqrt{\frac{3^x - 1}{27 - 3^x}}$

អនុគមន៍មានន័យលុះត្រាតែ $\frac{3^x - 1}{27 - 3^x} \geq 0$ តាង $3^x = X$, $X > 0$

នោះ $x = \log_3 X$ យើងបាន $\frac{X - 1}{27 - X} \geq 0$

$X = 3^x$	0		1		27		$+\infty$
$\frac{X-1}{27-X} \geq 0$		////		$+$		////	

$1 \leq X = 3^x < 27 = 3^3 \quad \Leftrightarrow \log_3 1 = 0 \leq x < \log_3 3^3 = 3$

$\mathcal{D} = [0 \; ; \; 3[$

25) $y = \sqrt{4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} - 3^{x+\frac{1}{2}} + 2^{2x-1}}$

អនុគមន៍មានន័យលុះត្រាតែ : $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} - 3^{x+\frac{1}{2}} + 2^{2x-1} \geq 0$

$4^x = 4^{x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{x-\frac{1}{2}} = 2 \cdot 4^{x-\frac{1}{2}}$

$3^{x+\frac{1}{2}} = 3^{x-\frac{1}{2}+1} = 3 \cdot 3^{x-\frac{1}{2}}$; $2^{2x-1} = (2^2)^{x-\frac{1}{2}} = 4^{x-\frac{1}{2}}$

ដូចនេះយើងបាន $2 \cdot 4^{x-\frac{1}{2}} - 3^{x-\frac{1}{2}} - 3 \cdot 3^{x-\frac{1}{2}} + 4^{x-\frac{1}{2}} \geq 0$

$\Leftrightarrow 3 \cdot 4^{x-\frac{1}{2}} \geq 4 \cdot 3^{x-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^{x-\frac{1}{2}} \geq \frac{4}{3} \Leftrightarrow x - \frac{1}{2} \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$

ដូចនេះយើងបាន $\mathcal{D} = \left[\frac{3}{2} \; ; \; +\infty\right[$

26) $y = lg\left(4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} - 3^{x+\frac{1}{2}} + 2^{2x-1}\right)$

អនុគមន៍នេះមានន័យលុះត្រាតែ $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} - 3^{x+\frac{1}{2}} + 2^{2x-1} > 0$

$\left(\frac{4}{3}\right)^{x-\frac{1}{2}} > \frac{4}{3} \Rightarrow x - \frac{1}{2} > 1$

$\Leftrightarrow x > 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ដូច្នេះយើងបាន $\mathcal{D} = \left]\frac{3}{2} \; ; \; +\infty\right[$

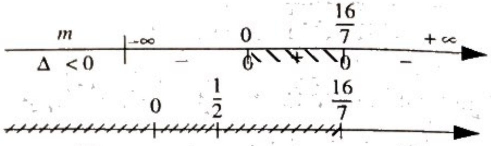
27) កំនត់ m ដើម្បីអោយអនុគមន៍ $y = lg[(2m-1)x^2 - (m+2)x + m - 1]$

មានដែនកំនត់ $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

$(2m-1)x^2 - (m+2)x + m - 1 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ លុះត្រាតែ

$$\begin{cases} 2m - 1 > 0 \\ \Delta = -7m^2 + 16m = m(-7m + 16) < 0 \end{cases}$$

m	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$a = 2m - 1 > 0$		////	0	$+$	



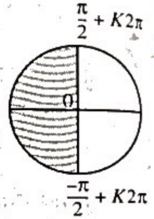
$S = \left]\frac{16}{7}\ ;\ +\infty\right[$

28) $y = lg\ \cos x$

ចំលើយ យើងត្រូវយក $\cos x > 0$

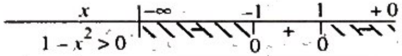
ដូចច្នេះ $-\frac{\pi}{2} + K2\pi < x < \frac{\pi}{2} + K2\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

យើងបាន $\mathcal{D} = \left]-\frac{\pi}{2} + K2\pi\ ;\ \frac{\pi}{2} + K2\pi\right[$

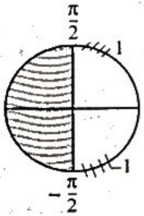


29) $y = lg(1 - x^2) \pm lg\ \cos x$

ចំលើយ យើងត្រូវយក $\begin{cases} 1 - x^2 > 0 \\ \cos x > 0 \end{cases}$



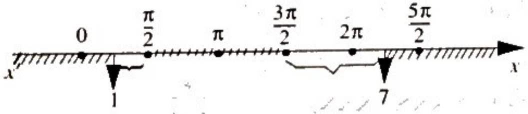
យើងត្រូវយក : $\mathcal{D} =]-1\ ;\ 1[$

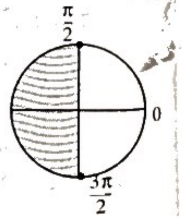


30) $y = lg(\sqrt{x-1} + \sqrt{7-x}) \pm lg \cos x$

យើងត្រូវយក $\begin{cases} x - 1 \geqslant 0 \\ 7 - x \geqslant 0 \\ \cos x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 1 \\ x \leqslant 7 \\ \cos x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 7 \\ \cos x > 0 \end{cases}$

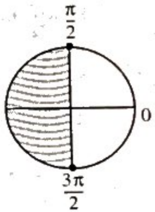
x គិតជា rd នៅលើអ័ក្ស $x'x$



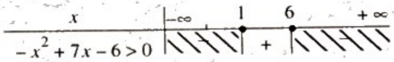


យើងបាន $\mathcal{D} = \left[1\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}\ ;\ 7\right]$

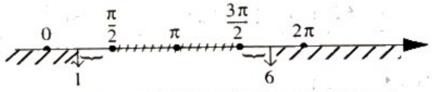
31) $y = lg(-x^2 + 7x - 6) \pm \sqrt{\cos x}$



យើងត្រូវយក $\begin{cases} -x^2 + 7x - 6 > 0 \\ \cos x \geqslant 0 \end{cases}$



x គិតជា rd នៅលើអ័ក្ស $x'x$



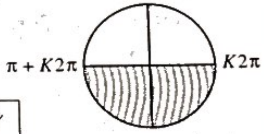
យើងបាន $\mathcal{D} = \left]1;\ \frac{\pi}{2}\right] \cup \left]\frac{3\pi}{2};\ 6\right[$

32) $y = lg\ \sin x$

យើងត្រូវយក $\sin x > 0$

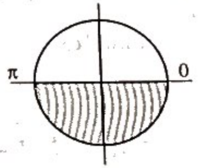
$K2\pi < x < \pi + K2\pi$

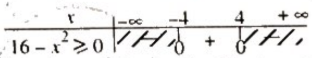
ដូច្នេះ $\mathcal{D} =]K2\pi\ ;\ \pi + K2\pi[\ ,\ K \in \mathbb{Z}$



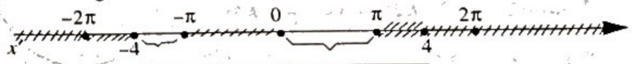
33) $y = \sqrt{16 - x^2} \pm \sqrt{\sin x}$

យើងត្រូវយក $\begin{cases} 16 - x^2 \geqslant 0 \\ \sin x \geqslant 0 \end{cases}$





នៅលើអ័ក្ស $x'x$: x គិតជា rd

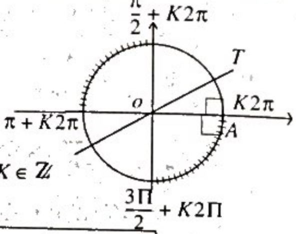


យើងបាន $\mathcal{D} = [-4\ ;\ -\pi] \cup [0\ ;\ \pi]$

34) $y = lg(16 - x^2) \pm \sqrt{\sin x}$

យើងត្រូវយក $\begin{cases} 16 - x^2 > 0 \\ \sin x \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow$ $\boxed{\mathcal{D} = \ ]-4\ ;\ \Pi]\ \cup\ [0\ ;\ \pi]}$

35) $y = lg\ tgx$



យើងត្រូវយក $tgx > 0$

$tgx > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} K2\pi < x < \frac{\pi}{2} + K2\pi \\ \pi + K2\pi < x < \frac{3\pi}{2} + K2\pi\ ; K \in \mathbb{Z} \end{cases}$

យើងបាន :

$\boxed{\mathcal{D} = \ ]K2\pi\ ;\ \frac{\pi}{2} + K2\pi[\ \cup\ ]\pi + K2\pi\ ;\ \frac{3\pi}{2} + K2\pi[}$

36) $y = lg(\sqrt{3}\ tg^2x - 4tgx + \sqrt{3})$

យើងត្រូវយក $\sqrt{3}\ tg^2x - 4tgx + \sqrt{3} > 0$

តាង $tgx = t$; $-\infty < t < +\infty$ យើងបាន

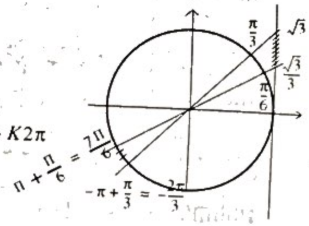
$\sqrt{3}t^2 - 4t + \sqrt{3}$ មាន $\Delta' = 4 - 3 = 1$ នោះយើងបាន

$t_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $t_2 = \sqrt{3}$ បើ $t_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} = tg\frac{\pi}{6}$; $t_2 = \sqrt{3} = tg\frac{\pi}{3}$

t	$-\infty$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$\sqrt{3}\ t^2 - 4t + \sqrt{3} > 0$		+	0	//////	0		

យើងត្រូវយក

$\left[\begin{array}{l} t < \frac{\sqrt{3}}{3} \\ t > \sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tgx < \frac{\sqrt{3}}{3} \\ tgx > \sqrt{3} \end{array}\right.$



យើងត្រូវយក $\frac{\pi}{3} + K2\pi < x < \frac{7\pi}{6} + K2\pi$

និង $x \neq \frac{\pi}{2} + K2\pi$

$\frac{-2\pi}{3} + K2\pi < x < \frac{\pi}{6} + K2\pi$ និង $x \neq -\frac{\pi}{2} + K2\pi$

ដូច្នេះ យើងបាន

$\mathcal{D} = \ ]\frac{\pi}{3} + K2\pi\ ;\ \frac{7\pi}{6} + K2\pi[\ \cup\ ]\frac{-2\pi}{3} + K2\pi\ ;$
$\frac{\pi}{6} + K2\pi\left[\setminus\left\{-\frac{\pi}{2} + K2\pi\ ;\ \frac{\pi}{2} + K2\pi\right\}\right.$

37) $y = lg(16 - x^2) + lg\left(\frac{1}{\sin x} - 2\right)$

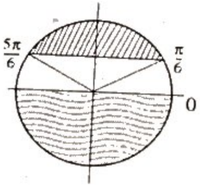
យើងត្រូវយក $\begin{cases} 16 - x^2 > 0 \\ \frac{1}{\sin x} - 2 = \frac{1 - 2\sin x}{\sin x} > 0 \end{cases}$

x	$-\infty$		-4		4		$+\infty$
$16 - x^2 > 0$		////-////	0	+	0	////-//	

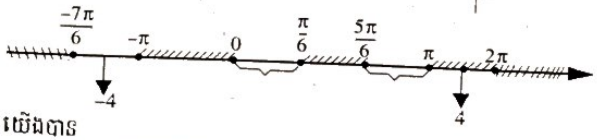
$\sin x$	-1		0		$\frac{1}{2}$		1
$\frac{1 - 2\sin x}{\sin x} > 0$		////-////	‖	+	0	////-//	

យើងត្រូវអោយ

$\begin{cases} -4 < x < 4 \\ 0 < \sin x < \frac{1}{2} \end{cases}$



x គិតជា rd : នៅលើអ័ក្ស x'x

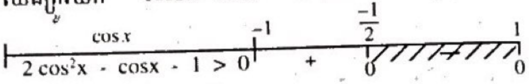


យើងបាន

$\boxed{\mathcal{D} = \ ]\frac{-7\pi}{6};\ -\pi[\ \cup\ ]0\ ;\ \frac{\pi}{6}[\ \cup\ ]\frac{5\pi}{6}\ ;\ \pi[}$

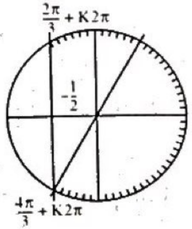
38) $y = lg(\cos 2x - \cos x)$

យើងត្រូវយក $\cos 2x - \cos x = 2\cos^2 x - \cos x - 1 > 0$



យើងត្រូវយក : $\cos x < -\frac{1}{2}$

$\frac{2\pi}{3} + K2\pi < x < \frac{4\pi}{3} + K2\pi$



$$\mathcal{D}_1 = \left]\frac{2\pi}{3} + K2\pi \; ; \; \frac{4\pi}{3} + K2\pi\right[$$

លំហាត់ផ្នែកលីមីត

សុខ ពិសិដ្ឋ
www.pisethsok.wordpress.com

1 - លីមីតមិនកំនត់ : $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2+2x+4}{x+2}$$

$$= \frac{4 \times 3}{2+2} = 3 \quad \text{ដូច្នេះ:} \quad \boxed{\lim_{x \to 2} \frac{x^3-8}{x^2-4} = 3}$$

2- $$\lim_{x \to 2} \frac{x^5 - 32}{x^3 - 8} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x^4+2x^3+4x^2+8x+16)}{(x-2)(x^2+2x+4)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x^4+2x^3+4x^2+8x+16}{x^2+2x+4} = \frac{16 \times 5}{4 \times 3} = \boxed{\frac{20}{3}}$$

3- $$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x+3)}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{x-2}{x+3} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

4- $$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}$$

$$= \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \frac{1}{2}}$$

5 - $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(\sqrt[3]{x}-1)}{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}$

$= \lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1} = \frac{1}{3}$

$$\boxed{\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} = \frac{1}{3}}$$

6 - $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt{4x+1}-\sqrt{x+7}}{x^2-4} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{(\sqrt{4x+1}-\sqrt{x+7})(\sqrt{4x+1}+\sqrt{x+7})}{(x-2)(x+2)(\sqrt{4x+1}+\sqrt{x+7})}$

$= \lim\limits_{x \to 2} \frac{4x+1-x-7}{(x-2)(x+2)(\sqrt{4x+1}+\sqrt{x+7})}$

$= \lim\limits_{x \to 2} \frac{3(x-2)}{(x-2)(x+2)(\sqrt{4x+1}+\sqrt{x+7})}$

$= \lim\limits_{x \to 2} \frac{3}{(x+2)(\sqrt{4x+1}+\sqrt{x+7})} = \frac{3}{4(3+3)} = \frac{1}{8}$

$$\boxed{\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt{4x+1}-\sqrt{x+7}}{x^2-4} = \frac{1}{8}}$$

7 - $\lim\limits_{x \to 1} \frac{(x-1)^2}{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(\sqrt[3]{x}-1)^2(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)^2}{(\sqrt[3]{x}-1)^2}$

$= \lim\limits_{x \to 1}(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)^2 = 3^2 = 9$

8 - $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{2x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{3x\frac{\sin 3x}{3x}}{2x\frac{2x}{2x}} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{3}{2}\,\frac{\sin 3x}{3x} = \frac{3}{2}$

9 - $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x} \lim\limits_{x \to 0} \frac{5x\frac{\sin 5x}{5x}}{3x\frac{\sin 3x}{3x}} = \frac{5}{3} \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{\sin 5x}{5x}}{\frac{\sin 3x}{3x}} = \boxed{\frac{5}{3}}$

10 - $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x\sin x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x\sin x(1+\cos x)}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x\sin x(1+\cos x)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x\sin x(1+\cos x)}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}\,\frac{1}{1+\cos x} = \boxed{\frac{1}{2}}$

11 - $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tgx-\sin x}{x^3} = \lim \frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x} =$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}\,\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,\frac{1}{\cos x} = \boxed{\frac{1}{2}}$

12 - $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}$ បើ $a > 0$

$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{(a-\sqrt{a^2-x^2})(a+\sqrt{a^2-x^2})}{x^2(a+\sqrt{a^2-x^2})}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{a^2-a^2+x^2}{x^2(a+\sqrt{a^2-x^2})} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2(a+\sqrt{a^2-x^2})}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{a+\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a+a} = \boxed{\frac{1}{2a}}$

13 - $\lim\limits_{x \to K} \frac{tg\pi x}{x-K}$

រំលឹក $tg(\pi x + K\pi) = tg\pi x$

តាង $\underset{x \to K}{x-K = X} \Rightarrow \underset{X \to 0}{x = X+K}$

$$tg\pi x = tg\pi(X+K) = tg(\Pi X + K\Pi) = tg\pi X$$

$$\lim_{x \to K} \frac{tg\pi x}{x-K} = \lim_{X \to 0} \frac{tg\pi X}{X} = \lim_{X \to 0} \pi \frac{tg\pi X}{\pi X} = \pi$$

ដូច្នេះ $\boxed{\lim_{x \to K} \frac{tg\pi x}{x-K} = \pi}$

14 - $\lim_{x \to 1} \frac{\sin \pi x}{x-1}$

រំលឹក $\sin(\pi x + k\pi) = \begin{cases} \sin \pi x & \text{បើ } K \text{ គូ} \\ -\sin \pi x & \text{បើ } K \text{ សេស} \end{cases}$

តាង $\underset{x \to 1}{x-1 = X} \Rightarrow \underset{X \to 0}{x = X+1}$

$$\sin \pi x = \sin \pi(X+1) = \sin(\pi X + \pi) = -\sin \pi X$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sin \pi x}{x-1} = \lim_{X \to 0} \frac{-\sin \pi X}{X} = \lim_{X \to 0} -\pi \frac{\sin \pi X}{\pi X} = \boxed{-\pi}$$

15 - $\lim_{x \to 2} \frac{\sin \pi x}{x-2}$

តាង $\underset{x \to 2}{x-2 = X} \Rightarrow \underset{X \to 0}{x = X+2}$

$$\sin \pi x = \sin \pi(X+2) = \sin(\pi X + 2\pi) = \sin \pi X$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sin \pi x}{x-2} = \lim_{X \to 0} \frac{\sin \pi X}{X} = \lim_{X \to 0} \pi \frac{\sin \pi X}{\pi X} = \boxed{\pi}$$

16 - $\lim_{x \to 1} \frac{\sin \pi x}{x^2-1}$

តាង $\underset{x \to 1}{x-1 = X} \Rightarrow \underset{X \to 0}{x = X+1}$

$$x^2 - 1 = (X+1)^2 - 1 = X(X+2)$$

$$\sin \pi x = \sin \pi(X+1) = \sin(\pi X + \pi) = -\sin \pi X$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sin \pi x}{x^2-1} = \lim_{X \to 0} \frac{-\sin \pi X}{X(X+2)} = \lim_{X \to 0} -\pi \frac{\sin \pi X}{\pi X} \times \frac{1}{(X+2)}$$

$$= -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\lim_{X \to 1} \frac{\sin \pi x}{x^2-1} = -\frac{\pi}{2}}$$

17 - $\lim_{x \to 2} \frac{4-x^2}{\sin \pi x}$

$\underset{x \to 2}{X = x-2} \Rightarrow \underset{X \to 0}{x = X+2}$

$$4 - x^2 = 4 - (X+2)^2 = -X(X+4)$$

$$\sin \pi x = Sin \pi(X+2) = \sin(\pi X + 2\pi) = \sin \pi X$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{4-x^2}{\sin \pi x} = \lim_{X \to 0} \frac{-X(X+4)}{\sin \pi X} = \lim_{X \to 0} \frac{-\pi X}{\pi \sin \pi X} (X+4)$$

$$= \boxed{-\frac{4\pi}{\pi}}$$

18 - $\lim_{x \to 2} \frac{\sin \pi x}{x^2-4}$

$\underset{x \to 2}{X = x-2} \Rightarrow \underset{x \to 0}{x = X+2}$

$$x^2 - 4 = (X+2)^2 - 4 = X(X+4)$$

$$\sin \pi x = \sin \pi(X+2) = \sin(\pi X + 2\pi) = \sin \pi X$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sin \pi x}{x^2-4} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin \pi X}{X(X+4)} = \lim_{x \to 0} \pi \frac{\sin \pi X}{\pi X} \frac{1}{X+4}$$

$$= \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

19 - $\lim_{x \to 0} \frac{x}{x + \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{\sin x}{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{1 + \frac{\sin x}{x}}$

$$= \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\lim_{x \to 0} \frac{x}{x + \sin x} = \frac{1}{2}}$$

20 - $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1 + tg\pi x}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x-1} + \lim_{x \to 1} \frac{tg\pi x}{x-1}$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{(\sqrt[3]{x} - 1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)} + \lim_{x \to 0} \frac{tg\pi X}{X}$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1} + \lim_{X\to0} \pi\frac{tg\pi X}{\pi X} = \frac{1}{3}+\pi$$

សន្មត់ $X = x-1$, $x\to1$ $\Rightarrow$ $x = X+1$, $X\to0$

$$tg\pi x = tg\pi(X+1) = tg(\pi X+\pi) = tg\pi X$$

$$\lim_{x\to1}\frac{tg\pi x}{x-1} = \lim_{X\to0}\frac{tg\pi X}{X} = \lim_{X\to0}\pi\frac{tg\pi X}{\pi X} = \pi$$

ដូច្នេះ: $\boxed{\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1+tg\pi x}{x-1} = \frac{1}{3}+\pi}$

21) $$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4+\sin\pi x}{x-2} = \lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}+\frac{\sin\pi x}{x-2}$$

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to2}\frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to2} x+2 = 4$$

$\lim_{x\to2}\frac{\sin\pi x}{x-2}$ តាង $X = x-2$, $x\to2$ $\Rightarrow$ $x = X+2$, $x\to0$

$$\sin\pi x = \sin\pi(X+2) = \sin(\pi X+2\pi) = \sin\pi X$$

$$\lim_{x\to2}\frac{\sin\pi x}{x-2} = \lim_{X\to0}\frac{\sin\pi X}{X} = \lim_{X\to0}\pi\frac{\sin\pi X}{\pi X} = \pi$$

ដូច្នេះ: $\boxed{\lim_{x\to2}\frac{x^2-4+\sin\pi x}{x-2} = 4+\pi}$

22) $$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{\cos x-\cos a} = \lim_{x\to a}\frac{2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}{-2\sin\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}$$

$$= \lim_{x\to a} -\frac{\cos\frac{x+a}{2}}{\sin\frac{x+a}{2}} = -\frac{\cos a}{\sin a} = \boxed{-\cot g a}$$

23) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sqrt{2}\cos x}{1-\sqrt{2}\sin x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}-\cos x}{\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\frac{\pi}{4}-\cos x}{\sin\frac{\pi}{4}-\sin x}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2\sin\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2}\sin\frac{x+\frac{\pi}{4}}{2}}{2\sin\frac{\frac{\pi}{4}-x}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{4}+x}{2}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2}\sin\frac{x+\frac{\pi}{4}}{2}}{-\sin\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{4}+x}{2}}$$

$$= -\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\frac{x+\frac{\pi}{4}}{2}}{\cos\frac{\frac{\pi}{4}+x}{2}} = -\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} = -tg\frac{\pi}{4} = \boxed{-1}$$

24) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x-\cos\frac{\pi}{3}}{x-\frac{\pi}{3}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{-2\sin\frac{x-\frac{\pi}{3}}{2}\sin\frac{x+\frac{\pi}{3}}{2}}{2\,\frac{x-\frac{\pi}{3}}{2}}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} -\frac{\sin\frac{\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{2}\sin\frac{x+\frac{\pi}{3}}{2}}{\frac{x-\frac{\pi}{3}}{2}}$$

តាង $X = x-\frac{\pi}{3}$, $x\to\frac{\pi}{3}$ $\Rightarrow$ $\frac{x-\frac{\pi}{3}}{2} = \frac{X}{2}$ $\Rightarrow x = X+\frac{\pi}{3}$; $\Rightarrow$ $X\to0$

$$\Rightarrow \frac{x+\frac{\pi}{3}}{2} = \frac{X+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}}{2} = \frac{X}{2}+\frac{\pi}{3}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\frac{x-\frac{\pi}{3}}{2}\sin\frac{x+\frac{\pi}{3}}{2}}{\frac{x-\frac{\pi}{3}}{2}} = \lim_{X\to0} -\frac{\sin\frac{X}{2}}{\frac{X}{2}}\sin\left(\frac{X}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \lim_{X\to0} -\sin\left(\frac{X}{2}+\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\cos x - \cos\frac{\pi}{3}}{x - \frac{\pi}{3}} = \boxed{-\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

II - លីមីតរាងមិនកំនត់ $\infty - \infty$

គណនា $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{4x^2 + 3x + 1} - bx$ ដោយពិភាក្សាទៅតាមតំលៃនៃ b

ពិភាក្សា

ក) បើ $b \leqslant 0 \Rightarrow -b \geqslant 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{4x^2 + 3x + 1} - bx = +\infty$$

ខ) បើ $b > 0 \Rightarrow -b < 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{4x^2 + 3x + 1} - bx = \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{4x^2 + 3x + 1} - bx)[\sqrt{4x^2 + 3x + 1} + bx]}{\sqrt{4x^2 + 3x + 1} + bx}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2(4 - b^2) + 3x + 1}{\sqrt{4x^2 + 3x + 1} + bx} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x(4 - b^2) + 3 + \frac{1}{x}}{\sqrt{4 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} + b}$$

b	0		2		$+\infty$
$4 - b^2$	1	+	0	−	

បើ $b \in \left]0\ ;\ 2\right[\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \sqrt{4x^2 + 3x + 1} - bx = +\infty$

$b = 2 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \sqrt{4x^2 + 3x + 1} - bx = \frac{3}{4}$

$b \in \left]2\ ;\ +\infty\right[\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \sqrt{4x^2 + 3x + 1} - bx = -\infty$

តើគេប្រើដេរីវេទីមួយនៅពេលណាខ្លះ

I - ទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍

លំហាត់ទី 1

សិក្សាទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $y = f(x) = \frac{mx + 4}{x + m}$ ទៅតាមតំលៃ m ។

ចំលើយ

* ដែនកំនត់ $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$
* ដេរីវេទី 1 គឺ $f'(x) = \frac{m(x + m) - mx - 4}{(x + m)^2} = \frac{m^2 - 4}{(x + m)^2}$

$\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow x + m \neq 0 \Rightarrow (x + m)^2 > 0 \Rightarrow f'(x)$ យក

សញ្ញាតាម $m^2 - 4$

m	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	

$m = -2 \Rightarrow f(x) = \frac{-2x + 4}{x - 2} = \frac{-2(x - 2)}{x - 2} = -2$ ថេរ >

$m = 2 \Rightarrow f(x) = \frac{2x + 4}{x + 2} = \frac{2(x + 2)}{x + 2} = 2$ ថេរ >

តារាងសង្ខេបលើទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ទៅតាមតំលៃនៃ m

m	$f'(x)$	ទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍
$-\infty$		
	+	អនុគមន៍កើន
-2	0	អនុគមន៍ថេរ $y = f(x) = -2$
	−	អនុគមន៍ចុះ
2	0	អនុគមន៍ថេរ $y = f(x) = 2$
	+	អនុគមន៍កើន
$+\infty$		

លំហាត់ទី 2

ស្រាយថាអនុគមន៍ $f(x) = tgx$ កើនក្នុងចន្លោះ $]0\ ;\ \frac{\pi}{2}[$

ចំលើយ

អនុគមន៍ $f(x)$ កំនត់និងជាប់ក្នុងចន្លោះ $]0\ ;\ \frac{\pi}{2}[$

មាន $f'(x) = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x > 0$

ដូច្នេះ $f'(x) > 0\ ,\ \forall x \in\ ]0\ ;\ \frac{\pi}{2}[\ \Rightarrow f(x)$ កើនក្នុងចន្លោះនោះ $]0\ ;\ \frac{\pi}{2}[$

កំនត់សំគាល់

$\forall \alpha\ ,\ \beta \in\ ]0\ ,\ \frac{\pi}{2}[$ បើ $\alpha < \beta \Rightarrow$
$f(\alpha) < f(\beta) \Rightarrow tg\alpha < tg\beta$

លំហាត់ទី 3

ស្រាយថា $\forall \alpha\ ,\ \beta \in\ ]0\ ,\ \frac{\pi}{2}[$ បើ $\alpha < \beta$

គេបាន $lg\ tg\alpha < lg\ tg\beta$

ចំលើយ

សំរាយដូចសន្លូទី 2 គឺអនុគមន៍ tgx កើន

ក្នុងចន្លោះ $]0\ ,\ \frac{\pi}{2}[\ \Rightarrow 0 < tg\alpha < tg\beta \Rightarrow lg\ tg\alpha < lg\ tg\beta$

លំហាត់ទី 4

អោយអនុគមន៍ $f(x) = 29x^2 + 6x + 1996$

បើ $\alpha, \beta \in\ ]0\ ,\ \frac{\pi}{2}[$ ហើយ $\alpha < \beta$ ស្រាយថា $f(\sin\alpha) < f(\sin\beta)$

ចំលើយ

អនុគមន៍ $\sin x$ កំនត់និងជាប់ក្នុងចន្លោះ $]0,\ \frac{\pi}{2}[$

$(\sin x)' = \cos x > 0\ ,\ \forall x \in\ ]0\ ,\ \frac{\pi}{2}[$

បើ $\alpha, \beta \in\ ]0, \frac{\pi}{2}$ ហើយ $\alpha < \beta \Rightarrow 0 < \sin\alpha < \sin\beta$

$f(x) = 29x^2 + 6x + 1996$ មានដែនកំនត់ $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

$f'(x) = 58x + 6\ ,\ f'(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{6}{58} = -\frac{3}{29}$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} 29x^2 = \infty$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{29}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	អប្បបរមា	↗	

តាង $\mathcal{D}_2 \subset \mathcal{D}$ ដោយ $\mathcal{D}_2 =\ ]-\frac{3}{29}\ ;\ +\infty[$ យើងបាន $f'(x) > 0$

តែ $\forall \alpha, \beta \in\ ]0\ ,\ \frac{\pi}{2}[$ បើ $\alpha < \beta$ យើងបាន $0 < \sin\alpha < \sin\beta$

ដូច្នេះ $\begin{cases} \sin\alpha,\ \sin\beta \in \mathcal{D}_2 \\ \sin\alpha < \sin\beta \end{cases} \Rightarrow f(\sin\alpha) < f(\sin\beta)$

លំហាត់ទី 5

អោយអនុគមន៍ $g(x) = (x - m)^3 - 3x + m + 2$

កំនត់ m ដើម្បីអោយ $g(x)$

ក) កើនក្នុងចន្លោះ $]-\infty\ ;\ -3]$

ខ) កើនក្នុងចន្លោះ $[1\ ;\ +\infty[$

ចំលើយ

អនុគមន៍ $g(x)$ ជាអនុគមន៍ពហុធាមានដែនកំនត់ $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} x^3 = \pm\infty$

$g'(x) = 3(x - m)^2 - 3 = 3(x - m + 1)(x - m - 1)$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = m - 1 \\ x_2 = m + 1 \end{array}\right.$

x	$-\infty$		$m-1$		$m+1$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	អតិបរមា	↘	អប្បបរមា	↗	$+\infty$

ក) $g(x)$ ក្នុងចន្លោះ $]-\infty \; ; \; -3]$ លុះត្រាតែ

$]-\infty \; , \; -3] \subset \;]-\infty \; ; \; m-1] \Rightarrow -3 \leqslant m-1 \Rightarrow m \geqslant -2$

គឺ $m \in [-2 \; ; \; +\infty[$

ខ) $g(x)$ កើនក្នុងចន្លោះ $[1 \; ; \; +\infty[$ លុះត្រាតែ

$[1 \; ; \; +\infty[\; \subset [m+1 \; ; \; +\infty[\; \Rightarrow m+1 \leqslant 1 \Rightarrow m \leqslant 0$

$\Rightarrow m \in \;]-\infty \; ; \; 0]$

II - មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ខ្សែកោង (C)

សមីការ $y = f(x)$ មាន $y' = f'(x)$

$A(x_A \; , \; y_A)$, $B(x_B \; , \; y_B)$ ជាចំនុចនៅលើខ្សែកោង (C)

មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង (C) ត្រង់ A គឺ $f'(x_A)$

បើបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ A ផ្តុំជាមួយ $(x'ox)$ បានមុំ α នោះមេគុណប្រាប់ទិសនៃ
បន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង (C) ត្រង់ A គឺ $tg\alpha$

មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង (C) ត្រង់ B គឺ $f'(x_B)$

បើបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ B ផ្តុំជាមួយ $(x'ox)$ បានមុំ β នោះមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់
ប៉ះខ្សែកោង (C) ត្រង់ B គឺ $tg\beta$

សមីការបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ A គឺ $f'(x_A) = tg\alpha = \dfrac{y - y_A}{x - x_A}$

សមីការបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ B គឺ $f'(x_B) = tg\beta = \dfrac{y - y_B}{x - x_B}$

លំហាត់ទី 1

អោយខ្សែកោង (C) សមីការ $y = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + 1$

ក) រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង (C) ត្រង់ $A\left(x = 2 \; , \; y = \dfrac{17}{3}\right)$

ខ) រកគ្រប់ចំនុចនៅលើខ្សែកោង (C) ដែលបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំនុចនោះស្រប
បន្ទាត់ y - 2x = 0 ។ រួចទាញរកសមីការបន្ទាត់ប៉ះ ។

ចំលើយ

ក) រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង (C) ត្រង់ A

$y = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + 1 \;\Rightarrow y' = x^2 + x$

មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះ (C) ត្រង់ A គឺ $y'(2) = 4 + 2 = 6$

សមីការបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ A $\quad 6 = \dfrac{y - \dfrac{17}{3}}{x - 2} \;\Rightarrow\; y - \dfrac{17}{3} = 6x - 12$

$\Rightarrow y = 6x - 12 + \dfrac{17}{3} = 6x - \dfrac{19}{3} \;\Rightarrow\; y = 6x - \dfrac{19}{3}$

ខ) រកគ្រប់ចំនុចនៅលើខ្សែកោង (C) ដែលបន្ទាត់ប៉ះស្របបន្ទាត់ $y - 2x = 0$
តាង $M(x,y) \in (C)$ ចំនួនត្រូវរក $\Rightarrow$ មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះ
(C) ត្រង់ M គឺ $f'(x) = x^2 + x$

បន្ទាត់ $y - 2x = 0 \Leftrightarrow y = 2x$ មានមេគុណប្រាប់ទិស 2

ដើម្បីអោយបន្ទាត់ទាំងពីរស្របគ្នាលុះត្រាតែមេគុណប្រាប់ទិសរបស់វាស្មើគ្នា
គឺ $x^2 + x = 2 \;\Rightarrow\; x^2 + x - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \quad \Rightarrow y = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{11}{6} \\ x = -2 \quad \Rightarrow y = \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

យើងបានចំនុចមានពីរ $M_1\left(x=1,\ y=\frac{11}{6}\right)$

ទាញរកសមីការបន្ទាត់ប៉ះ $M_2\left(x=-2\ ,\ y=\frac{1}{3}\right)$

សមីការបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ M_1 $\quad 2=\frac{y-\frac{11}{6}}{x-1} \Rightarrow y-\frac{11}{6}=2x-2$

$\Rightarrow y=2x-2+\frac{11}{6}=2x-\frac{1}{6} \Rightarrow y=2x-\frac{1}{6}$

សមីការបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ M_2 $\quad 2=\frac{y-\frac{1}{3}}{x+2}\Rightarrow y-\frac{1}{3}=2x+4$

$\Rightarrow y=2x+4+\frac{1}{3}=2x+\frac{13}{3}\Rightarrow y=2x+\frac{13}{3}$

លំហាត់ទី 2

អោយខ្សែកោង (C) សមីការ $y=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+1$
រកគ្រប់សមីការបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង (C) ដែលផ្គុំជាមួយ $(x'0x)$ បានមុំ $\frac{\pi}{4}$

ចំលើយ

តាង $M(x,y)$ ចំនុចនៅលើ (C) ដែលបន្ទាត់ប៉ះផ្គុំជាមួយ $(x'ox)$ បាន $\frac{\pi}{4}$

$$y=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+1 \Rightarrow y'=x^2+x+1$$

មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ M គឺ $y'=x^2+x+1$

ដោយបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ M ផ្គុំជាមួយ $(x'ox)$ បានមុំ $\frac{\pi}{4}$ នោះមេគុណប្រាប់ទិសរបស់

វាគឺ $tg\frac{\pi}{4}=1$

យើងអាចទាញបាន $y'=1 \Leftrightarrow x^2+x+1=1\Leftrightarrow$

$x^2+x=0 \Leftrightarrow x(x+1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_1=0\\ x_2=-1\end{array}\right.$

បើ $x=0\Rightarrow y=1$ $\quad M_1$

$x=-1\Rightarrow y=\frac{1}{6}$ $\quad M_2$

រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ $M_1(0;1)$ គឺ : $1=\frac{y-1}{x}\Rightarrow y=x+1$

រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ $M_2\left(-1,\ \frac{1}{6}\right)$ គឺ : $1=\frac{y-\frac{1}{6}}{x+1}\Rightarrow y=x+1+\frac{1}{6}$

$\Rightarrow y=x+\frac{7}{6}$

យើងបានសមីការបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង (C) ដែលផ្គុំជាមួយ $(x'ox)$ បានមុំ $\frac{\pi}{4}$
មានពីរ គឺ $\boxed{y=x+1 \text{ និង } y=x+\frac{7}{6}}$

លំហាត់ទី 3

ស្រាយបញ្ជាក់ថាខ្សែកោង (C_m)ទាំងអស់សមីការ $y=(m-2)x^2-2mx+m+2$
កាត់តាមចំនុចនឹង A មួយដែលត្រូវរក ។ រួចស្រាយបញ្ជាក់ថាខ្សែកោង (C_m)
ទាំងអស់មានបន្ទាត់ប៉ះរួមត្រង់ A ដែលត្រូវបញ្ជាក់សមីការ ។

ចំលើយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថាខ្សែកោង (C_m)កាត់តាមចំនុចនឹង A ត្រូវរកសមីការខ្សែកោង
(Cm) អាចសរសេរ $y=mx^2-2x^2-2mx+m+2$

$\Leftrightarrow m(x-1)^2=y-(-2x^2+2)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\forall m\in R$ លុះត្រាតែ

$\begin{cases}x-1=0\\ y-(-2x^2+2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=0\end{cases}$ ដូច្នេះខ្សែកោង (C_m) ទាំងអស់កាត់តាម
ចំនុចនឹង $A(x=1\ ;\ y=0)$

ស្រាយបញ្ជាក់ថាខ្សែកោង (C_m) ទាំងអស់មានបន្ទាត់ប៉ះរួមត្រង់ A
យើងត្រូវរកដេរីវេទី 1 ត្រង់ A អោយមានតំលៃថេរ ដែលជាមេគុណប្រាប់ទិស
នៃបន្ទាត់ប៉ះរួមត្រង់ $y'=2(m-2)x-2m$

$y'(A)=y'(1)=2(m-2)-2m=-4$ ថេរ

ដូច្នេះខ្សែកោង (C_m) ទាំងអស់មានបន្ទាត់ប៉ះរួមត្រង់ A ដែលមានសមីការ

$-4 = \frac{y}{x-1} \Rightarrow y = -4x+4$

លំហាត់ទី 4

ស្រាយបញ្ជាក់ថាខ្សែកោង (C_1) $y = x^3-2x+5$ និង (C_2) $y = 2x^2+2x-3$ មានបន្ទាត់ប៉ះរួមត្រង់ $A(2,9)$ សមីការបន្ទាត់ប៉ះរួមនោះ៖

ចំលើយ

ត្រូវស្រាយថា $A(2,9)$ ជាចំនុចរួមរវាង (C_1) និង (C_2)

ស្រាយថា A នៅលើ (C_1) : $9 = 8-4+5 = 9$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\Rightarrow A \in (C_1)$

ស្រាយថា A នៅលើ (C_2) : $9 = 8+4-3 = 9$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\Rightarrow A \in (C_2)$

$(C_1) y = x^3-2x+5 \Rightarrow y' = 3x^2-2$ មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះ (C_1)

ត្រង់ A គឺ $y'(A) = 12-2 = 10$

$(C_2) y = 2x^2+2x-3 \Rightarrow y' = 4x+2$ មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះ (C_2)

ត្រង់ A គឺ $y' = 4\times 2+2 = 10$

ដោយមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះ (C_1) និង (C2) ត្រង់ A ស្មើ 10 ដូចគ្នា គេថា ខ្សែកោង (C_1) និង (C_2) មានបន្ទាត់ប៉ះរួមត្រង់ A មានសមីការ

$10 = \frac{y-9}{x-2} \Rightarrow y-9 = 10x-20 \Rightarrow \boxed{y = 10x-11}$

III - អតិបរមា អប្បបរមា នៃអនុគមន៍ f (x)

អនុគមន៍មានតំលៃ អតិបរមា រឺ អប្បរមា β ត្រង់ x = α

$$\begin{cases} f'(\alpha) = 0 \\ f(\alpha) = \beta \end{cases}$$

លំហាត់ទី 1

អោយអនុគមន៍ $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$

រកមេគុណ a, b, c និង d បើអនុគមន៍មានតំលៃអតិបរមាស្មើ 4 ត្រង់ $x = -1$ និងមានតំលៃអប្បបរមាស្មើ 0 ត្រង់ $x = 1$ ។

ចំលើយ

ដែនកំនត់ $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. $f'(x) = 3ax^2+2bx+c$

អតិបរមា 4 ត្រង់ $x = -1 \Rightarrow \begin{cases} f'(-1) = 0 \Leftrightarrow 3a-2b+c = 0 & (1) \\ f(-1) = 4 \Leftrightarrow -a+b-c+d = 4 & (2) \end{cases}$

អប្បរមា 0 ត្រង់ $x = 1 \Rightarrow \begin{cases} f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3a+2b+c = 0 & (3) \\ f(1) = 0 \Leftrightarrow a+b+c+d = 0 & (4) \end{cases}$

a , b , a និង d ជាចំលើយនៃ $\begin{cases} 3a-2b+c = 0 & (1) \\ -a+b-c+d = 4 & (2) \\ 3a+2b+c = 0 & (3) \\ a+b+c+d = 0 & (4) \end{cases}$

យើងបាន $\boxed{a = 1,\ b = 0,\ c = -3,\ d = 2}$

លំហាត់

អោយអនុគមន៍ $f(x) = \frac{x^2-lx}{x^2-2x-3}$

1) កំនត់ l ដើម្បីអោយអនុគមន៍គ្មានអតិបរមានិងអប្បរមា

2) កំនត់ l ដើម្បីអោយអនុគមន៍មានអតិបរមា រឺ អប្បរមាតែមួយគត់

3) កំនត់ l ដើម្បីអោយអនុគមន៍មានអតិបរមាមួយ និង អប្បរមាមួយ

ចំលើយ

អនុគមន៍មានដែនកំនត់ $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1;3\}$

$$f'(x) = \frac{(2x-l)(x^2-2x-3)-(2x-2)(x^2-lx)}{(x^2-2x-3)^2} = \frac{(l-2)x^2-6x+3l}{(x^2-2x-3)^2}$$

$\forall x \in \mathcal{D}$, $f'(x)$ យកសញ្ញាតាម $(l-2)x^2-6x+3l$

1)- កំនត់ l ដើម្បីអោយអនុគមន៍គ្មានអតិបរមា និង អប្បរមា លុះត្រាតែ

$(l-2)x^2-6x+3l$ គ្មានឬស រឺ មានឬសឌុប $\begin{cases} l-2 \neq 0 \Leftrightarrow l \neq 2 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases}$

$\Delta' = 9 - 3l^2 + 6l = -3l^2 + 6l + 9 = 3(-l^2 + 2l + 3) \leqslant 0$

l	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$(\Delta') \leqslant 0$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$l \in \,]-\infty \,;\, -1] \cup [3 \,;\, +\infty[$

2) - កំនត់ l ដើម្បីអោយអនុគមន៏មានបរមាតែមួយគត់គឺ $f'(x)$ មានឫសតែមួយគត់ មានន័យថា $(l-2)x^2 - 6x + 3l$ មានឫសតែមួយគត់ គឺ

$a = l - 2 = 0 \Leftrightarrow l = 2$

3) - កំនត់ l ដើម្បីអោយអនុគមន៏មានតំលៃអតិបរមា និង អប្បរមាមួយ ដើម្បីអោយ $f(x)$ មានតំលៃអតិបរមា និង អប្បរមាមួយលុះត្រាតែ $f'(x)$ មានឫសពីរផ្សេងគ្នា គឺ $(l-2)x^2 - 6x + 3$ មានឫសពីរផ្សេងគ្នា $\begin{cases} l-2 \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l \neq 2 \\ \Delta' > 0 \end{cases}$

l	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$\Delta' > 0$		$-$	0	$+$	0	$-$	

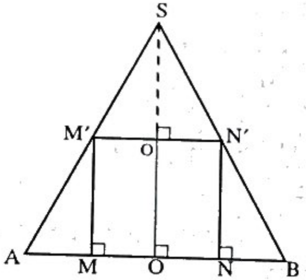
ដូច្នេះយើងបាន $l \in \,]-1 \,;\, 3[\, \setminus \{2\}$

ចំនោទបរមា

លំហាត់ទី 1

ស៊ីឡាំងមួយមានមាឌអតិបរមាចារឹកក្នុងកោនមួយ ដែលកំពស់មានរង្វាស់ h និង កាំថាសបាតមានរង្វាស់ R ។ អនុវត្តជាលេខ បើ h = 15 cm និង R = 6 cm ។ គណនាវិមាត្រស៊ីឡាំងនោះ ។

ចំលើយ



ធ្វើពំនុះរូបដោយប្លង់បណ្តោយកាត់តាមអ័ក្សម $(SO'O)$ កោនបានមុខកាត់ ជាត្រីកោណសមបាទ SAB កំពូល S

- មានកំពស់ $[SO]$, $|SO| = h$
- មានកាំ $[OA]$ និង $[OB]$ ដែល $|OA| = |OB| = R$

ស៊ីឡាំងបានមុខកាត់ ជាចតុកោណកែង MM′N′N

- មានកំពស់ $[OO']$
- មាន $[OM]$, $[ON]$, $[O'M']$, $[O'N']$ ជាកាំថាសបាត $|OM| = |ON| = |O'M| = |O'N|$

តាង $|SO'| = x$, $O < x < h \Rightarrow |OO'| = h - x$

យើងបានកាំ $[O'M']$ ជាកាំប្លែងនៃកាំ $[OA]$ តាមបំលែងចាំងផ្ចិត S និងមានផលធៀប $\frac{|SO'|}{|SO|} = \frac{x}{h} \Rightarrow |O'M'| = |OA|\frac{x}{h} = \frac{Rx}{h}$

ក្រលាផ្ទៃថាសបាតស៊ីឡាំង $s = \pi|O'M'|^2 = \pi\frac{R^2x^2}{h^2}$

តាង $v(x)$ ជាមាឌស៊ីឡាំង $v(x) = \frac{1}{3}s|OO'| = \frac{1}{3}\pi\frac{R^2x^2}{h^2}(h - x)$

$= \frac{\pi R^2}{h^2}(hx^2 - x^3) \Rightarrow v'(x) = \frac{\pi R^2}{h^2}(2hx - 3x^2)$

$$v'(x) = 0 \Leftrightarrow 2hx - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2h}{3} \end{cases}$$

x	o		$\frac{2h}{3}$		h
$v'(x)$		+	0	−	
$v(x)$		↗	អតិបរមា	↘	

តាមតារាង $v'(x)$ និងតាមល័ក្ខខ័ណ្ឌកំនត់ យើងអាចយក $x = \frac{2h}{3}$

រង្វាស់កំពស់ស៊ីឡាំង $|OO'| = h - x = h - \frac{2h}{3} = \frac{h}{3} = \frac{15cm}{3} = 5cm$

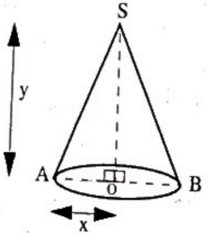
រង្វាស់កាំថាសបាតស៊ីឡាំង$|O'M'| = R\,\frac{x}{h} = R\,\frac{2h}{3h} = \frac{2R}{3} = \frac{2 \cdot 6cm}{3} = 4cm$

ស៊ីឡាំងត្រូវមានរង្វាស់កំពស់ $\frac{h}{3} = 5cm$ រង្វាស់កាំថាសបាត $\frac{2R}{3} = 4cm$

លំហាត់ទី 2

គេសង់ជំរកមួយរាងកោនបរិវត្ត ដែលមានមាឌ v ។ គណនាផលធៀបរង្វាស់កំពស់ និងកាំថាសបាត កាលណាជំរកនោះមានផ្ទៃខាងអប្បបរមា ។

ចំលើយ



តាង $|SO| = y\,,\quad y > 0$

$|OA| = |OB| = x\,,\quad x > 0$

$V = \frac{1}{3}\,\pi x^2 y \Rightarrow y = \frac{3v}{\pi x^2}$

គណនារង្វាស់ផនេត្រ $[SA]$, $[SB]$

$|SA| = |SB|$

ក្នុងត្រីកោណ SOA កែងត្រង់ O យើងបាន

$$|SA|^2 = |SO|^2 + |OA|^2 = \frac{9v^2}{\pi^2 x^4} + x^2 = \frac{9v^2 + \pi^2 x^6}{\pi^2 x^4}$$

$|SA| = \frac{\sqrt{9v^2 + \pi^2 x^6}}{\pi x^2}$ តាង P បរិមាត្របាតកោន $P = 2\pi x$

បើ $S(x)$ ជាក្រលាផ្ទៃខាងរបស់កោន នោះយើងបាន

$$S(x) = \frac{1}{2}P|SA| = \frac{1}{2}2\pi x\,\frac{\sqrt{9v^2 + \pi^2 x^6}}{\pi x^2} = \frac{\sqrt{9v^2 + \pi^2 x^6}}{x}$$

$$S'(x) = \frac{3\pi^2 x^6 - 9v^2 - \pi^2 x^6}{x^2\sqrt{9v^2 + \pi^2 x^6}} = \frac{2\pi^2 x^6 - 9v^2}{x^2\sqrt{9v^2 + \pi^2 x^6}}$$

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\pi^2 x^6 - 9v^2 = O \Leftrightarrow x^6 = \frac{9v^2}{2\pi^2}$$

$$x = \sqrt[6]{\frac{9v^2}{2\pi^2}}$$

x	O		$\sqrt[6]{\frac{9v^2}{2\pi^2}}$		$+\infty$
$S'(x)$		−	O	+	
$S(x)$		↘	អប្បបរមា	↗	

តាមតារាង $S'(x)$ និងតាមល័ក្ខខ័ណ្ឌកំនត់លើ x យើងអាចយក $x = \sqrt[6]{\frac{9v^2}{2\pi^2}}$ ជាចំលើយ

រក $\frac{y}{x} = \frac{3v}{\pi x^3} = \frac{3v}{\pi\sqrt{\frac{3v^2}{2\pi^2}}}$

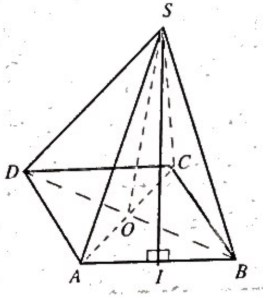
$$= \frac{3v}{\pi\frac{3v}{\pi\sqrt{2}}} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{y}{x} = \sqrt{2}$$

> យើងបានផលធៀបរង្វាស់កំពស់និងកាំថាសបាត ស្មើ $\sqrt{2}$
> ឬរង្វាស់កំពស់ស្មើរង្វាស់កាំថាសបាត $x\sqrt{2}$

លំហាត់ទី 3

ពីរ៉ាមីតចតុមុខនិយ័តមួយ ក្រលាផ្ទៃខាងមានរង្វាស់ S ។ គណនាផលធៀបរង្វាស់កំពស់ និងជ្រុងបាតដើម្បីអោយមាឌរបស់វាមានតំលៃអតិបរមា ។

ចំលើយ



តាង $|AB| = x$, $x > O$ រង្វាស់ជ្រុងបាត

យក I ចំនុចកណ្តាល $[AB] \Rightarrow [SI]$ ជាអាប៉ូតែម

$S = \frac{1}{2} \cdot 4x|SI| \Rightarrow |SI| = \frac{S}{2x}$

ក្នុងត្រីកោណ SOI កែងត្រង់ O យើងបាន

$|SO|^2 = |SI|^2 - |OI|^2 = \left(\frac{S}{2x}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2$

$= \frac{S^2 - x^4}{4x^2}$ តែ $S^2 - x^2 > 0 \Rightarrow x^4 < S^2 \Rightarrow$

$x^2 < S \Rightarrow x < \sqrt{S} \Rightarrow 0 < x < S$

នោះ $|SO| = \frac{\sqrt{S^2 - x^4}}{2x}$ តាង $v(x)$ មាឌពីរ៉ាមីត

$v(x) = \frac{1}{3}x^2\frac{\sqrt{S^2 - x^4}}{2x} = \frac{x}{6}\sqrt{S^2 - x^4} \Rightarrow$

$v'(x) = \frac{S^2 - 3x^4}{6\sqrt{S^2 - x^4}}$, $v'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^4 = S^2 \Leftrightarrow$

$x = \sqrt[4]{\frac{S^2}{3}}$

x	0	$\sqrt[4]{\frac{S^2}{3}}$	$\sqrt{S}$
$v'(x)$	+	0	−
$v(x)$	↗	អតិបរមា	↘

តាមតារាង $v'(x)$ និងតាមល័ក្ខខ័ណ្ឌកំនត់លើ x នោះយើងអាចយក

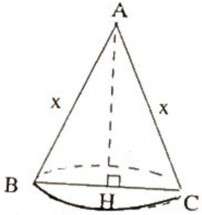
$x = \sqrt[4]{\frac{S^2}{3}}$ គណនា $\frac{|SO|}{x} = \frac{\sqrt{S^2 - x^4}}{2x^2} = \frac{\sqrt{S^2 - \frac{S^2}{3}}}{2\sqrt{\frac{S^2}{3}}}$

$= \frac{\sqrt{\frac{2S^2}{3}}}{2\sqrt{\frac{S^2}{3}}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\frac{S^2}{3}}}{2\sqrt{\frac{S^2}{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

> ផលធៀបរង្វាស់កំពស់និងជ្រុងបាតស្មើ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ រឺ
> រង្វាស់កំពស់ស្មើរង្វាស់ជ្រុងបាត $x\sqrt{\frac{2}{2}}$

លំហាត់ទី 4

ត្រីកោណសមបាទមួយបរិមាត្រស្មើ 2p វិលជុំវិញកំពស់ គូសចេញពីកំពូល កំនត់បានសូលីតមួយមានមាឌអតិបរមា ។ គណនារង្វាស់ជ្រុងនិងកំពស់ត្រីកោណសមបាទនោះ ។



ចំលើយ

តាង ABC ត្រីកោណសមបាទក្នុងសន្ទរដែល

$|AB| = |AC| = x$, $x > 0$

$[AH]$ ជាកំពស់របស់ត្រីកោណគូសចេញពីកំពូល A ។

ពេលវិលជុំវិញ $[AH]$ ត្រីកោណនេះកំនត់បានសូលីតមួយគឺកោនបរិវត្ត កំពូល A មាន

$[AB]$, $[AC]$ ជាជនេត្រ , $[AH]$ ជាកំពូល

$|HB| = |HC|$ ជារង្វាស់កាំថាសបាត

យើងមានបរិមាត្រត្រីកោណ ABC ស្មើ 2p តាមសមតិកម្ម

$|AB| + |AC| + |BC| = 2x + |BC| = 2p \Rightarrow |BC| = 2(p - x)$

ដោយ $0 < x < p$ ហើយ $|HB| = |HC| = p - x$ ក្នុងត្រីកោណ AHB កែងត្រង់ H

$$|AH|^2 = |AB|^2 - |HB|^2 = x^2 - (p-x)^2 = 2px - p^2$$

យើងមាន $2px - p^2 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{p}{2}$ ដូច្នេះ យើងត្រូវកំនត់

ដោយ $\frac{p}{2} < x < p$ យើងបាន $|AH| = \sqrt{2px - p^2}$ រង្វាស់កំពស់កោន

តាង $v(x)$ មាឌកោន

ក្រលាផ្ទៃបាតកោន $s = \pi|HB|^2 = \pi(p-x)^2$

$$v(x) = \frac{1}{3}\ S|AH| = \frac{1}{3}\Pi(p-x)^2\sqrt{2px-p^2}$$

$$v'(x) = \frac{\pi}{3}\ \frac{5px^2 - 8p^2x + 3p^3}{\sqrt{2px-p^2}}\ ,\quad v'(x) = 0 \Leftrightarrow 5px^2 - 8p^2x + 3p^3 = 0$$

$\Leftrightarrow 5x^2 - 8px + 3p^2 = 0$ មាន $\Delta' = 16p^2 - 15p^2 = p^2$ យើងបាន

$x_1 = \frac{3p}{5}$ $\quad x_2 = p$

x	$\frac{p}{2}$		$3\frac{p}{5}$		p
$v'(x)$		+	0	−	0
$v(x)$		↗	អតិបរមា	↘	

តាមតារាង $v'(x)$ និងតាមល័ក្ខខ័ណ្ឌកំនត់ $\frac{p}{2} < x = \frac{3p}{5} < p$

យើងអាចយក $x = \frac{3p}{5}$

$$|AB| = |AC| = \frac{3p}{5}$$

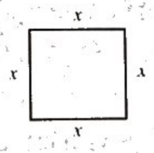
$$|BC| = 2(p-x) = \frac{4p}{5}$$

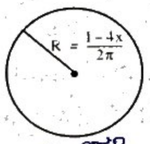
$$|AH| = \sqrt{2px - p^2} = \frac{p\sqrt{5}}{5}$$

លំហាត់ទី 5

ផលបូកបរិមាត្រការេមួយ និងរង្វង់មួយមានប្រវែង l គណនាផលធៀបរវាងរង្វាស់កាំរង្វង់ និងជ្រុងការេដើម្បីអោយផលបូកក្រលាផ្ទៃការេ និងរង្វង់មានតំលៃអប្បបរមា ។

ចំលើយ





សន្មត់យក x ជារង្វាស់ជ្រុងការេ $x > 0$

បរិមាត្រការេស្មើ $4x$ ដូច្នេះបរិមាត្ររង្វង់គឺ $l - 4x$

ដោយ $l - 4x > 0 \Rightarrow$

$4x < l \Rightarrow \quad 0 < x < \frac{l}{4}$

តាង R រង្វាស់កាំរង្វង់ នោះបរិមាត្ររង្វង់គឺ

$2\pi R = l - 4x \Rightarrow R\ \frac{l-4x}{2\pi}$

ក្រលាផ្ទៃការេ គឺ x^2

ក្រលាផ្ទៃរង្វង់ គឺ $\pi R^2 = \pi\left(\frac{l-4x}{2\pi}\right)^2 = \frac{(l-4x)}{4\pi}$

តាង $S(x)$ ជាផលបូកក្រលាផ្ទៃការេនិងរង្វង់

$$S(x) = x^2 + \frac{(l-4x)^2}{4\pi} = \frac{4\pi x^2 + 16x^2 - 8lx + l^2}{4\pi} = \frac{4(\pi+4)x^2 - 8lx + l^2}{4\pi}$$

$$S'(x) = \frac{8(\pi+4)x - 8l}{4\pi} = \frac{2[(\pi+4)x - l]}{\pi}$$

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow (\pi+4)x - l = 0 \Leftrightarrow 0 < x = \frac{l}{\pi+4} < \frac{l}{4}$$

x	0		$\frac{l}{\pi+4}$		$\frac{l}{4}$
$S'(x)$		−		+	
$S(x)$		↘	អប្បបរមា	↗	

តាមតារាង $S'(x)$ និងតាមល័ក្ខខ័ណ្ឌកំនត់លើ x ដែល

$0 < x = \frac{l}{\pi+4} < \frac{l}{4}$ យើងអាចយក $x = \frac{l}{\pi+4}$ ជាចំលើយ

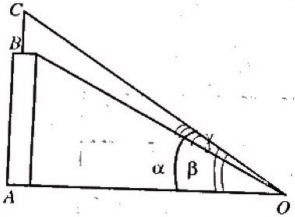
ដូច្នេះយើងបាន $\quad \frac{R}{x} = \frac{l-4x}{2\pi} : x = \frac{l-4x}{2\pi x} = \frac{l - 4\frac{l}{\pi+4}}{2\pi\frac{l}{\pi+4}} = \frac{\pi l + 4l - 4l}{2\pi l} = \frac{\pi l}{2\pi l} = \frac{1}{2}$

យើងបាន $\dfrac{\text{រង្វាស់ការង្វង់}}{\text{រង្វាស់ជ្រុងការេ}} = \dfrac{1}{2}$ ផលធៀបរង្វាស់ការង្វង់និងរង្វាស់ជ្រុងការេស្មើ $\frac{1}{2}$ ។

លំហាត់ទី 6

នៅមុខព្រះបរមរាជវាំង មានដងទង់មួយ កំពស់មានរង្វាស់ h នៅលើដងទង់នោះ គេលោតទង់ជានិមិត្តរូបព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជាដែលកំពស់មានរង្វាស់ a ពីលើដងទង់នោះ ។ ទេសចរម្នាក់មានភ្នែកធម្មតាអត់មានប្រើឧបករណ៍អ្វីទេ ចង់មើលឃើញទង់នោះនៅក្រោមមុំបានរង្វាស់ធំបំផុត ។ គេសន្មត់ថាភ្នែកទេសចរស្ថិតនៅលើប្លង់ដីដែលកែងនិងដងទង់ ។ តើទេសចរនោះត្រូវឈរចំងាយប៉ុន្មានពីដងទង់នោះ ។

ចំលើយ



តាង $|AB| = h,\ h > 0$ ជារង្វាស់ដងទង់

$|BC|$ រង្វាស់ដងទង់ជាតិ $|BC| = a\ ,\ a > 0$

វិភាគ

ក្នុងករណីទេសចរឈរកាន់តែជិតដងទង់ពេលនោះ ទេសចរត្រូវងើយក្បាលឡើងលើ ដើម្បីពិនិត្យទង់ជាតិ នាំអោយគាត់មើលពុំបានច្បាស់ល្អ ក្នុងករណីទេសចរឈរឆ្ងាយពេក ក៏គាត់មើលពុំច្បាស់ដែរ ព្រោះភ្នែកមនុស្សមិនប្រើឧបករណ៍ អាចមើលឃើញវត្ថុអ្វីមួយក្នុងព្រំដែនកំនត់មួយជាក់លាក់ ។ ដូច្នេះទេសចរត្រូវឈរចំងាយ $|OA| = x$ ពីជើងដងទង់ទើបអាចមើលឃើញច្បាស់ ។

ក្នុងត្រីកោណ OAC កែងត្រង់ A សន្មត់ $\widehat{AOC} = \alpha$ នោះយើងបាន

$$tg\alpha = \frac{|AC|}{|OA|} = \frac{|AB| + |BC|}{|OA|} = \frac{h+a}{x} > 0$$

ក្នុងត្រីកោណ OAB កែងត្រង់ A យើងសន្មត់ $\widehat{AOB} = \beta$ នោះយើងបាន

$$tg\beta = \frac{|AB|}{|OA|} = \frac{h}{x} > 0$$

សន្មត់ $\widehat{BOC} = \gamma$ រង្វាស់មុំដែលភ្នែកទេសចរមើលឃើញទង់ជាតិនិមិត្តសញ្ញាព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា

យើងគិតរង្វាស់មុំ α ; β ; និង γ ជារ៉ាដ្យង់ (Rad)

យើងបាន $= \alpha - \beta$ តាមរូបមន្ត

$$tg\gamma = tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha tg\beta} = \frac{\frac{h+a}{x} - \frac{h}{x}}{1 + \frac{h+a}{x}\ \frac{h}{x}}$$

$$= \frac{ax}{x^2 + ah + h^2} > 0$$ ព្រោះ γ ជាមុំស្រួចដោយ $tg\gamma$ ជាប់ទាក់ទងនិងអថេរ x

យើងកំនត់សរសេរ $tg\gamma = f(x)$

$$tg\gamma = f(x) = \frac{ax}{x^2 + ah + h^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{a(-x^2 + ah + h^2)}{(x^2 + ah + h^2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + ah + h^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = ah + h^2 \Leftrightarrow$$

$$x = \sqrt{ah + h^2} = \sqrt{(a+h)h} = \sqrt{h(a+h)} > 0$$

x	0		$\sqrt{h(a+h)}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	អតិបរមា	↘	

ដោយពិនិត្យលើតារាង $v'(x)$ និងល័ក្ខខ័ណ្ឌកំនត់លើ x នោះ

$x = \sqrt{h(h+a)}$ អាចយកជាចំលើយបាន

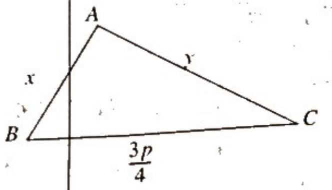
ដូចនេះទេសចរត្រូវឈរចំងាយ

$$\boxed{x = \sqrt{h(h+a)}}$$ ពីដងទង់

លំហាត់ទី 7

ត្រីកោណមួយ បរិមាត្រមាន $2p$ ហើយជ្រុងមួយមានរង្វាស់ $\frac{3p}{4}$ ។ គណនារង្វាស់ជ្រុងពីរទៀត ដើម្បីអោយត្រីកោណនោះមានក្រលាផ្ទៃអតិបរិមា ។ អនុវត្តជាលេខ $p = 40cm$

ចំលើយ



តាង ABC ជាត្រីកោណក្នុងសំនួរដែលមានបរិមាត្រ $2p$

$|BC| = \frac{3p}{4}$, $|AB| = x$, $|AC| = y$, $x,y > 0$

តែ $|AB| + |AC| + |BC| = x + y + \frac{3p}{4} = 2p \Rightarrow$

$y = 2p - \frac{3p}{4} - x = \frac{5p-4x}{4}$ ដោយ $5p - 4x > 0 \Rightarrow$

$4x < 5p \Rightarrow x < \frac{5p}{4} \Rightarrow 0 < x < \frac{5p}{4}$

តាមរូបមន្តហេរុង យើងអាចគណនាក្រលាផ្ទៃត្រីកោណ ABC បាន

$$S(x) = \sqrt{p(p-x)\left(p-\frac{3p}{4}\right)\left(p-\frac{5p-4x}{4}\right)} = \sqrt{\frac{p^2}{16}(p-x)(4x-p)}$$

$$= \frac{p}{4}\sqrt{-4x^2+px-p^2}$$ ដោយ $\frac{p}{4} < x < p$

$$S'(x) = \frac{p}{4}\,\frac{-8x+5p}{\sqrt{-4x^2+5px-p^2}} \Rightarrow S'(x) = 0 \Leftrightarrow -8x+5p = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5p}{8}$$

x	$\frac{p}{4}$		$\frac{5p}{8}$		p
$S'(x)$		+	0	−	
$S(x)$		↗	អតិបរមា	↘	

តាមតារាង $S'(x)$ និងពិនិត្យតាមល័ក្ខខ័ណ្ឌកំនត់លើ x យើងអាចយក $x = \frac{5p}{8}$ ជាចំលើយ នោះយើងបាន $|AB| = |AC| = \frac{5p}{8}$, $|BC| = \frac{3p}{4}$ ត្រីកោណ ABC សមបាទកំពូល A បើ $p = 40cm$ យើងបានត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសមបាទកំពូល A មាន

$|AB| = |AC| = 25cm$

$|BC| = 30cm$

ក្បួនរកសំនុំចំនុចក្នុងពិជគណិត

ចំនុចអថេរមានបីប្រភេទ គឺ

ក- ចំនុចអថេរដែលមាន $\begin{cases}\text{អាប់ស៊ីសថេរ}\\ \text{អរដោនេ អថេរ}\end{cases}$

សំនុំចំនុចអថេរប្រភេទនេះ គឺបន្ទាត់សមីការ $x =$ អាប់ស៊ីសថេរស្រប $(y'0y)$

លំហាត់ទី 1

រកសំនុំចំនុច ω ផ្ចិតឆ្លុះនៃខ្សែកោង (H) សមីការ $y = \frac{mx+2}{x-1}$ កាលណា m ផ្លាស់ប្តូរតំលៃ ។

ចំលើយ

ត្រូវរកកូអរដោនេរបស់ ω បើ ω ជាផ្ចិតឆ្លុះរបស់ខ្សែកោង (H) នោះ

$x = -\frac{d}{c} = 1$ ថេរ , $y = \frac{a}{c} = m$ អថេរ

$\omega \left| \begin{array}{l} x = 1 \text{ ថេរ} \\ y = m \text{ អថេរ} \end{array} \right. \Rightarrow \omega$ ដើរលើបន្ទាត់ $x = 1$ ស្រប $(y'0y)$

លំហាត់ទី 2

អោយខ្សែកោង (C) $y = x^2 - 2x + m + 1$

រកសំនុំចំនុច S កំពូលរបស់ខ្សែកោង (C) កាលណា m ផ្លាស់ប្តូរតំលៃ ។

ចំលើយ

ត្រូវរកកូអនដោនេរបស់ S

បើ S ជាកំពូលរបស់ខ្សែកោង (C) នោះអាប់ស៊ីសរបស់ S គឺជាឫសនៃ

$y = 0$ តែ $y' = 2x - 2$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ថេរ

$y = 1 - 2 + m + 1 = m$ អថេរ

$S \left| \begin{array}{l} x = 1 \text{ ថេរ} \\ y = m \text{ អថេរ} \end{array} \right. \Rightarrow S$ ដើរលើបន្ទាត់ $x = 1$ ស្រប $(y'oy)$

លំហាត់ទី 3

មានចំនុច $M = (x = 2 \ ; \ y = m + 1)$ និង $N(x = 1 \ ; \ y = n)$

ចូររកសំនុំចំនុចកណ្តាល I នៃ $[MN]$ កាលណា m ផ្លាស់ប្តូរតំលៃ

ចំលើយ

ត្រូវរកកូអរដោនេចំនុច I

បើ $I(x \ , \ y)$ ចំនុចកណ្តាលនៃ $[MN]$ នោះយើងបាន

$x = \frac{x_M + x_N}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$ ថេរ

$y = \frac{y_M + y_N}{2} = \frac{m+1+m}{2} = \frac{2m}{2} + \frac{1}{2} = m + \frac{1}{2}$ អថេរ

ដូច្នេះ សំនុំចំនុច I គឺបន្ទាត់សមីការ $x = \frac{3}{2}$ ស្រប$(y'oy)$

ខ. ចំនុចអថេរដែលមាន $\begin{cases}\text{អាប់ស៊ីសអថេរ}\\ \text{អរដោនេថេរ}\end{cases}$

សំនុំចំនុចប្រភេទនេះគឺដើរលើបន្ទាត់សមីការ $y =$ អរដោនេថេរស្រប $(x'ox)$

លំហាត់ទី 1

រកសំនុំចំនុច $M(x = m + 1 \ ; \ y = 2)$ កាលណា m ផ្លាស់ប្តូរតំលៃ ។

ចំលើយ

- ចំនុច M មានកូអរដោនេ $\begin{cases} x = m + 1 & \text{អថេរ} \\ y = 2 & \text{ថេរ} \end{cases}$

ដូច្នេះសំនុំចំនុច M គឺបន្ទាត់ $y = 2$ ស្រប $(x'ox)$

លំហាត់ទី 2

រកសំនុំចំនុច ω ផ្ចិតឆ្លុះរបស់ខ្សែកោង (C)

$$y = \frac{2x + m^2 + m + 1}{x - m}$$ កាលណា m ផ្លាស់ប្តូរតំលៃ ។

ចំលើយ

បើ ω ជាផ្ចិតឆ្លុះរបស់ខ្សែកោង (C) នោះ

$x = -\frac{d}{c} = m$, $y = \frac{a}{c} = 2$ យើងបាន

$\omega \left| \begin{array}{l} x = m \text{ អថេរ} \\ y = 2 \text{ ថេរ} \end{array} \right.$ ⇒ ω ដើរលើបន្ទាត់ $y = 2$ ស្រប $(x'ox)$

គ. ចំនុចអថេរដែលមាន $\left\{ \begin{array}{l} \text{អាប់ស៊ីសអថេរ} \\ \text{អរដោនេអថេរ} \end{array} \right.$

ក្នុងករណីយើងត្រូវរកទំនាក់ទំនងគ្មានប៉ារ៉ាម៉ែតរវាង y និង x រឺ សមីការសំនុំចំនុច

លំហាត់ទី 1

រកសំនុំចំនុច $M(x = 2m \ , \ y = 3m + 1)$

ចំលើយ

យើងត្រូវរកទំនាក់ទំនងគ្មាន m រវាង y និង x រឺសមីការសំនុំចំនុច M ។

$x = 2m \Rightarrow m = \frac{x}{2}$ ជំនួសក្នុង y យើងបាន $y = \frac{3x}{2} + 1$

ដូច្នេះសំនុំចំនុច M គឺបន្ទាត់ $y = \frac{3}{2}x + 1$

លំហាត់ទី 2

អោយខ្សែកោង (C) សមីកា $y = \frac{(m+1)x + 2m - 1}{x - m}$

រកសំនុំចំនុច ω ផ្ចិតឆ្លុះរបស់ខ្សែកោង (C) ។

ចំលើយ

រកកូអរដោនេរបស់ ω

បើ ω ជាផ្ចិតឆ្លុះរបស់ខ្សែកោង (C) យើងបាន

$x = -\frac{d}{c} = m$ អថេរ $y = \frac{a}{c} = m + 1$ អថេរ

យើងត្រូវរកទំនាក់ទំនងគ្មាន m រវាង y និង x រឺសមីការសំនុំចំនុច ω

$x = m \Rightarrow m = x$ ជំនួសក្នុង $y \Rightarrow y = x + 1$

ដូច្នេះ ω ដើរលើបន្ទាត់ $y = x + 1$

លំហាត់ទី 3

អោយខ្សែកោង (H) $y = \frac{3 - x}{x}$ និងបន្ទាត់ (D_1) $y = -x + 3$ ។

បន្ទាត់ (D_2) សមីការ $x = m$ កាត់ (H) ត្រង់ A និង (D_1) ត្រង់ B ។

ចូររកសំនុំចំនុចកណ្តាល I នៃ $[AB]$ កាលណា m ផ្លាស់ប្តូរតំលៃ

ចំលើយ

រកកូអរដោនេចំនុចកណ្តាល I នៃ $[AB]$

រកកូអរដោនេរបស់ A បន្ទាត់ $x = m$ កាត់ខ្សែកោង (C)

$y = \frac{3 - x}{x} \Rightarrow x = m \ , \ y = \frac{3 - m}{m}$ ជាកូអរដោនេរបស់ A

រកកូអរដោនេរបស់ B បន្ទាត់ $x = m$ កាត់បន្ទាត់ (D_1) : $y = -x + 1$

ត្រង់ B : $x = m \ , \ y = -m + 3$

បើ I ជាចំនុចកណ្តាលនៃ $[AB]$; $I(x,y)$

$$x = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{m + m}{2} = m \text{ អថេរ}$$

$$y = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{\frac{3 - m}{m} + (-m + 3)}{2} = \frac{3 - m - m^2 + 3m}{2m}$$

$$= \frac{-m^2 + 2m + 3}{2m} \text{ អថេរ}$$

ត្រូវរកទំនាក់ទំនងគ្មាន m រវាង y និង x ។ សមីការ
សំនុំចំនុចកណ្ដាល I នៃ $[AB]$

$x = m \Rightarrow m = x$ ជំនួសក្នុង y យើងបាន

$$y = \frac{-x^2+2x+3}{2x}$$

ដូច្នេះ យើងបានសំនុំចំនុច I គឺខ្សែកោង (C)

សមីការ $y = \frac{-x^2+2x+3}{2x}$

លំហាត់ទី 4

រកសំនុំចំនុច $N\left(x = 2m\ ,\ y = \frac{m^2-m-6}{m}\right)$

ចំលើយ

រកទំនាក់ទំនងគ្មាន m រវាង y និង x ។ សមីការសំនុំចំនុច N ។

$x = 2m \Rightarrow m = \frac{x}{2}$ ជំនួសក្នុង y យើងបាន

$$y = \frac{\frac{x^2}{4}-\frac{x}{2}-6}{\frac{x}{2}} = \frac{x^2-2x-24}{2x}$$

ដូច្នេះសំនុំចំនុច N គឺខ្សែកោង (H) សមីការ

$$y = \frac{x^2-2x-24}{2x}$$

កូអរដោនេចំនុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោង និង បន្ទាត់ ខ្សែកោង និង ខ្សែកោង

ដើម្បីរកកូអរដោនេចំនុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោងនិងបន្ទាត់ ឬ ខ្សែកោង និងខ្សែកោង យើងត្រូវ

- សរសេរសមីការអាប់ស៊ីសដោយយកសមីការទាំងពីរផ្ទឹមគ្នា
- ដោះស្រាយសមីការនោះ យើងបានអាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វ
- យកអាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វទៅជំនួសក្នុងសមីការខ្សែកោង ឬ បន្ទាត់ យើងបានអរដោនេចំនុចប្រសព្វ

លំហាត់ទី 1

អោយខ្សែកោង (C) សមីការ $y = x^2$ និងបន្ទាត់ (D) សមីការ $y = 2x+3$ ។
រកកូអរដោនេចំនុចប្រសព្វ A និង B រវាង (C) និង (D) ។

ចំលើយ

សមីការអាប់ស៊ីសរវាង $(C) : y = x^2$ និង $(D) : y = 2x+3$

$y = 2x+3$ យើងបាន $x^2 = 2x+3 \Leftrightarrow$

$$x^2-2x-3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \Rightarrow y = (-1)^2 = 1 \\ x_2 = 3 \Rightarrow y = 3^2 = 9 \end{cases}$$

យើងអាចយក

$A(x = -1,\ y = 1)$
$B(x = 3\ ,\ y = 9)$

លំហាត់ទី 2

អោយខ្សែកោង $(H) : y = \frac{3-x}{x}$ និងបន្ទាត់ (D) $y = -x+m$

1)- តើ m ត្រូវមានតំលៃប៉ុន្មាន ទើបបន្ទាត់ (D) ប៉ះខ្សែកោង (H) ។
ទាញរកសមីការបន្ទាត់ប៉ះ

2)- តើ m ត្រូវមានតំលៃប៉ុន្មានទើប (C) និង (D) មានចំនុចប្រសព្វពីរ

M_1 និង M_2 ។

តើ m ត្រូវមានតំលៃប៉ុន្មាន ទើប M_1 និង M_2 នៅតែម្ខាងនៃអាស៊ីមតូតឈរ ?

តើ m ត្រូវមានតំលៃប៉ុន្មាន ទើប M_1 និង M_2 នៅខាងឆ្វេងអាស៊ីមតូតឈរ ?

តើ m ត្រូវមានតំលៃប៉ុន្មាន ទើប M_1 និង M_2 នៅខាងស្តាំអាស៊ីមតូតឈរ ?

ស្រាយថា M_1 និង M_2 មិនអាចនៅសងខាងអាស៊ីមតូតឈរ

ចំលើយ

សមីការអាប់ស៊ីសរវាងខ្សែកោង (C) និងបន្ទាត់ (D) :

$$\left.\begin{array}{l}(C):\ y = \dfrac{3-x}{x}\\ (D):\ y = -x+m\end{array}\right| \Rightarrow$$ សមីការអាប់ស៊ីសរវាង (C) និង (D) គឺ

$$\frac{3-x}{x} = -x+m \Rightarrow 3-x = -x^2+mx \Leftrightarrow$$

$$x^2-mx-x+3 = 0 \Leftrightarrow x^2-(m+1)x+3 = 0$$

1)- ដើម្បីអោយ (C) និង (D) ប៉ះគ្នា លុះត្រាតែសមីការអាប់ស៊ីសមានឫសឌុប គឺ

$$\begin{array}{l}a\neq 0\\ \Delta = 0\end{array}$$ ដោយ $a = 1\neq 0 \Rightarrow$

$$\Delta = (m+1)^2-12 = (m+1)^2-(2\sqrt{3})^2 = (m+1+2\sqrt{3})(m+1-2\sqrt{3})$$

$$= (m+1+2\sqrt{3})(m+1-2\sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m_1 = -(1+2\sqrt{3})\\ m_2 = -1+2\sqrt{3}\end{array}\right.$$

ទាញរកសមីការបន្ទាត់ប៉ះ យើងត្រូវយកតំលៃ m រកឃើញទៅជំនួសក្នុងសមីការបន្ទាត់ (D) នោះយើងបានសមីការបន្ទាត់ប៉ះ

បើ $m = -(1+2\sqrt{3})$ យើងបានសមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ $y = -x-(1+2\sqrt{3})$

បើ $m = -1+2\sqrt{3}$ យើងបានសមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ $y = -x-1+2\sqrt{3}$

2)- តើ m ត្រូវមានតំលៃប៉ុន្មានទើប (C) និង (D) មានចំនុចប្រសព្វពីរ M_1 និង M_2

ដើម្បីអោយមានចំនុចប្រសព្វពីរ M_1 និង M_2 លុះត្រាតែសមីការអាប់ស៊ីសមានឫសពីរ គឺ $\begin{cases}a\neq 0\\ \Delta \geq 0\end{cases}$ តែ $a = 1\neq 0 \Rightarrow \Delta \geq 0$

$$\Delta = (m+1+2\sqrt{3})(m+1-2\sqrt{3})$$

m	$-\infty$		$-(1+2\sqrt{3})$		$-1+2\sqrt{3}$		$+\infty$
$\Delta \geq 0$		+	0	//////////	0	+	

$m\in\ ]-\infty\ ;\ -(1+2\sqrt{3})\ ]\cup[-1+2\sqrt{3};\ +\infty[$

តើ m ត្រូវមានតំលៃប៉ុន្មានទើប M_1 និង M_2 នៅតែម្ខាងនៃអាស៊ីមតូតឈរ

អាស៊ីមតូតឈរ មានសមីការ $x = 0$ បើ $M_1(x_1)$ និង $M_2(x_2)$ នៅតែម្ខាងនៃអាស៊ីមតូតឈរនោះយើងបានពីរករណី គឺ

$$\left[\begin{array}{l}x_1 \leq x_2 < 0\\ 0 < x_1 \leq x_2\end{array}\right.$$ មានន័យថា 0 នៅក្រៅឫសគឺ

$$\begin{cases}a\neq 0\\ \Delta \geq 0\\ af(0)>0\end{cases}$$ ដោយ $a = 1\neq 0$

$af(0) = f(0) = 3>0$ ដូច្នេះ បើ $\Delta \geq 0$ នោះ $af(0)>0$

$\Rightarrow$ យើងបានចំលើយ $m\in\ ]-\infty\ ;\ -(1+2\sqrt{3})]\cup[-1+2\sqrt{3};\ +\infty[$

រក m ដើម្បីអោយ M_1 និង M_2 នៅខាងឆ្វេងអាស៊ីមតូតឈរ

យើងបាន $x_1 \leq x_2<0 \Rightarrow \begin{cases}a\neq 0\\ \Delta \geq 0\\ af(0)>0\\ \dfrac{S}{2}-0<0\Leftrightarrow S<0\end{cases}$

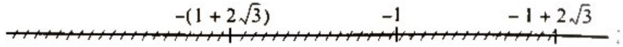
$$S = -\frac{b}{a} = m+1<0\Leftrightarrow m<-1$$

យើងបាន $m\in\ ]-\infty\ ;\ -(1+2\sqrt{3})]$

រក m ដើម្បីអោយ M_1 និង M_2 នៅខាងស្តាំអាស៊ីមតូតឈរ

យើងបាន $0 < x_1 \leqslant x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geqslant 0 \\ af(0) > 0 \\ \frac{S}{2} - 0 > 0 \Leftrightarrow S > 0 \end{cases}$

$S = -\frac{b}{a} = m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$



យើងត្រូវយក $\boxed{m \in [-1 + 2\sqrt{3}\ ;\ +\infty[}$

ស្រាយថា M_1 និង M_2 មិនអាចនៅសងខាងអាស៊ីមតូចឈរ $x = 0$

បើ M_1 និង M_2 នៅសងខាងអាស៊ីមតូតឈរ $x = 0$

នោះ $af(0) < 0$

ដោយយើងរកឃើញ $af(0) = 3 > 0$ នោះ M_1 និង M_2 មិនអាចនៅសងខាងអាស៊ីមតូតឈរទេ ។

> **សំគាល់** បើ $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$
> ជាសមីការអាប់ស៊ីស ចង់រកតំលៃប៉ារ៉ាម៉ែតអោយចំនុចប្រសព្វពីរស្ថិតនៅលើមែកសងខាង រឺ ស្ថិតនៅលើសងខាងអាស៊ីមតូតឈរ គឺយើងត្រូវរក
> $\begin{cases} a \neq 0 \\ af(\alpha) < 0 \end{cases}$ ដោយ $x = \alpha$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតឈរ

លំហាត់

គេមានអនុគមន៍ $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ មានក្រាបតំនាង (C) ។

1)- រក a , b , c និង d ដោយដឹងថា

- អនុគមន៍មានតំលៃអតិបរមាស្មើ 4 ចំពោះ $x = 1$
- អនុគមន៍មានតំលៃអប្បបរមាស្មើ 0 ចំពោះ $x = 3$

2)- សិក្សាអថេរភាពទិសដៅ និងសង់ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍នេះក្នុងតំរុយអរតូនរមេ (oxy) ចំពោះតំលៃ a , b , c , និង d ដែលរកឃើញ ។

3)- រកគ្រប់សមីការបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង (C) ដែលស្របទៅនឹងបន្ទាត់ $y - 9x = 0$

4)- ដោះស្រាយតាក្រាភិចអត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសមិការ $f(x) = t$ ដោយពិភាក្សាទៅតាមតំលៃនៃ t ។

ចំលើយ

1)- រក a, b, c និង d

អនុគមន៍ $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ជាអនុគមន៍ពហុធាដែលមានដែនកំនត់ $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

យើងបាន $y' = f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

តាមសម្មតិកម្មយើងដឹងថា

អនុគមន៍មានតំលៃអតិបរមាស្មើ 4 ចំពោះ $x = 1$ នោះយើងបាន $\begin{cases} f'(x) = 0 & (1) \\ f(1) = 4 & (2) \end{cases}$

អនុគមន៍មានតំលៃអប្បបរមាស្មើ 0 ចំពោះ $x = 3$ នោះយើងបាន $\begin{cases} f'(3) = 0 & (3) \\ f(3) = 0 & (4) \end{cases}$

(1) : $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3a + 2b + c = 0 \Leftrightarrow C = -3a - 2b$ (ក)

(2) : $f(1) = 4 \Leftrightarrow a + b + c + d = 4$ (ខ)

(3) : $f'(3) = 0 \Leftrightarrow 27a + 6b + c = 0 \Leftrightarrow C = -27a - 6b$ (គ)

(4) : $f(3) = 0 \Leftrightarrow 27a + 9b + 3c + d = 0$ (ឃ)

ផ្ទឹម (ក) និង (ខ) យើងបាន : $-3a-2b = -27a-6b \Rightarrow 4b = -24a$

$\Leftrightarrow b = -6a$

ក្នុង (ក) ជំនួស $b = -6a$ នោះយើងបាន $C = -3a+12a = 9a$

ក្នុង (ខ) ជំនួស $b = -6a$; $C = 9a$ យើងបាន

$$a-6a+9a+d = 4 \Rightarrow d = 4-4a$$

ក្នុង (ឃ) ជំនួស b, c, d, ជាអនុគមន៍នៃ a

$$27a-54a+27a+4-4a = 0 \Leftrightarrow 4-4a = 0 \Leftrightarrow a = 1$$

$$a = 1 \ ; \ b = -6a \ ; \ C = 9a = 9 \ ; \ d = 4-4a = 0$$

$$\boxed{a = 1 \ ; \ b = -6 \ ; \ C = 9 \ ; \ d = 0}$$

2)- បើ $a = 1$, $b = -6$, $c = 9$ និង $d = 0$ នោះអនុគមន៍ទៅជា

$$y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$

អនុគមន៍នេះជាអនុគមន៍ពហុធាដែលមានដែនកំណត់ $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^3 = \pm\infty$$

$$f'(x) = 3x^2-12x+9 = 3(x^2-4x+3)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2-4x+3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = 4 \\ x_2 = 3 \Rightarrow y_2 = 0 \end{array}\right.$$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

អនុគមន៍មានតំលៃអតិបរមាស្មើ 4 ចំពោះ $x = 1$ ហើយមានតំលៃអប្បបរមាស្មើ 0 ចំពោះ $x = 3$

រកកូអរដោនេនៃចំនុចរបត់ I

$$y'' = f''(x) = 6x-12 = 6(x-2)$$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow x-2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = f(2) = 2$$

អាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វរវាង (C) និង $(x'ox)$ ជាឫសនៃសមីការ $x^3-6x^2+9x = 0$

$$\Leftrightarrow x(x^2-6x+9) = 0 \Leftrightarrow x(x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array}\right.$$

អរដោនេចំនុចប្រសព្វរវាង (C) និង $(y'oy)$ គឺ $y = f(0) = 0$

ស្រាយថា I ជាផ្ចិតឆ្លុះរបស់ខ្សែកោង (C)

ក្នុងតំរុយ (IXY) យើងបានតាមរូបមន្តនៃការប្តូរតំរុយ $\begin{array}{l} x = 2+X \\ y = 2+Y \end{array}$

យើងបានអនុគមន៍ទៅជា

$$2+Y = (2+X)^3-6(2+X)^2+9(2+X)$$

$$Y = 8+12X+6X^2+X^3-24-24X-6X^2+18+9X-2$$

$$Y = f(X) = X^3-3X$$

ដោយ $f(-X) = (-X)^3-3(-X) = -X^3+3X = -(X^3-3X)$

$= -f(X) \Rightarrow f(X)$ ជាអនុគមន៍សេស $\Rightarrow$

$I(2;\ 2)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះរបស់ខ្សែកោង (C)

3)- រកគ្រប់សមីការបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង (C) ដែលស្របទៅនឹងបន្ទាត់ $y-9x = 0$

បន្ទាត់ $y-9x = 0 \Leftrightarrow y = 9x$ មានមេគុណប្រាប់ទិស 9

តាង $M(x, y) \in (C)$ ជាចំនុចដែលបន្ទាត់ប៉ះមានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើ 9

យើងបានមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង (C) ត្រង់ M គឺ

$f'(x) = 3x^2-12x+9$ ដោយមេគុណប្រាប់ទិសនេះស្មើ 9 នោះ

យើងបាន $3x^2-12x+9 = 9 \Leftrightarrow 3x^2-12x = 0 \Leftrightarrow$

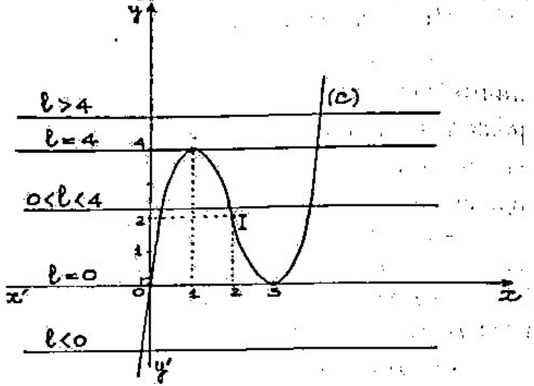
$$x^2-4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{lll} x_1 = -2 \ , \ y_1 = -50 & & M_1 \\ x_2 = 2 \ , \ y_2 = 2 & & M_2 \end{array}\right.$$

សមីការបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ $M_1(-2 \ ; \ 50)$

$$9 = \frac{y+50}{x+2} \Leftrightarrow y+50 = 9x+18 \Leftrightarrow \boxed{y = 9x-32}$$

សមីការបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ $M_2(2\;;\;2)$

$$9 = \frac{y-2}{x-2} \Leftrightarrow y-2 = 9x-18 \Leftrightarrow \boxed{y = 9x-16}$$



4)- ដោះស្រាយតាមក្រាភិចអត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការ $x^3-6x^2+9x = l$

ជាសមីការអាប់ស៊ីសរវាង (C) និងបន្ទាត់ $y = l$

ដោយពិនិត្យតាមក្រាភិច យើងបានចំលើយ

l	អត្ថិភាព និង សញ្ញាឫសសមីកា	
$-\infty$	សមីការមានឫសមួយ	$x<0$
0	សមីការមានឫសពីរ	$x_1 = 0 < x_2 = 3$
	សមីការមានឫស	$0<x_1<x_2<x_3$
4	សមីការមានឫសពីរ	$0<x_1 = 1<x_2$
$+\infty$	សមីការមានឫសមួយ	$x>0$

លំហាត់

គេអោយអនុគមន៍ $y = f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ ដែលមានក្រាបតំណាង(C) ។

1)- កំនត់រកតំលៃមេគុណ a , b , c និង d ដោយដឹងថា :

$f(x)$ ជាអនុគមន៍សេស ហើយ $f(x)$ មានតំលៃអប្បបរមាស្មើ -2 ចំពោះ $x = 1$ ។

2)- ចំពោះតំលៃ a , b , c និង d ដែលរកឃើញ ចូរសិក្សាអថេរភាពទិសដៅនិងសង់ខ្សែកោង (C) នេះក្នុងតំរុយអរតូនរម៉េ (oxy) ។ រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ផ្ចិតឆ្លុះរបស់ខ្សែកោង (C) ។

3)- តាមចំនុច $A \in (C)$ ដែល $x = 1$ គេគូសបន្ទាត់ (Δ_m) មានមេគុណប្រាប់ទិស m ។ កំនត់ m ដើម្បីអោយ (C) និង (Δ_m) មានចំនុចប្រសព្វពីរទៀត M និង N ខុសពី A ។ រកសំនុំចំនុចកណ្តាល I នៃ $[MN]$ បើ m ផ្លាស់ប្តូរតំលៃ ។

4)- ពិភាក្សាតាមក្រាភិចអត្ថិភាពនិងសញ្ញាឫសសមីការ $f(x) = K$ ដោយ K ជាប៉ារ៉ាម៉ែត ។

ចំលើយ

1)- កំនត់រកតំលៃមេគុណ a, b, c និង d

អនុគមន៍ $y = f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ ជាអនុគមន៍ពហុធាមាន $\mathcal{D} = R$

$$y' = f'(x) = 3ax^2+2bx+c$$

តាមសម្មតិកម្ម យើងមាន :

$f(x)$ ជាអនុគមន៍សេសក្នុង $\mathcal{D} = R$ មានន័យថា :

$$f(-x)+f(x) = 0 \;,\; \forall x \in \mathcal{D} = R \Leftrightarrow$$

$$-ax^3+bx^2-cx+d+ax^3+bx^2+cx+d = 0 \;,\; \forall x \in \mathcal{D} = R \Leftrightarrow$$

$$2bx^2+2d = 0 \;,\; \forall x \in \mathcal{D} = R \Leftrightarrow bx^2+d = 0 \;,\; \forall x \in \mathcal{D} = R$$

លុះត្រាតែ $\begin{cases} b = 0 \\ d = 0 \end{cases}$ នោះអនុគមន៍ទោជា $y = f(x) = ax^3+cx$

$$y' = f'(x) = 3ax^2+c$$

ដោយ $x = 1$ ធ្វើអោយអនុគមន៍មានតំលៃអប្បបរមាស្មើ -2 នោះយើងបាន

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3a + C = 0 \Leftrightarrow C = -3a \quad (1)$$

$$f(1) = -2 \Leftrightarrow a + C = -2 \Leftrightarrow C = -a - 2 \quad (2)$$

ដោយផ្ទឹម (2) និង (1) : $-3a = -a - 2 \Leftrightarrow a = 1$

$$a = 1 \ , \ b = 0 \ , \ c = -3 \ , \ d = 0$$

2)- បើ $a = 1, b = 0, c = -3, d = 0$ នោះអនុគមន៍ទៅជា

$$y = f(x) = x^3 - 3x$$

សិក្សាទិសដៅអថេរភាពនិងសង់ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍នេះក្នុងតំរុយអរតូនរម៉េ (oxy) $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

$f(x) = x^3 - 3x$ ជាអនុគមន៍សេសតាមសម្មតិកម្ម

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} x^3 = \pm\infty$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x+1)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \Rightarrow y_1 = 2 \\ x_2 = 1 \Rightarrow y_2 = -2 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

- អនុគមន៍មានតំលៃអតិបរមាស្មើ 2 ត្រង់ $x = -1$ មានតំលៃអប្បបរមាស្មើ -2 ត្រង់ $x = 1$

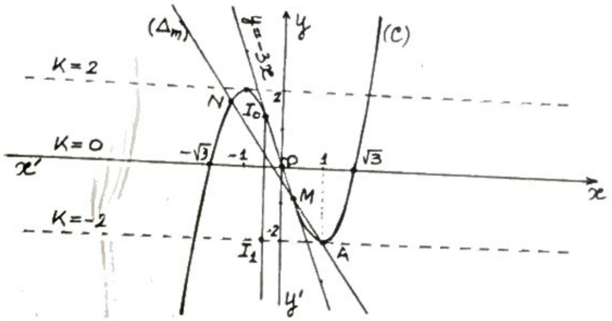
- ដោយ $f(x)$ ជាអនុគមន៍សេសនោះគល់ $O(o, o)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះ

អាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វរវាង (C) និង $(x'ox)$ ជាឫសសមីការ $x^3 - 3x = 0 \Leftrightarrow$

$$x(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow x(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\sqrt{3} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \sqrt{3} \end{cases}$$

- អរដោនេចំនុចប្រសព្វរវាង (C) និង $(y'oy)$ គឺ

$y = f(o) = 0$



រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង (C) ត្រង់ផ្ចិតឆ្លុះ $O(o, o)$

មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះគឺ $y'(0) = f'(0) = -3$

សមីការបន្ទាត់ប៉ះ $y = f'(0)(x - 0) + 0 = -3x$

$$\boxed{y = -3x}$$

3)- បើ $A \in (C)$ ដែលមានអាប់ស៊ីស $x = 1$ នោះ $y = -2$ $A(1 \ ; \ -2)$

រកសមីការនៃបន្ទាត់ (Δ_m) : $m = \frac{y+2}{x-1} \Leftrightarrow y = m(x-1) - 2$

$$(\Delta_m) \ : \ y = m(x-1) - 2$$

កំនត់ m ដើម្បីអោយ (C) និង (Δ_m) មានចំនុចប្រសព្វ M និង N ខុសពី A

សមីការអាប់ស៊ីសរវាង (C) និង (Δ_m)

$$x^3 - 3x = m(x-1) - 2 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 - m(x-1) = 0$$

តាង $A(x) = x^3 - 3x + 2$ ដោយ $A(1) = 1 - 3 + 2 = 0$ នោះយើងបាន

$x = 1$ ជាឫសមួយនៃ $A(x)$ ហើយ $A(x)$ ចែកដាច់នឹង $x - 1$

$$
\begin{array}{rrr|l}
x^3 & -3x & +2 & x-1 \\
\hline
-x^3 +x^2 & & & x^2+x-2 \\
\hline
x^2 & -3x & +2 & \\
-x^2 & +x & & \\
\hline
 & -2x & +2 & \\
 & +2x & -2 & \\
\hline
 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

ដូច្នេះ $A(x) = x^3-3x+2 = (x-1)(x^2+x-2)$

យើងបានសមីការអាប់ស៊ីសរវាង (C) និង (Δ_m) គឺ

$$(x-1)(x^2+x-2)-m(x-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)(x^2+x-2-m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2+x-2-m = 0 \quad (1) \end{array}\right.$$

ដើម្បីអោយមាន M និង N លុះត្រាតែសមីការ (1) មានឫស

$$\Delta = 1-4(-2-m) = 1+8+4m = 4m+9 \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$m \geqslant -\frac{9}{4}$$

ដើម្បីអោយ M និង N ខុសពី A លុះត្រាតែអាប់ស៊ីសរបស់ M និង N ខុសពី 1 មានន័យថា $x = 1$ មិនមែនជាឫសនៃសមីការ (1)

$$1+1-2-m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$$

ដូច្នេះ ជាសរុប យើងត្រូវយក $\left\{\begin{array}{l} m \geqslant -\frac{9}{4} \\ m \neq 0 \end{array}\right.$

រកសំនុំចំនុចកណ្ដាល I នៃ $[MN]$ តាង $I(x, y)$

យើងបាន $x = \frac{x_M + x_N}{2} = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2}$ ថេរ

$$y = m\left(-\frac{1}{2}-1\right)-2 = -\frac{3}{2}m-2 \text{ អថេរ}$$

ដូច្នេះ I ដើរលើបន្ទាត់ $x = -\frac{1}{2}$ ស្រប $(y'oy)$

ដែនដែល I ដើរបាន

$$m \geqslant -\frac{9}{4} \Rightarrow -\frac{3}{2}m \leqslant \left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{9}{4}\right) = \frac{27}{8} \Rightarrow -\frac{3}{2}m-2 \leqslant \frac{27}{8}-2$$

$$\Rightarrow y \leqslant \frac{11}{8} \quad ; \quad I_o\left(-\frac{1}{2} ; \frac{11}{8}\right)$$

$$m \neq 0 \Rightarrow -\frac{3}{2}m \neq 0 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}m-2 \neq -2; \; I_1\left(-\frac{1}{2}; -2\right)$$

ដូច្នេះ $I \in \left[I_0Z'\right) \setminus \{I_1\} \; ; \; I_0\left(-\frac{1}{2}; \frac{11}{8}\right), \; I_1\left(-\frac{1}{2}; -2\right)$

4)- ពិភាក្សាក្រាភិចអត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការ $f(x) = K$

$f(x) = K \Leftrightarrow x^3-3x = K$ ជាសមីការអាប់ស៊ីសរវាងខ្សែកោង (C) និង បន្ទាត់ $y = K$ ស្រប $(x'ox)$ តាមក្រាភិច យើងបាន

K	អត្ថិភាពឫសសមីកា	
$-\infty$	សមីការមានឫសមួយ	$x < 0$
-2	សមីការមានឫសពីរ	$x_1 < 0 < x_2 = 1$
	សមីការមានឫសបី	$x_1 < 0 < x_2 < x_3$
0	សមីការមានឫសបី	$x_1 = -\sqrt{3} < x_2 = 0 < x_3 = \sqrt{3}$
	សមីការមានឫសបី	$x_1 < x_2 < 0 < x_3$
2	សមីការមានឫសពីរ	$x_1 = -1 < 0 < x_2$
$+\infty$	សមីការមានឫសមួយ	$x > 0$

លំហាត់

គេអោយអនុគមន៍ $y = f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ ដែលមានក្រាបតាង (C)

1)- រក a, b, c និង d ដោយដឹងថា :

$f(x)$ ជាអនុគមន៍សេស

$f(x)$ មានតំលៃអតិបរមាស្មើ $\frac{2}{3}$ ត្រង់ $x=-1$

2)- សិក្សាទិសដៅ និងសង់ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍នេះក្នុងតំរុយអរតូនមេ (oxy) ។

3)- រកក្រប់សមីការបន្ទាត់ដែលប៉ះខ្សែកោង (C) ហើយស្របទៅនឹងបន្ទាត់ $y-3x=0$

4)- ពិភាក្សាតាមក្រាភិចអត្ថិភាព និងសញ្ញាឬសសមីការ $x^3-3x-3m=0$ ទៅតាមតំលៃនៃប៉ារ៉ាម៉ែត m ។

ចំលើយ

អនុគមន៍ $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ជាអនុគមន៍ពហុធាមានដែនកំនត់ $\mathcal{D}=\mathbb{R}$

មានដេរីវេ $y'=f'(x)=3ax^2+2bx+c$

1)- រក a, b, c និង d ដោយដឹងថា

$f(x)$ ជាអនុគមន៍សេសក្នុង $\mathcal{D}=\mathbb{R}$ នោះយើងបាន

$$f(-x)+f(x)=0,\ \forall x\in \mathcal{D}=\mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$-ax^3+bx^2-cx+d+ax^3+bx^2+cx+d=0\ ,\ \forall x\in\mathcal{D}=\mathbb{R}$$

$$2bx^2+2d=0\ ,\ \forall x\in\mathcal{D}=\mathbb{R} \Leftrightarrow bx^2+d=0\ ,\ \forall x\in\mathcal{D}=\mathbb{R}$$

យើងអាចទាញបាន $\begin{cases} b=0 \\ d=0 \end{cases}$

ដោយ $b=d=0$ នោះយើងបាន $f(x)=ax^3+cx$

$$f'(x)=3ax^2+c$$

ដោយ $f(x)$ មានតំលៃអតិបរមាស្មើ $\frac{2}{3}$ ត្រង់ $x=-1$ នោះយើងបាន :

$$f'(-1)=0 \Leftrightarrow 3a+c=0 \Leftrightarrow c=-3a \quad (1)$$

$$f(-1)=\frac{2}{3} \Leftrightarrow -a-c=\frac{2}{3} \Leftrightarrow c=a-\frac{2}{3} \quad (2)$$

តាមផ្ទឹម (2) និង (1) យើងអាចទាញបាន $-a-\frac{2}{3}=-3a$

$$\Leftrightarrow -3a-2=-9a \Leftrightarrow 6a=2 \Leftrightarrow a=\frac{1}{3}$$

$$a=\frac{1}{3} \Rightarrow c=-3a=-3\left(\frac{1}{3}\right)=-1$$

ដូច្នេះ យើងបាន $\boxed{a=\frac{1}{3}\ ;\ b=0;\ c=-1\ ;\ d=0}$

2)- អនុគមន៍ដែលត្រូវរកទៅជា $y=f(x)=\frac{x^3}{3}-x$

- អនុគមន៍នេះមានដែនកំនត់ $\mathcal{D}=\mathbb{R}$
- អនុគមន៍នេះជាអនុគមន៍សេស (សម្មតិកម្ម); $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{3}=\pm\infty$

$$y'=f'(x)=x^2-1=(x+1)(x-1)$$

$$y'=0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\ ;\ y=\frac{2}{3} \\ x=1\ ;\ y=-\frac{2}{3} \end{array}\right.$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{2}{3}$	↘	$-\frac{2}{3}$	↗	$+\infty$

អនុគមន៍មានតំលៃអតិបរមា $\frac{2}{3}$ ត្រង់ $x=-1$ ហើយមានតំលៃអប្បបរមាស្មើ $-\frac{2}{3}$ ត្រង់ $x=1$ ។

ដោយអនុគមន៍នេះជាអនុគមន៍សេសយើងមានគល់ O ជាចំនុចរបត់ និងជាផ្ចិតឆ្លុះ

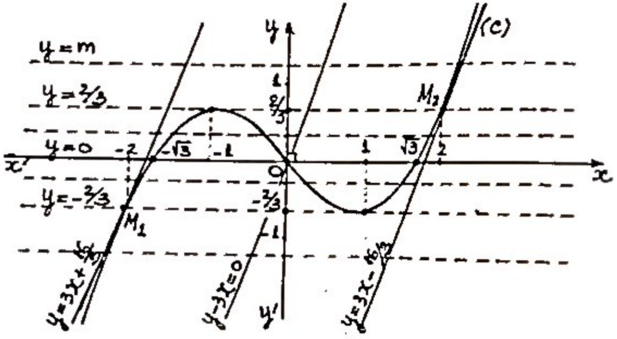
អាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វរវាង (C) និង $(x'ox)$ ជាឫសនៃសមីការ

$$\frac{x^3}{3}-x=0 \Leftrightarrow x^3-3x=0 \Leftrightarrow x(x^2-3)=0$$

$$\Leftrightarrow x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\sqrt{3} \\ x=0 \\ x=\sqrt{3} \end{array}\right.$$

ខ្សែកោង (C) កាត់ $(x'ox)$ បានបីចំនុចអាប់ស៊ីសរៀង $-\sqrt{3}\ ;\ 0\ ;\ \sqrt{3}$

ខ្សែកោង (C) កាត់ $(y'oy)$ ត្រង់ចំនុចអរដោនេ $y=f(0)=0$



3)- រកគ្រប់សមីការបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង (C) ដែលស្របបន្ទាត់ $y-3x=0$

បន្ទាត់ $y-3x=0 \Leftrightarrow y=3x$, មានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើ 3

តាង $M(x\ ,\ y)\in(C)$ ចំនុចដែលមានបន្ទាត់ប៉ះស្របបន្ទាត់ $y=3x$ ដូច្នេះ

មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង (C) ត្រង់ M គឺ $f'(x)=x^2-1=3 \Leftrightarrow$

$$x^2=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-2\ ,\ y_1=-\frac{2}{3} \\ x_2=2\ ,\ y_2=\frac{2}{3} \end{array}\right.$$

យើងមានចំនុច M ពីរ គឺ $M_1\left(-2\ ;\ -\frac{2}{3}\right)$ និង $M_2\left(2\ ;\ \frac{2}{3}\right)$

សមីការបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ $M_1\left(-2\ ;\ -\frac{2}{3}\right)$ $\quad 3=\frac{y+\frac{2}{3}}{x+2} \Leftrightarrow$

$$y=3x+6-\frac{2}{3}=3x+\frac{16}{3} \qquad y=3x+\frac{16}{3}$$

សមីការបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ $M_2\left(2\ ;\ \frac{2}{3}\right)$ $\quad 3=\frac{y-\frac{2}{3}}{x-2} \Leftrightarrow$

$$y=3x-6+\frac{2}{3}=3x-\frac{16}{3} \qquad y=3x-\frac{16}{3}$$

ដូច្នេះយើងបានសមីការបន្ទាត់ប៉ះមានពីរស្របបន្ទាត់ $y-3x=0$ គឺ

$$\boxed{y=3x+\frac{16}{3} \quad \text{និង} \quad y=3x-\frac{16}{3}}$$

4)- ពិភាក្សាតាមក្រាភិចអត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីកា $x^3-3x-3m=0$

$x^3-3x=3m \Leftrightarrow \frac{x^3}{3}-x=m$ ជាសមីការអាប់ស៊ីសរវាងខ្សែកោង (C)

និងបន្ទាត់ $y=m$ ស្រប $(x'ox)$

m	អត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការ
$-\infty$	សមីការមានឫសមួយ $x<0$
$-\frac{2}{3}$	សមីការមានឫសពីរ $x_1<0<x_2=1$
	សមីការមានឫសបី $x_1<0<x_2<x_3$
0	សមីការមានឫសបី $x_1=-\sqrt{3}<x_2=0<x_3=\sqrt{3}$
	សមីការមានឫសបី $x_1<x_2<0<x_3$
$\frac{2}{3}$	សមីការមានឫសពីរ $x_1=-1<0<x_2$
$+\infty$	សមីការមានឫសមួយ $x>0$

លំហាត់

អោយអនុគមន៍ $y = f(x) = x^3 - ax^2 + 2$ មានក្រាបតំនាង (C)

1)- គណនា a ដើម្បីអោយក្រាប (C) ប៉ះបន្ទាត់ $y = -2$ ។

ចំពោះតំលៃ a រកឃើញសិក្សាទិសដៅនិងសង់ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍នេះក្នុងតំរុយអ័រតូនរម៉េ (oxy) ។ រួចស្រាយថាខ្សែកោង (C) មានផ្ចិតឆ្លុះមួយ ។

2)- A ជាចំនុចប៉ះរវាងខ្សែកោង (C) និងបន្ទាត់ $y = -2$ ។ តាម A គេគូសបន្ទាត់អថេរមានមេគុណប្រាប់ទិស m តាង (D_m) បន្ទាត់នោះកំនត់ m ដើម្បីអោយ (C) និង (D_m) មានចំនុចប្រសព្វពីរទៀត M និង N ខុសពី A ។ រួចរកសំនុំចំនុចកណ្តាលនៃ $[MN]$ កាលណា m ផ្លាស់ប្តូរតំលៃ

3)- ពិភាក្សាតាមក្រាភិចអត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការតាមតំលៃ K

$$x^3 - 3x^2 + 2 - K = 0$$

ចំលើយ

អនុគមន៍ $y = f(x) = x^3 - ax^2 + 2$ ជាអនុគមន៍ពហុធាមានដែនកំនត់ $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

មាន $y' = f'(x) = 3x^2 - 2ax = x(3x - 2a)$

1)- គណនាមេគុណ a ដើម្បីអោយខ្សែកោង (C) ប៉ះបន្ទាត់ $y = -2$

វិភាគ : តើបន្ទាត់ $y = -2$ ជាបន្ទាត់មានទីតាំងយ៉ាងដូចម្តេច ?

- បន្ទាត់ $y = -2$ មានទីតាំងស្រប $(x'ox)$ រឺទីតាំងជាបន្ទាត់ដេក
- បើខ្សែកោង (C) ប៉ះបន្ទាត់ $y = -2$ ត្រង់ចំនុច A នោះ A ជាចំនុចអ្វីចំពោះខ្សែកោង (C) ?
- ចំនុច A ហៅថាកំពូលរបស់ខ្សែកោង (C) ។ គេរំលឹកថាអាប់ស៊ីសកំពូលខ្សែកោង (C) ។ អាប់ស៊ីសកំពូលខ្សែកោង (C) ជាឫសដេរីវេទី 1 គឺឫសនៃ

$f'(x) = x(3x - 2a)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(3x - 2a) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{2a}{3} \end{array}\right.$

ដោយចំនុចប៉ះ A ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ $y = -2$ នោះបញ្ជាក់ថាអរដោនេរបស់ A ស្មើ -2 ។

បើ $x = 0$ នោះយើងបាន $y = f(0) = 2 \neq -2$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់

ដូច្នេះ $x = \frac{2a}{3} \Rightarrow f\left(\frac{2a}{3}\right) = \frac{8a^3}{27} - \frac{4a^3}{9} + 2 = -2$ ពិត

$$\frac{8a^3}{27} - \frac{4a^3}{9} = -4 \Leftrightarrow -4a^3 = -4 \times 27 \Leftrightarrow$$

$a^3 = 27 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{27} = 3$ ដូច្នេះយើងបាន

$a = 3$ ជាចំលើយ

បើ $a = 3$ ជាអនុគមន៍ទៅជា $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

ទិសដៅអថេរភាព $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} x^3 = \pm\infty$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 2 \\ x = 2 \Rightarrow y_2 = -2 \end{array}\right.$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

អនុគមន៍មានតំលៃអតិបរមាស្មើ 2 ត្រង់ $x = 0$ ហើយមានតំលៃអប្បបរមាស្មើ -2 ត្រង់ $x = 2$

រកកូអរដោនេនៃចំនុចរបត់ I អាប់ស៊ីសរបស់ I ជាឫសនៃ $f''(x) = 6x - 6$

$$6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = f(1) = 0$$

អាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វរវាង (C) និង (x'ox) ជាឫសនៃ $x^3-3x^2+2=0$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2-2x-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x^2-2x-2=0\end{array}\right.$$

$x^2-2x-2=0$ មាន $\Delta'=1+2=3$ ដូច្នេះសមីការនេះមាន

ឫសពីរ $x=1-\sqrt{3}$, $x=1+\sqrt{3}$ ខ្សែកោង (C) កាត់ (x'ox)

បានបីចំនុច មានអាប់ស៊ីស $1-\sqrt{3}$; 1 ; $1+\sqrt{3}$

(C) កាត់ (y'oy) ត្រង់ចំនុចអរដោនេ $y=f(o)=2$

ស្រាយថា $I(1\ ;\ 0)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះរបស់ (C)

ក្នុងតំរុយ (IXY) យើងបានតាមរូបមន្តប្តូរតំរុយ

$x=1+X$

$y=0+Y=Y$

តាមរូបមន្ត $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

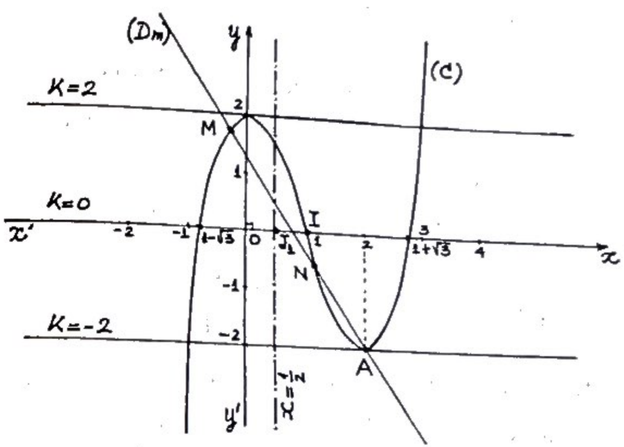
យើងបានអនុគមន៍ទៅជា $Y=(1+X)^3-3(1+X)^2+2$

$$=1+3X+3X^2+X^3-3-6X-3X^2+2=X^3-3X$$

ដូច្នេះ $Y=f(X)=X^3-3X$ ជាសមីការបង្រួមនៃ (C) ។

ដោយ $f(-X)=(-X)^3-3(-X)=-X^3+3X=-(X^3-3X)=-f(X)$

នោះ $f(X)$ ជាអនុគមន៍សេស $\Rightarrow I(1\ ;\ 0)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះរបស់ (C) ។



2). សមីការបន្ទាត់ (D_m) : $m=\frac{y+2}{x-2} \Leftrightarrow y=m(x-2)-2$

សមីការអាប់ស៊ីសរវាង (C) $y=x^3-3x^2+2$ និង (D_m) : $y=m(x-2)-2$

$x^3-3x^2+4-m(x-2)=0$

តាង $p(x)=x^3-3x^2+4$ យើងមាន $p(-1)=-1-3+4=0$

នោះ $x=-1$ ជាឫសនៃ $p(x)$ ហើយ $p(x)$ ចែកដាច់នឹង $x+1$

ដោយចែក $p(x)$ នឹង $x+1$ នោះយើងបាន

$p(x)=(x+1)(x-2)^2$

សមីការអាប់ស៊ីសទៅជា : $(x+1)(x-2)^2-m(x-2)=0 \Leftrightarrow$

$(x-2)[(x+1)(x-2)-m]=0$

$(x-2)(x^2-x-2-m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}x=2 & \text{អាប់ស៊ីសរបស់ A}\\ x^2-x-2-m=0 & (1)\end{array}\right.$

ដើម្បីអោយមានចំនុចប្រសព្វ M និង N លុះត្រាតែសមីការ (1) មានឫសពីរ

$$\Delta = 1-4(-2-m) = 1+8+4m = 4m+9 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{9}{4}$$

ដោយ M និង N ខុសពី A នោះ $x = 2$ មិនមែនជាឫសនៃ (1)

$$4-2-2-m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$$

ដូច្នេះ យើងត្រូវយក $\begin{cases} m \geq -\frac{9}{4} \\ m \neq 0 \end{cases}$

រកសំនុំចំនុចកណ្តាលនៃ $[MN]$ តាងដោយ $J(x\ ,\ y)$ កាលណា m ផ្លាស់ប្តូរតំលៃ

យើងបាន : $x = \frac{x_M + x_N}{2} = -\frac{b}{2a}m = \frac{1}{2}$ ថេរ

$$y = m\left(\frac{1}{2}-2\right) = -\frac{3}{2}m \quad \text{អថេរ}$$

ដូច្នេះ J ដើរលើបន្ទាត់ $x = \frac{1}{2}$ ស្រប $(y'oy)$ ដើម្បីអោយមាន J លុះត្រាតែមាន M និង N ដើម្បីអោយមាន M និង N លុះត្រាតែ

$$m \geq -\frac{9}{4} \Rightarrow y = -\frac{3}{2}m \leq -\frac{3}{2}\left(-\frac{9}{4}\right) = \frac{27}{8}$$

យក $J_o\left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{27}{8}\right)$

$$m \neq 0 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}m \neq 0$$

យក $J_1\left(\frac{1}{2}\ ;\ 0\right)$

ដូច្នេះ $\boxed{J \in [JZ') \setminus \{J_1\} \text{ សមីការ } x = \frac{1}{2}}$

3)- ពិភាក្សាតាមក្រាភិចអត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការ

សមីការនេះអាចសរសេរ $x^3-3x^2+2 = K$ ជាសមីការអាប់ស៊ីសរវាងខ្សែកោង (C) និងបន្ទាត់ $y = K$ ស្រប $(x'ox)$ ។

K	អត្ថិភាពនិងសញ្ញាឫសសមីការ
$-\infty$	
	សមីការមានឫសតែមួយ $x<0$
-2	សមីការមានឫសពីរ $x_1<0<x_2=2$
	សមីការមានឫសបី $x_1<0<x_2<x_3$
2	សមីការមានឫសពីរ $x_1=0<x_2$
	សមីការមានឫសមួយ $x>0$
$+\infty$	

លំហាត់

អោយអនុគមន៍ $y = f(x) = (x-m)^3-3x+2$

1)- កំនត់ m ដើម្បីអោយអនុគមន៍នេះ

ក)- កើនក្នុងចន្លោះ $[1\ ;\ +\infty[$

ខ)- កើនក្នុងចន្លោះ $]-\infty\ ;\ 3]$

2)- ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\forall m \in R$ អនុគមន៍នេះមានតំលៃអតិបរមាមួយ និងអប្បបរមាមួយជានិច្ច ។

3)- សិក្សាទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍នេះ បើ $m = 0$ រួចសង់ខ្សែកោងតំនាង (C) ក្នុងតំរុយអរតូនរមេ (oxy)

4)- ដោះស្រាយតាមក្រាភិចអត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការ $x^3-3x+2-n = 0$

ចំលើយ

1)- កំនត់ m ដើម្បីអោយអនុគមន៍នេះកើន

អនុគមន៍ $y = f(x) = (x-m)^3-3x+2$ ជាអនុគមន៍ពហុធាមានដែនកំនត់ $\mathcal{D} = R$

$$y' = f'(x) = 3(x-m)^2-3 = 3[(x-m)^2-1] = 3(x-m+1)(x-m-1)$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = m-1 \\ x_2 = m+1 \end{cases}$$ ដោយ $m-1 < m+1 \ , \forall m \in R$

x	$-\infty$		$m-1$		$m+1$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(m-1)$	$\searrow$	$f(m+1)$	$\nearrow$	$+\infty$

ក)- ក្នុងចន្លោះ $[1; +\infty[$

លុះត្រាតែ $[1; +\infty[\subset [m+1; +\infty[$ មានន័យថា

$m+1 \leqslant 1 \Leftrightarrow m \leqslant 0 \Leftrightarrow \boxed{m \in \ ]-\infty \ ; 0]}$

ខ)- ក្នុងចន្លោះ $]-\infty; 3]$

លុះត្រាតែ $]-\infty \ , 3] \subset \ ]-\infty; m-1]$ មានន័យថា

$3 \leqslant m-1 (\Leftrightarrow) \ m \geqslant 4 \Leftrightarrow \boxed{m \in [4; +\infty[}$

2) ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\forall m \in R$ អនុគមន៍មានតំលៃអតិបរមានិងអប្បបរមាជានិច្ច

យើងស្រាយថា $\forall m \in R \ : f'(x)$ មានរឹសពីរផ្សេងគ្នាជានិច្ច

$$f'(x) = 3(x-m+1)(x-m-1)$$

តាមសំរាយខាងលើ $\forall m \in R \ : f'(x)$ មានរឹសពីរផ្សេងគ្នាជានិច្ច

$x = m-1$ និង $x = m+1$

ដូច្នេះ អនុគមន៍នេះមានតំលៃអតិបរមាមួយ និងអប្បបរមាមួយជានិច្ច ចំពោះ $\forall m \in R$

3) បើ $m = 0$ អនុគមន៍ទៅជា $y = x^3 - 3x + 2$

អនុគមន៍នោះមានដែនកំណត់ $\mathcal{D} = R$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} x^3 = \pm\infty$$

$$y' = f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2-1) = 3(x-1)(x+1)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \Rightarrow y_2 = 4 \\ x_2 = 1 \Rightarrow y_2 = 0 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

អនុគមន៍មានតំលៃអតិបរមាស្មើ 4 ចំពោះ $x = -1$ ហើយមានតំលៃអប្បបរមាស្មើ 0 ចំពោះ $x = 1$

រកកូអរដោនេនៃចំនុចរបត់ I

យើងដឹងថាអាប់ស៊ីសនៃចំនុចរបត់ជាឫសនៃ $y'' = f''(x) = 6x$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = 2$$

ដូច្នេះ $I \ (0 \ ; 2)$

អាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វខ្សែកោង (C) និង $(x'ox)$ ជាឫសនៃ $x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$$(x-1)^2(x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

អរដោនេចំនុចប្រសព្វខ្សែកោង (C) និង $(y'oy)$ គឺ $y = f(0) = 2$

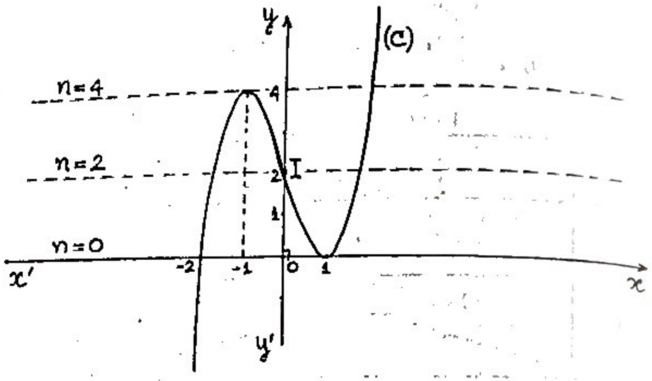
ស្រាយថា $I \ (0 \ ; 2)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះរបស់ខ្សែកោង (C)

ក្នុងតំរុយអរតូនរម៉េ (IXY) យើងបានតាមរូបមន្តប្តូរតំរុយ $\begin{cases} x = 0 + X = X \\ y = 2 + Y \end{cases}$

នោះអនុគមន៍ទៅជា $2 + Y = X^3 - 3X + 2 \Leftrightarrow Y = X^3 - 3X$

$$f(-X) = (-X)^3 - 3(-X) = -X^3 + 3X = -(X^3 - 3X) = -f(X)$$

$\Rightarrow f(X) = X^3 - 3X$ ជាអនុគមន៍សេស $\Rightarrow I(0 \ ; 2)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះរបស់ខ្សែកោង (C) ។



4)- ដោះស្រាយតាមក្រាភិចអត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការ $x^3-3x+2-n=0$

សមីការនេះអាចសរសេរ $x^3-3x+2=n$ ជាសមីការអាប់ស៊ីសរវាងខ្សែកោង (C) និងបន្ទាត់ $y=n$ ស្រប $(x'ox)$ តាមក្រាភិចយើងបានចំលើយក្នុងតារាងខាងក្រោមនេះ

n	អត្ថិភាពនិងសញ្ញាឫសសមីការ
$-\infty$	សមីការមានឫសមួយ $x<0$
0	សមីការមានឫសពីរ $x_1=-2<0<x_2=1$
	សមីការមានឫសបី $x_1<0<x_2<x_3$
2	សមីការមានឫសបី $x_1<x_2=0<x_3$
	សមីការមានឫសបី $x_1<x_2<0<x_3$
4	សមីការមានឫសពីរ $x_1=-1<0<x_2$
$+\infty$	សមីការមានឫសមួយ $x>0$

លំហាត់

អោយអនុគមន៍ $y=f(x)=x^3-1-m(x-1)$ ដែលមានខ្សែកោងតំនាង (C_m) ។

1)- កំនត់ m ដើម្បីអោយខ្សែកោង (C_m) ប៉ះអ័ក្ស $(x'ox)$ ។

2)- ចំពោះ m = 3 ចូរសិក្សាទិសដៅអថេរភាព និងសង់ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍នេះក្នុងតំរុយអរតូនរមេ (oxy) ដោយរកសមីការបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ផ្ចិតឆ្លុះ I ។

3)- ដោយប្រើខ្សែកោង ដោះស្រាយវិសមីការ $x^3-3x+2 \geq x+2$

4)- ដោះស្រាយអត្ថិភាព និងសញ្ញាវិសសមីការ $x^3-3x+2-K=0$ ដោយពិភាក្សាទៅតាមតំលៃនៃប៉ារ៉ាម៉ែត K ។

ចំលើយ

1)- កំនត់ m ដើម្បីអោយខ្សែកោង (C_m) ប៉ះអ័ក្ស $(x'ox)$

ដើម្បីអោយខ្សែកោង $(C_m): y=f(x)=x^3-1-m(x-1)=$ $(x-1)^2(x^2+x+1)-m(x-1)$

ប៉ះ $(x'ox)$ លុះត្រាតែសមីការ $y=f(x)=0$ មានឫសឌុប

$(x-1)(x^2+x+1-m)=0$ មានឫសឌុប

$$(x-1)(x^2+x+1-m)=0 \quad (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x^2+x+1-m=0 \quad (2) \end{cases}$$

បើសមីការ (2) មានឫស $x=1$ ដែរ មានន័យ $x=1$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ (2) គឺ $1+1+1-m=0 \Leftrightarrow 3-m=0 \Leftrightarrow m=3$ នោះ $x=1$ ជាឫសឌុបនៃ (1) មានន័យថាខ្សែកោង (C_m) ប៉ះ $(x'ox)$ ត្រង់ $x=1$

បើសមីការ (2) មានឫសឌុបគឺ $\Delta=1-4(1-m)=1-4+4m=$ $4m-3=0 \Leftrightarrow m=\frac{3}{4} \Leftrightarrow x_1=x_2=-\frac{1}{2}$ នោះ (C_m) ប៉ះ $(x'ox)$ ត្រង់ $x=-\frac{1}{2}$

ដូច្នេះ យើងបាន

បើ $m=3$	(C_m) ប៉ះ $(x'ox)$ ត្រង់ $x=1$
$m=\frac{3}{4}$	(C_m) ប៉ះ $(x'ox)$ ត្រង់ $x=-\frac{1}{2}$

2)- បើ $m = 3$ អនុគមន៍អោយទៅជា $y = f(x) = x^3 - 1 - 3(x-1) = x^3 - 3x + 2$

$$y = f(x) = x^3 - 3x + 2$$

ទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ អនុគមន៍មានដែនកំនត់ $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} x^3 = \pm\infty$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x+1)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \Rightarrow y = f(-1) = 4 \\ x_2 = 1 \Rightarrow y = f(1) = 0 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

អនុគមន៍មានតំលៃអតិបរមាស្មើ 4 ត្រង់ $x = -1$ ហើយមានតំលៃអប្បបរមាស្មើ 0 ត្រង់ $x = 1$

ចំនុចរបត់ អាប់ស៊ីសចំនុចរបត់ជាឫសនៃ $y'' = f''(x)$

$y'' = f''(x) = 6x$, $y'' = 0 \Leftrightarrow 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = f(0) = 2$

យើងបាន $I(0\,;\,2)$ ជាចំនុចរបត់

អាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វរវាង (C) និង $(x'ox)$ ជាឫសនៃសមីការ

$$x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 = 1 \\ x_3 = -2 \end{cases}$$

យើងបាន (C) ប៉ះ $(x'ox)$ ត្រង់ $x = 1$ ហើយកាត់ត្រង់ $x = -2$

អរដោនេចំនុចប្រសព្វរវាង (C) និង $(y'oy)$ គឺ $y = f(0) = 2$

ស្រាយថា $I(0\,;\,2)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះរបស់ខ្សែកោង (C)

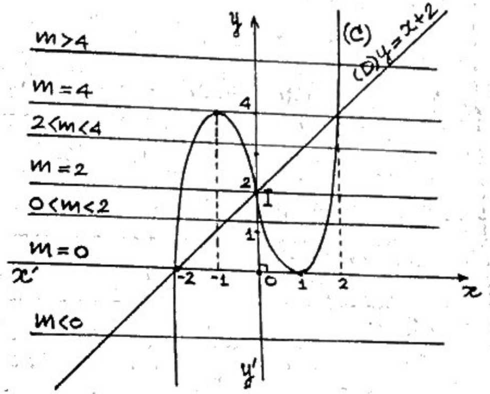
ក្នុងតំរុយ (IXY) យើងបានតាមរូបមន្តនៃការដូរតំរុយ $x = 0 + X = X$, $y = 2 + Y$

នោះសមីការរបស់ខ្សែកោង (C) ទៅជា $2 + Y = X^3 - 3X + 2 \Leftrightarrow$

$$Y = f(X) = X^3 - 3X$$

ដោយ $f(-X) = (-X)^3 - 3(-X) = -X^3 + 3X = -(X^3 - 3X) = -f(X)$

នោះ $f(x)$ ជាអនុគមន៍សេសដែលតំរុយអោយ $I(0,2)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះរបស់ខ្សែកោង (C) ។



3)- ដោយប្រើខ្សែកោង (C) ដោះស្រាយវិសមីការ $x^3 - 3x + 2 \geq x + 2$

$y = x^3 - 3x + 2$ ជាសមីការរបស់ខ្សែកោង (C)

$y = x + 2$ ជាសមីការបន្ទាត់ (D) កាត់តាម

x	-2	0	2
y	0	2	4

ដោះស្រាយវិសមីការ $x^3 - 3x + 2 \geq x + 2$ គឺជ្រើសរើសរកតំលៃ X ដែលធ្វើអោយ (C) នៅលើ (D) ។ ដោយពិនិត្យតាមក្រាភិច យើងត្រូវយក

$$x \in [-2;\ 0] \cup [2;\ +\infty[$$

4). ដោះស្រាយអត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការ $x^3-3x+2-K=0$

សមីការនេះអាចសរសេរ $x^3-3x+2=K$ ជាសមីការអាប់ស៊ីសរវាងខ្សែកោង (C) និងបន្ទាត់ $y=K$ ស្រប $(x'ox)$ ។

ដោយពិនិត្យតាមក្រាភិចនោះយើងបានចំលើយក្នុងតារាងខាងក្រោមនេះ

m	អត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការ
$-\infty$	សមីការមានឫសមួយ $x<0$
0	សមីការមានឫសពីរ $x_1=-2<0<x_2=1$
	សមីការមានឫសបី $x_1<0<x_2<x_3$
2	សមីការមានឫសបី $x_1<x_2=0<x_3$
	សមីការមានឫសបី $x_1<x_2<0<x_3$
4	សមីការមានឫសពីរ $x_1=-1<0<x_2$
$+\infty$	សមីការមានឫសមួយ $x>0$

លំហាត់

អោយខ្សែកោង (C_λ) សមីការ $y=f(x)=x^3-3x^2\sin2\lambda+2$

ដែល $\lambda\in[0\ ,\ 2\pi]$ រឺ $(0\leqslant\lambda\leqslant2\pi)$ ។

កំណត់ λ ដើម្បីអោយខ្សែកោង (C_λ) ប៉ះទៅនឹងបន្ទាត់ $y=-2$

ចំលើយ

យើងមិនអាចប្រើសមីការអាប់ស៊ីសរវាង (C_λ) និងបន្ទាត់ $y=-2$ បានទេព្រោះសមីការអាប់ស៊ីសជាសមីការដឺក្រេទី 3 មានជាប់ប៉ារ៉ាម៉ែត $\sin2\lambda$ ដូច្នេះយើងត្រូវប្រើគំនិតវិភាគ ។ តើត្រូវវិភាគលើអ្វីខ្លះ ? គឺវិភាគដូចតទៅនេះ ៖

ក). តើបន្ទាត់ $y=-2$ មានទីតាំងយ៉ាងដូចម្តេច ?

ចំលើយ : បន្ទាត់ $y=-2$ ជាបន្ទាត់ស្រប $(x'ox)$ រឺជាបន្ទាត់ដេក

- បើខ្សែកោង (C_λ) ប៉ះបន្ទាត់ $y=-2$ ដែលជាបន្ទាត់ស្រប $(x'ox)$ នោះចំនុចប៉ះតាងដោយ S តាងអ្វីចំពោះខ្សែកោង (C_λ) ?

ចំលើយ : ចំនុចប៉ះ S ជាកំពូលរបស់ខ្សែកោង (C_λ)

- តើអាប់ស៊ីសនៃកំពូល S គឺជាអ្វី រឺ អ្វីទៅដែលជាអាប់ស៊ីសនៃកំពូលរបស់ខ្សែកោង (C_λ) ?

ចំលើយ : អាប់ស៊ីសនៃកំពូល S ជាឫសនៃដេរីវេទី 1 ។ តាងដោយ $f'(x)$

យើងរក $f'(x)=3x^2-6x\ \sin2\lambda=3x(x-2\sin2\lambda)$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=0 \\ x_2=2\sin2\lambda \end{array}\right.$$

អរដោនេរបស់ S បានដោយយកតំលៃឫសនៃ $f'(x)$ ទៅជំនួសក្នុង $f(x)$ ហើយអនុគមន៍ $f(x)$ ត្រូវមានតំលៃស្មើ -2 (C_λ) ប៉ះបន្ទាត់ $y=-2$

តាមតក្កវិទ្យា យើងដឹងថាបើសំណើ (PVQ) ពិត និង P ជាសំណើមិនពិត នោះគឺត្រូវអោយសំណើ Q ជាសំណើពិតដាច់ខាត ។

$f(0)=2\neq-2$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់ (ជាសំណើ P មិនពិត) ដូច្នេះ

• $f(2\sin2\lambda)=-2$ (ជាសំណើ Q ពិតដាច់ខាត) ហេតុនេះ យើងបាន

$8\sin^3 2\lambda-12\sin^3 2\lambda+2=-2 \Leftrightarrow -4\sin^3 2\lambda=-4 \Leftrightarrow$

$\sin^3 2\lambda=1 \Leftrightarrow \sin2\lambda=1 \Leftrightarrow$

$2\lambda=\frac{\pi}{2}+K2\pi$ ដោយ $K\in\mathbb{Z}$

$\lambda = \frac{\Pi}{4} + K\Pi \ , \ K \in \mathbb{Z}$

គេកំនត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌកំនត់ : $\lambda \in [0 \ ; \ 2\pi]$

នោះយើងត្រូវអោយតំលៃ K ដូចតទៅ ព្រោះយើងយកតំលៃ λ ចំលើយក្នុងល័ក្ខខ័ណ្ឌកំនត់

$K = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\pi}{4} \in [0 \ ; \ 2\pi]$

$K = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4} \in [0 \ ; \ 2\pi]$

$K = 2 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{9\pi}{4} \in [0 \ ; \ 2\pi]$ ចេញក្រៅល័ក្ខខ័ណ្ឌកំនត់

ដូច្នេះយើងបានតំលៃ λ មានតែពីរគត់ជាចំលើយ គឺ

$$\boxed{\lambda = \frac{\pi}{4} \ \text{ រឺ } \ \lambda = \frac{5\pi}{4}}$$

លំហាត់

គេមានអនុគមន៍ $y = f(x) = x^4 - 6x^2 + 9$ ដែលមានក្រាបតំនាង (C)

1)- សិក្សាអថេរភាពទិសដៅ និងសង់ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍នេះក្នុងតំរុយអរតូនរមេ (oxy)

2)- រកគ្រប់ចំនុចនៅលើខ្សែកោង (C) ដែលបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំនុចនោះផ្គុំជាមួយ $(x'ox)$ បានមុំ α ដោយ $tg\alpha = -8$ ។ សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះទាំងនោះ ។

3)- ដោះស្រាយតាមក្រាភិចអត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការ $x^4 - 6x^2 + 9 - m = 0$ ដោយពិភាក្សាទៅតាមតំលៃនៃ m ។

ចំលើយ

1)- ក- អនុគមន៍ $y = f(x) = x^4 - 6x^2 + 9$ ជាអនុគមន៍ពហុធា ដឺការេ

មានដែនកំនត់ : $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

មានលីមីត • : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} x^4 = +\infty$

មានដេរីវេ : $y' = f'(x) = 4x^3 - 12x = 4x(x^2 - 3) = 4x(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\sqrt{3} & \Rightarrow y_1 = f(-\sqrt{3}) = 0 \\ x_2 = 0 & \Rightarrow y_2 = f(0) = 9 \\ x_3 = \sqrt{3} & \Rightarrow y_3 = f(\sqrt{3}) = 0 \end{cases}$$

ដោយ $f'(x) = 4x^3 - 12x = 4x(x^2 - 3)$ យើងត្រូវសិក្សាសញ្ញា $f'(x)$ ជាមុនសិន

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$4x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x^2 - 3$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

តារាងទិសដៅអថេរភាព

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	9	↘	0	↗	$+\infty$

អនុគមន៍មានតំលៃអប្បបរមាស្មើ 0 ចំពោះ $x = -\sqrt{3}$ និង $x = \sqrt{3}$ ហើយមានតំលៃអតិបរមាស្មើ 9 ចំពោះ $x = 0$ ។

ខ- **សំនង់ខ្សែកោង** $f(-x) = (-x)^4 - 6(-x^2) + 9 = x^4 - 6x^2 + 9 = f(x), \forall x \in \mathcal{D}$

ដូច្នេះអនុគមន៍ $f(x) = x^4 - 6x^2 + 9$ ជាអនុគមន៍ដែលតំរុយអោយខ្សែកោង (C) មានអ័ក្សអរដោនេ $(y'oy)$ ជាអ័ក្សឆ្លុះ ។

អាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វរវាង (C) និង $(x'ox)$ ជាឫសរបស់សមីការ $x^4 - 6x^2 + 9 = 0$

$$x^4 - 6x^2 + 9 = (x^2 - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{cases}$$

អរដោនេចំនុចប្រសព្វរវាង (C) និង $(y'oy)$ គឺ $y = f(0) = 9$

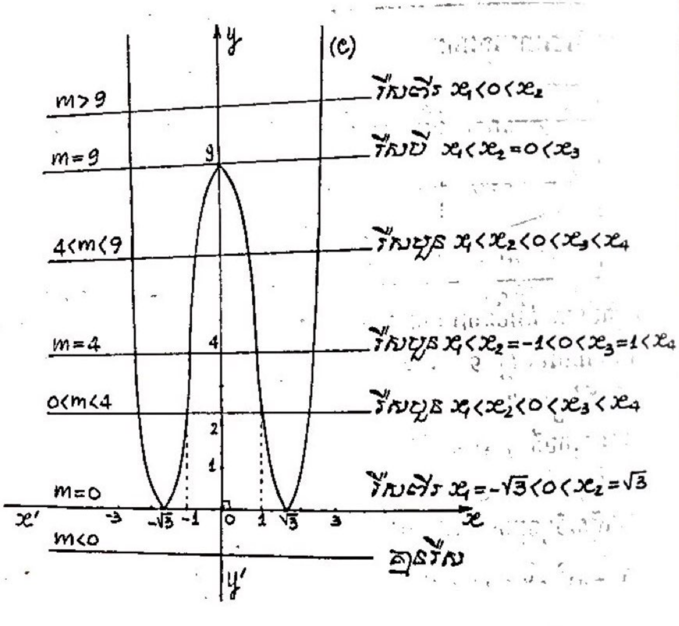
រកកូអរដោនេនៃចំនុចរបត់ : អាប់ស៊ីសចំនុចរបត់ជាឫសនៃដេរីវេទី 2

$$y'' = f''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x^2-1) = 12(x+1)(x-1)$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 & \Rightarrow y_1 = f(-1) = 4 \\ x_2 = 1 & \Rightarrow y_2 = f(1) = 4 \end{cases}$$

យើងមានចំនុចរបត់ពីរ គឺ $I_1(-1;4)$ និង $I_2(1;4)$

4)- រកគ្រប់ចំនុចនៅលើខ្សែកោង (C) ដែលបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំនុចនោះផ្គុំជាមួយ $(x'ox)$ បានមុំ α កំនត់ដោយ $tg\alpha = -8$



តាង $M(x;y) \in (C)$ ចំនុចត្រូវរក

តាមសម្មតិកម្ម : បន្ទាត់ប៉ះត្រង់ M មានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើ -8

តាមដេរីវេ : បន្ទាត់ប៉ះត្រង់ M មានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើ $f'(x) = 4x^3 - 12x$

យើងអាចទាញបាន: $4x^3 - 12x = -8 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x+2) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 & \Rightarrow y = 4 \quad \text{គឺ } I_2(1;4) \\ x = -2 & \Rightarrow y = 1 \quad \text{គឺ } M(-2;1) \end{cases}$$

យើងបានពីរចំនុច $I_2(1;4)$ និង $M(-2;1)$

សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះទាំងពីរនោះ:

សមីការបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ $I_2(1;4)$ $\quad -8 = \frac{y-4}{x-1} \Leftrightarrow y = -8x + 12$

សមីការបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ $M(-2;1)$ $\quad -8 = \frac{y-1}{x+2} \Leftrightarrow y = -8x - 15$

3)- ដោះស្រាយតាមក្រាភិចអត្ថិភាពនិងសញ្ញារឹសសមីការ

$x^4 - 6x^2 + 9 - m = 0 \Leftrightarrow x^4 - 6x^2 + 9 = m$ ជាសមីការអាប់ស៊ីសរវាងខ្សែកោង (C) និងបន្ទាត់ $y = m$ ស្រប $(x'ox)$ ។ យើងបានចំលើយលើក្រាភិច

លំហាត់

គេមានអនុគមន៍ $y = f(x) = \frac{1}{8}(x^4 - 6x^2 + 9)$

1)- សិក្សាអថេរភាពទិសដៅ និងសង់ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍នេះក្នុងតំរុយអរតូនរមេ (oxy) ។ ស្រាយថាបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង (C) ត្រង់ចំនុចរបត់កែងគ្នា ។

2)- បន្ទាត់ (Δ) សមីការ $y = 1$ កាត់ខ្សែកោង (C) បានបួនចំនុច M, N, P, Q រៀបតាមលំដាប់អាប់ស៊ីសពីតូចទៅធំ ។ ស្រាយថាបំនែក (MPNQ) ជាបំនែកអាម៉ូនិក ។ តើគេអាចថាយ៉ាងដូចម្តេចចំពោះបាច់បន្ទាត់ $O(MPNQ)$?

3)- ពិភាក្សាដោយប្រើក្រាភិចអត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការទៅតាមតំលៃនៃ

$K: \; x^4 - 6x^2 + 9 - 8K = 0$

1)- សិក្សាអថេរភាពទិសដៅ និងសង់ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍

$$y = f(x) = \frac{1}{8}(x^4 - 6x^2 + 9)$$

អនុគមន៍ $f(x)$ អោយជាអនុគមន៍ប៊ិការេ មានដែនកំនត់ : $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

អនុគមន៍នេះមានដេរីវេ $f'(x) = \frac{1}{8}(4x^3 - 12x) = \frac{x}{2}(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\sqrt{3} & \Rightarrow y_1 = f(-\sqrt{3}) = 0 \\ x_2 = 0 & \Rightarrow y_2 = f(0) = \frac{9}{8} \\ x_3 = \sqrt{3} & \Rightarrow y_3 = f(\sqrt{3}) = 0 \end{cases}$$

សញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$\frac{x}{2}$		−		−	0	+		+	
$x^2 - 3$		+	0	−		−	0	+	
$f'(x)$		−	0	+	0	−	0	+	

តារាងអថេរភាពទិសដៅ

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	0	−	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{9}{8}$	↘	0	↗	$+\infty$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{8}x^4 = +\infty$$

អនុគមន៍ $f(x)$ មានតំលៃអប្បបរមាស្មើ 0 ចំពោះ $x = -\sqrt{3}$ និង$x = \sqrt{3}$

ហើយមានតំលៃអតិបរមាស្មើ $\frac{9}{8}$ ចំពោះ $x = 0$

ភាពពិសេសនៃអនុគមន៍

$$f(-x) = \frac{1}{8}[(-x)^4 - 6(-x)^2 + 9] = \frac{1}{8}(x^4 - 6x^2 + 9) = f(x) \ , \ \forall x \in \mathcal{D}$$

ដូច្នេះ $f(x)$ ជាអនុគមន៍គូក្នុង $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

អាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វរវាង (C) និង $(x'ox)$ ជាឫសនៃសមីការ $\frac{1}{8}(x^4 - 6x^2 + 9) = 0$

$$\Leftrightarrow x^4 - 6x^2 + 9 = 0 \quad \Leftrightarrow (x^2 - 3)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 = 3 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\sqrt{3} \\ x_2 = \sqrt{3} \end{cases}$$

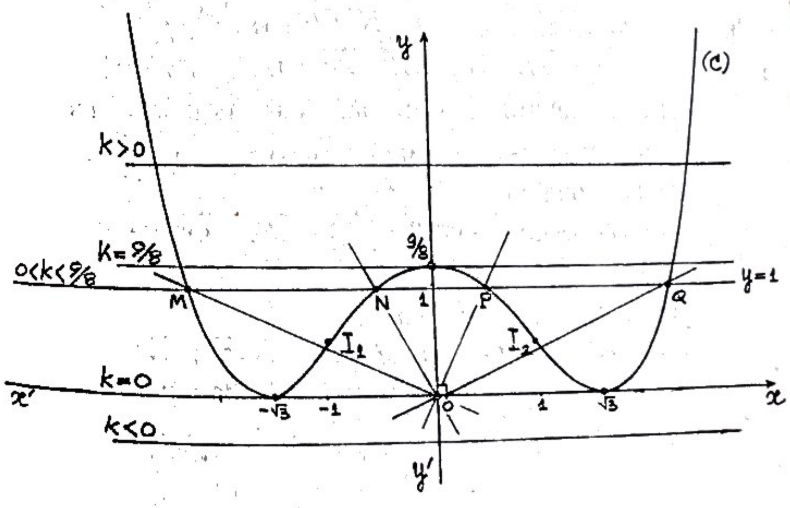
អរដោនេចំនុចប្រសព្វរវាង (C) និង $(y'oy)$ គឺ $y = f(o) = \frac{9}{8}$

រកកូអរដោនេនៃចំនុចរបត់ អាប់ស៊ីសនៃចំនុចរបត់ជាឫសនៃដេរីវេទី2 តាងដោយ $f''(x)$

$$f''(x) = \frac{12}{8}(x^2 - 1) = \frac{3}{2}(x + 1)(x - 1)$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 & \Rightarrow y_1 = f(-1) = \frac{1}{2} \\ x_2 = 1 & \Rightarrow y_2 = f(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$$ យើងមានចំនុចរបត់ 2 តាងដោយ

$I_1\left(-1;\frac{1}{2}\right)$; $I_2\left(1;\frac{1}{2}\right)$



ស្រាយថាបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង (C) ត្រង់ចំនុចរបត់កែងគ្នា

មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង (C) ត្រង់ចំនុចរបត់ I_1 គឺ $f'(-1) = 1$

មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង (C) ត្រង់ចំនុចរបត់ I_2 គឺ $f'(1) = -1$

ដោយផលគុណមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះទាំងពីរ $f'(-1)\ f'(1) = -1$ នោះយើងបានបន្ទាត់ប៉ះទាំងពីរកែងគ្នា ។

2)- ស្រាយថាបំនែក $(MPNQ)$ ជាបំនែកអាម្ងូនិក

សមីការអាប់ស៊ីសរវាង (C) និងបន្ទាត់ $y = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{8}(x^4 - 6x^2 + 9) = 1$

$\Leftrightarrow x^4 - 6x^2 + 9 - 8 = 0 \Leftrightarrow x^4 - 6x^2 + 1 = 0$ ជាសមីការប៊ីការេ

តាង $X = x^2 \quad \Rightarrow x = \pm\sqrt{x} \quad (X \geqslant 0)$

យើងបានសមីការរេស្ទូវង់ : $X^2 - 6X + 1 = 0$ មាន $\Delta' = 9 - 1 = 8 = (2\sqrt{2})^2$

នោះយើងបាន $X_1 = 3 - 2\sqrt{2} \quad \Rightarrow x = \pm\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$

$X_2 = 3 + 2\sqrt{2} \quad \Rightarrow x = \pm\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$

ដោយសម្មតិកម្មខាងលើ គេប្រាប់ថាគេរៀបចំនុចប្រសព្វតាមលំដាប់អាប់ស៊ីសពីតូចទៅធំ នោះយើងអាចយក

$M(-\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}\ ;\ 1)$, $N(-\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}\ ;\ 1)$

$P = (\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}\ ;\ 1)$, $Q(\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}\ ;\ 1)$

ដោយចំនុចទាំងនោះរត់ត្រង់គ្នានៅលើបន្ទាត់ $y = 1$ នោះយើងគ្រាន់តែស្រាយទំនាក់ទំនងអាប់ស៊ីស $(x_M + x_P)(x_N + x_Q) = 2(x_M x_P + x_N x_Q)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

ដំបូងយើងគណនា

$(x_M + x_P)(x_N + x_Q) = (-\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} + \sqrt{3 - 2\sqrt{2}})(-\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} + \sqrt{3 + 2\sqrt{2}})$

$= 1 - 3 - 2\sqrt{2} - 3 + 2\sqrt{2} + 1 = -4$

រួចយើងគណនា

$2(x_M x_P + x_N x_Q) = 2[-\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}]$

$= 2(-1 - 1) = -4$ ដូច្នេះ យើងបានទំនាក់ទំនងនេះផ្ទៀងផ្ទាត់ គឺ

$(x_M + x_P)(x_N + x_Q) = 2(x_M x_Q + x_N x_Q) = -4$ ដែលតំរូវអោយបំនែក $(MPNQ)$ ជាបំនែកអាម្ងូនិក

តើគេអាចថាយ៉ាងណាចំពោះបាច់បន្ទាត់ $O(MPNQ)$

យើងមានចំនុច O មិននៅលើបន្ទាត់ $(MPNQ)$ និងបំនែក $(MPNQ)$ ជាបំនែកអាម្ងូនិកនោះតំរូវអោយ $O(MPNQ)$ ជាបាច់បន្ទាត់អាម្ងូនិក

3)- ដោះស្រាយសមីការ $x^4 - 6x^2 + 9 - 8K = 0$ ដោយប្រើក្រាភិចដើម្បីពិភាក្សាសញ្ញាឫសសមីការនេះអាចសរសេរ : $x^4 - 6x^2 + 9 = 8K \Leftrightarrow$

$\frac{1}{8}(x^4 - 6x^2 + 9) = K$ ជាសមីការអាប់ស៊ីសរវាងខ្សែកោង (C) $y = \frac{1}{8}(x^4 - 6x^2 + 9)$ និងបន្ទាត់ $y = K$ ស្រប $(x'ox)$

ដោយពិនិត្យតាមក្រាភិច យើងបានលទ្ធផលក្នុងតារាងសង្ខេបខាងក្រោម

K	អត្ថិភាព និង សញ្ញាឫសសមីការ
$-\infty$	
	សមីការគ្មានឫស
0	សមីការមានឫសពីរ $x_1 = -\sqrt{3} < 0 < x_2 = \sqrt{3}$
	សមីការមានឫសបួន $x_1 < x_2 < 0 < x_3 < x_4$
$\frac{9}{8}$	សមីការមានឫសបី $x_1 < x_2 = 0 < x_3$
	សមីការមានឫសពីរ $x_1 < 0 < x_2$
$+\infty$	

លំហាត់

គេអោយខ្សែកោង (C_a) តាងអនុគមន៍ $y = f(x) = x^4 - 4x^2\sin a - 3\cos 2a$

ដោយ : $(0 \leqslant a \leqslant 2\pi)$ ។

គណនាតំលៃ a ដើម្បីអោយខ្សែកោង (C_a) កាត់ $(x'ox)$ បានបួនចំនុច

ចំលើយ

យើងដឹងថាអាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វខ្សែកោង (C_a) និង $(x'ox)$ ជាឫសនៃសមីការ

$$x^4 - 4x^2\sin a - 3\cos 2a = 0 \quad \text{(ជាសមីការប៊ីការេ)} \qquad (1)$$

ដើម្បីអោយមានចំនុចប្រសព្វបួន លុះត្រាតែសមីការ (1) មានឫសបួនផ្សេងគ្នា

ដំបូង យើងត្រូវតាង $X = x^2$, $X > 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{X}$

យើងបានសមីការរេស្ទវង់ : $X^2 - 4X\sin a - 3\cos 2a = 0$ (2)

ជាសមីការដឺក្រេទី 2 នៃ X ។

សមីការ (1) មានឫសបួន លុះត្រាតែសមីការ (2) មានឫសពីរផ្សេងគ្នា

វិជ្ជមាន គឺ : $0 < X_1 < X_2$

ដើម្បីអោយ (2) មានឫសពីរ : $0 < X_1 < X_2$ លុះត្រាតែ

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$$ (ព្រោះមេគុណរបស់ X^2 ស្មើ $1 \neq 0$)

រក $\Delta' = 4\sin^2 a + 3\cos 2a = 4\sin^2 a + 3(\cos^2 a - \sin^2 a) =$

$4\sin^2 a + 3\cos^2 a - 3\sin^2 a = 3\cos^2 a + \sin^2 a = 2\cos^2 a + \cos^2 a + \sin^2 a$

តាមរូបមន្តគ្រឹះក្នុងត្រីកោណមាត្រ : $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$, $\forall a \in [0;2\pi]$

យើងបាន : $\Delta' = 2\cos^2 a + 1 = 1 + 2\cos^2 a > 0$, $\forall a \in [0,2\pi]$

រក $P = -3\cos 2a > 0 \iff \cos 2a < 0$

$\cos 2a < 0 \iff \frac{\pi}{2} + K2\pi < 2a < \frac{3\pi}{2} + K2\pi$

$\frac{\pi}{4} + K\pi < a < \frac{3\pi}{4} + K\pi$

យើងត្រូវអោយតំលៃ K ព្រោះ $a \in [0;2\pi]$

$K = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{4} < a < \frac{3\pi}{4}$

$K = 1 \Rightarrow \frac{5\pi}{4} < a < \frac{7\pi}{4}$

យើងមិនអាចអោយតំលៃ K = 2 , 3 តទៅទៀតបានទេព្រោះ $a \notin [0;2\pi]$

រក $S = 4\sin a > 0 \iff \sin a > 0$

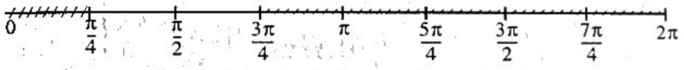
$\sin a > 0 \iff K2\pi < a < \pi + K2\pi$

យើងត្រូវអោយតំលៃ K ព្រោះ $a \in [0;2\pi]$

$K = 0 \Rightarrow 0 < a < \pi$

យើងមិនអាចអោយតំលៃ K = 1 , 2 តទៅទៀតបានទេ ព្រោះ $a \notin [0;2\pi]$

សរុបល័ក្ខខ័ណ្ឌទាំងអស់ $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$ និង $0 \leqslant a \leqslant 2\pi$ យើងបាន



ចំលើយ

$\frac{\pi}{4} < a < \frac{3\pi}{4}$

$a \in \left]\frac{\pi}{4} ; \frac{3\pi}{4}\right[$

លំហាត់

គេអោយត្រូវសារ $y = f_m(x) = \dfrac{mx+4}{x+m}$ ដែលមានខ្សែកោងតំនាង (C_m)

1)- សិក្សាទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $f_m(x)$ ដោយពិភាក្សាទៅតាមតំលៃនៃ m ។

2)- រកសំនុំចំនុច ω ផ្ចិតឆ្លុះរបស់ខ្សែកោង (C_m) កាលណា m ផ្លាស់ប្តូរតំលៃ ។

3)- ស្រាយថាខ្សែកោង (C_m) កាត់តាមចំនុចនឹងពីរ A និង B ដែលត្រូវរក ។ តើមានតំលៃ m ដែលធ្វើអោយបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង (C_m) ត្រង់ A និង B ស្រប គ្នាដែររឺទេ ?

4)- សិក្សាទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $f_m(x)$ ចំពោះ $m = 1$ រួចសង់ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍នេះក្នុងតំរុយអរតូនរមេ (oxy) ។ ពីសំនង់ខ្សែកោង (C) ទាញសំនង់ ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍ $y = g(x) = \left|\dfrac{x+4}{x+1}\right|$ រួចដោះស្រាយតាមក្រាភិ អត្ថិភាពនិងសញ្ញាឫសសមីការ $\left|\dfrac{x+4}{x+1}\right| = K$ ដោយពិភាក្សាទៅតាមតំលៃ K ។

ចំលើយ

1)- សិក្សាទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $y = f_m(x) = \dfrac{mx+4}{x+m}$

អនុគមន៍នេះមានដែនកំនត់ : $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{m\}$

សិក្សាទិសដៅអថេរភាព គឺសិក្សាសញ្ញា $f'(x)$

$$f'_m(x) = \frac{\mu' v - v' \mu}{v^2} \qquad \begin{cases} \mu = mx+4 & \Rightarrow \mu' = m \\ v = x+m & \Rightarrow v' = 1 \end{cases}$$

$$f'_m(x) = \frac{mx + m^2 - mx - 4}{(x+m)^2} = \frac{m^2-4}{(x+m)^2} = \frac{(m+2)(m-2)}{(x+m)^2}$$

$f'(x)$ យកសញ្ញាតាមភាគយក $m^2 - 4 = (m+2)(m-2)$

$$f'_m(x) = 0 \quad \Leftrightarrow (m+2)(m-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -2 \\ m = 2 \end{array}\right.$$

បើ $m = -2 \Rightarrow y = f_{-2}(x) = \dfrac{-2x+4}{x-2} = \dfrac{-2(x-2)}{x-2} = -2$ អនុគមន៍ថេរ

បើ $m = 2 \Rightarrow y = f_2(x) = \dfrac{2x+4}{x+2} = \dfrac{2(x+2)}{x+2} = 2$ អនុគមន៍ថេរ

តារាងសង្ខេបទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍

m	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'_m(x)$		+	0	−	0	+	

m	$f'_m(x)$	ទិសដៅអថេរភាពនៃ $f_m(x)$
$-\infty$		អនុគមន៍ $f_m(x)$ កើន
	+	
-2	0	អនុគមន៍ $f_{-2}(x) = -2$ ជាអនុគមន៍ថេរ
	−	អនុគមន៍ $f_m(x)$ ចុះ
2	0	អនុគមន៍ $f_2(x) = 2$ ជាអនុគមន៍ថេរ
	+	អនុគមន៍ $f_m(x)$ កើន
$+\infty$		

2)- រកសំនុំចំនុចផ្ចិតឆ្លុះរបស់ (C_m)

$$\omega \left| \begin{array}{l} x = -\dfrac{d}{c} = -m \text{ អថេរ} \\ y = \dfrac{a}{c} = m \text{ អថេរ} \end{array}\right.$$

យើងត្រូវរកទំនាក់ទំនងគ្មាន m រវាង y និង x រឺសមីការសំនុំចំនុច

$$x = -m \quad \Rightarrow m = -x \quad \Rightarrow y = -x$$

ដូច្នេះសំនុំ ω គឺបន្ទាត់សមីការ $\boxed{y = -x}$

3)- ស្រាយបញ្ជាក់ថាខ្សែកោង (C_m) កាត់តាមចំនុចនឹង A និង B ដែលត្រូវរក

សមីការ (C_m) អាចសរសេរ $y = \frac{mx+4}{x+m} \Leftrightarrow mx + 4 = xy + my \Leftrightarrow$

$$mx - my = xy - 4 \Leftrightarrow m(x-y) = xy - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y_2 = x \\ x^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -2 \ ; \ y = -2 \\ x = 2 \ ; \ y = 2 \end{array}\right.$$ យើងអាចយក $\boxed{A(-2;-2) \ ; \ B(2;2)}$

តើមានតំលៃ m ដែលធ្វើអោយបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង (C_m) ត្រង់ A និង B ស្របគ្នាដែរឬទេ ?

មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះ (C_m) ត្រង់ $A(-2;-2)$ គឺ $f'_m(-2) = \frac{(m+2)(m-2)}{(-2+m)^2}$

$$= \frac{(m+2)(m-2)}{(m-2)^2} = \frac{m+2}{m-2}$$

មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះ (C_m) ត្រង់ $B(2;2)$ គឺ $f'_m(2) = \frac{(m+2)(m-2)}{(2+m)^2}$

$$= \frac{m-2}{m+2}$$

ដើម្បីអោយបន្ទាត់ប៉ះ (C_m) ត្រង់ A និង B ស្របគ្នា លុះត្រាតែមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះទាំងពីរស្មើគ្នា

គឺ $f'_m(-2) = f'_m(2) \Leftrightarrow \frac{m+2}{m-2} = \frac{m-2}{m+2} \Leftrightarrow$

$$(m+2)^2 = (m-2)^2 \Leftrightarrow m^2 + 4m + 4 = m^2 - 4m + 4 \Leftrightarrow 8m = 0$$

$$\Leftrightarrow m = 0$$

យើងបានចំលើយមួយ គឺ $\boxed{m = 0}$

4)- បើ $m = 1$ នោះយើងបានអនុគមន៍ទៅជា $y = f_1(x) = \frac{x+4}{x+1}$

អនុគមន៍នេះមានដែនកំនត់ $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f_1(x) = \lim_{x \to \pm\infty} 1 + \frac{3}{x+1} = 1$$

$$\lim_{x \to -1} f_1(x) = \lim_{x \to -1} 1 + \frac{3}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{3}{x+1} = \infty$$

$$f'_1(x) = -\frac{3}{(x+1)^2} < 0 \ , \ \forall x \in \mathcal{D}$$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'_1(x)$		$-$	‖	$-$	
$f_1(x)$	1	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	1

អនុគមន៍ $f_1(x)$ ចុះក្នុង $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$\lim_{x \to \pm\infty} f_1(x) = 1 \Rightarrow$ បន្ទាត់ $y = 1$ ជាអាស៊ីមតូតដេក

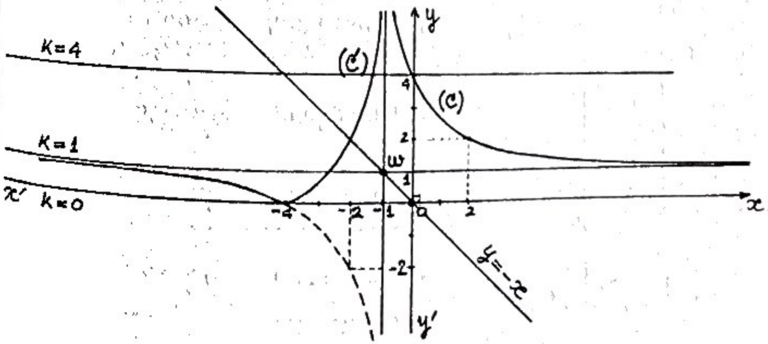
$\lim_{x \to -1} f_1(x) = \infty \Rightarrow$ បន្ទាត់ $x = -1$ ជាអាស៊ីមតូតដេក

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
y	0	$\frac{1}{2}$	-2	‖	4	$\frac{5}{2}$	2

អាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វរវាង (C) និង $(x'ox)$ ជាឫសនៃសមីការ

$$\frac{x+4}{x+1} = 0 \Leftrightarrow x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4$$

អរដោនេចំនុចប្រសព្វរវាង (C) និង $(y'oy)$ គឺ $y = f(0) = 4$



4)- ពីសំណង់ខ្សែកោង (C) ទាញសំណង់ខ្សែកោង (C') តាងអនុគមន៍

$$y = g(x) = \left|\frac{x+4}{x+1}\right| = |f_1(x)|$$

អនុគមន៍ $g(x)$ មានដែនកំណត់ $\mathcal{D}' = \mathcal{D} = R \setminus \{-1\}$

$\forall x \in \mathcal{D},\ f_1(x) \geq 0 \Rightarrow g(x) = |f_1(x)| = f(x)$ នោះយើងបាន (C') = (C

$\forall x \in \mathcal{D},\ f_1(x) < 0 \Rightarrow g(x) = |f_1(x)| = -f(x)$ នោះយើងបាន (C')

ជារូបឆ្លុះនៃ (C) ធៀប $(x'ox)$ ។

ដោះស្រាយតាមក្រាភិចអត្ថិភាពនិងសញ្ញាឫសសមីការ $\left|\frac{x+4}{x+1}\right| = K$ ជាសមីការអាប់ស៊ុ

រវាងខ្សែកោង (C') និងបន្ទាត់ $y = K$ ស្រប $(x'ox)$ តាមក្រាភិច យើងបា

ចំលើយ

K	អត្ថិភាព និង សញ្ញាឫសសមីការ
$-\infty$	សមីការគ្មានឫស
0	សមីការមានឫសមួយ $x = -4 < 0$
	សមីការមានឫសពីរ $x_1 < x_2 < 0$
1	សមីការមានឫសមួយ $x < 0$
	សមីការមានឫសពីរ $x_1 < 0 < x_2$
4	សមីការមានឫសពីរ $x_1 < x_2 = 0$
$+\infty$	សមីការមានឫសពីរ $x_1 < x_2 < 0$

លំហាត់

1)- សិក្សាទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $y = f(x) = \frac{3-x}{x+2}$ រួចសង់ខ្សែកោង (H) តាងអនុគមន៍នេះក្នុងតំរុយអរតូនមេ $(x'ox)$ ។

2)- រកចំនុចនៅលើខ្សែកោង (H) ដែលបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំនុចនោះស្របទៅនឹងបន្ទាត់ $y = -5x$

3)- មានគ្រួសារបន្ទាត់ (D_m) សមីការ $y = 2x + m$ ដែលមាន m ជាប៉ារ៉ាម៉ែត ។ កំនត់តំលៃ m ដើម្បីអោយ (H) និង (D_m) មានចំនុចប្រសព្វ P_1 និង P_2 ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_2}$ មានតំលៃថេរ ទោះបី m ផ្លាស់ប្តូរតំលៃ ។

4)- គេដៅចំនុច P_3 ដោយអោយ $|\overrightarrow{OP_3}| = |\overrightarrow{OP_2}|$ និង $(\widehat{\overrightarrow{OP_2}, \overrightarrow{OP_3}}) = \frac{\pi}{2}$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា រង្វាស់ផ្ទៃត្រីកោណ OP_1P_3 មានតំលៃថេរ ដែលត្រូវគេណនាកាលណា m ផ្លាស់ប្តូរតំលៃ ។

ចំលើយ

1)- សិក្សាទិសដៅអថេរភាព

អនុគមន៍ $y = f(x) = \frac{3-x}{x+2} = \frac{-x+3}{x+2} = -1 + \frac{5}{x+2}$ (រាងកាណូនិច)

$x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ ដូច្នេះ អនុគមន៍នេះមានដែនកំណត់ $\mathcal{D} = R \setminus \{-2\}$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} -1 + \frac{5}{x+2} = -1$$

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} -1 + \frac{5}{x+2} = \lim_{x \to -2} \frac{5}{x+2} = \infty$$

$$f'(x) = \frac{\mu' v - v' \mu}{v^2} \qquad \begin{aligned} \mu &= -x+3 \Rightarrow \mu' = -1 \\ v &= x+2 \Rightarrow v' = 1 \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{-x-2+x-3}{(x+2)^2} = \frac{-5}{(x+2)^2} < 0, \quad \forall x < \mathcal{D}$$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	-1	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	-1

$f(x)$ ជាអនុគមន៍ចុះក្នុងដែនកំណត់ $\mathcal{D}$

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$-\frac{9}{4}$	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{7}{2}$	-6	‖	4	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	0

អាស៊ីមតូត

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = -1 \quad \Rightarrow$ បន្ទាត់ $y = -1$ ជាអាស៊ីមតូតដេក

$\lim_{x \to -2} f(x) = \infty \quad \Rightarrow$ បន្ទាត់ $x = -2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

អាស៊ីសចំនុចប្រសព្វរវាង (H) និង $(x'ox)$ ជាឫសនៃសមីការ $\frac{-x+3}{x+2} = 0$

$$-x + 3 = 0 \iff x = 3$$

អរដោនេចំនុចប្រសព្វរវាង (H) និង $(y'oy)$ គឺ $y = f(0) = \frac{3}{2}$

ផ្ចិតឆ្លុះរបស់ខ្សែកោង (H)

អាស៊ីមតូតឈរ $x = -2$ និងអាស៊ីមតូតដេក $y = -1$ កាត់គ្នាត្រង់ $\omega(x = -2; y = -1)$

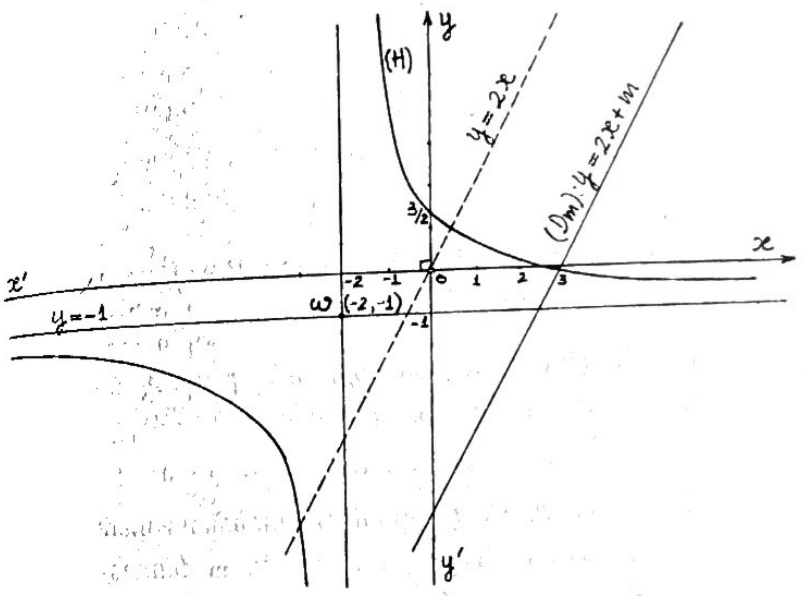
ក្នុងតំរុយ (ωXY) យើងបានតាមរូបមន្តនៃការសម្គូរតំរុយ $x = -2 + X,\ y = -1 + Y$ នោះយើងបាន

$$-1 + Y = \frac{-(-2+X)+3}{-2+X+2} = \frac{-X+5}{X} \iff y = \frac{-X+5}{X} + 1 = \frac{5}{X}$$

$Y = f(X) = \frac{5}{X}$ ហៅថា សមីការបង្រួមរបស់ខ្សែកោង (H)

$f(-X) = \frac{5}{-X} = -\frac{5}{X} = -f(X) \Leftrightarrow f(X)$ ជាអនុគមន៍សេស $\Rightarrow \omega$

ជាផ្ចិតឆ្លុះរបស់ខ្សែកោង (H) ។



2). រកចំនុចនៅលើខ្សែកោង (H) ដែលបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំនុចនោះស្របទៅនឹងបន្ទាត់

$$y = -5x$$

តាង $M(x;y) \in (H)$ ជាចំនុចត្រូវរក

មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះ (H) ត្រង់ $M(x;y)$ គឺ $f'(x) = \frac{-5}{(x+2)^2}$

មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ $y = -5x$ គឺ -5

បន្ទាត់ទាំងពីរស្របគ្នា លុះត្រាតែ មេគុណប្រាប់ទិសរបស់វាស្មើគ្នា

$$-\frac{5}{(x+2)^2} = -5 \iff \frac{1}{(x+2)^2} = 1 \iff (x+2)^2 = 1 \iff$$

$$(x+2+1)(x+2-1) = (x+3)(x+1) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} x_1 = -3,\ y_1 = -6 \\ x_2 = -1,\ y_2 = 4 \end{array}\right.$$

យើងបានចំនុចត្រូវរកមានពីរ គឺ

$M_1(x=-3;\ y=-6)$
$M_2(x=-1;\ y=4)$

3)- បន្ទាត់ (D_m) $y = 2x+m$

បន្ទាត់ (D_m) មានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើ 2 ថេរ ដូច្នេះបន្ទាត់ (D_m) ប្រែប្រួលខ្លួនឯង ហើយស្របបន្ទាត់ $y = 2x$ ដែលកាត់តាម

x	0	1
y	0	2

កំនត់ m ដើម្បីអោយ (C) និង (D_m) មានចំនុចប្រសព្វ P_1 និង P_2

សមីការអាប់ស៊ីសរវាង (C) និង (D_m)

$$\frac{-x+3}{x+2} = 2x+m \Leftrightarrow 2x^2+(m+5)x+2m-3 = 0$$

ដើម្បីអោយមាន P_1 និង P_2 លុះត្រាតែសមីការអាប់ស៊ីសមានឫសពីរ គឺ $\Delta \geq 0$

$\Delta = m^2-6m+49$ ជាត្រីធាដឺក្រេទី 2 នៃ m ដែលមាន

$\delta' = 9-49 = -40<0 \Rightarrow \Delta > 0\ ,\ \forall m\in \mathbb{R}$

ដូច្នេះ (C) កាត់ (D_m) បានពីរចំនុចផ្សេងគ្នាជានិច្ច P_1 និង $P_2\ ;\ \forall m\in \mathbb{R}$

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}$ មានតំលៃថេរ $\forall m\in \mathbb{R}$

$$\overrightarrow{OP_1}\begin{vmatrix} x_1 \\ y_2 \end{vmatrix} \quad \overrightarrow{OP_2}\begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \end{vmatrix} \quad \overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2} = x_1x_2+y_1y_2$$

$$x_1x_2 = \frac{2m-3}{2}\ ;\quad y_1 = \frac{3-x_1}{x_1+2}\ ,\quad y_2 = \frac{3-x_2}{x_2+2}$$

$$y_1y_2 = \frac{3-x_1}{x_1+2}\cdot\frac{3-x_2}{x_2+2} = \frac{9-3(x_1+x_2)+x_1x_2}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4} = -m-6$$

ដូច្នេះ $\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2} = x_1x_2+y_1y_2 = \frac{2m-3}{2}-m-6 = \frac{2m-3-2m-12}{2} = -\frac{15}{2}$

$\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2} = -\frac{15}{2}\ ,\quad \forall m\in \mathbb{R}$

ស្រាយបញ្ជាក់ថារង្វាស់ផ្ទៃនៃត្រីកោណ OP_1P_2 មានតំលៃថេរ

តាង S ក្រលាផ្ទៃត្រីកោណ OP_1P_3

$$S = \frac{1}{2}\left|\,|\overrightarrow{OP_1}||\overrightarrow{OP_3}|\ \sin(\widehat{\overrightarrow{OP_1},\overrightarrow{OP_3}})\right|$$

$(\widehat{\overrightarrow{OP_1},\overrightarrow{OP_3}}) = (\widehat{\overrightarrow{OP_1},\overrightarrow{OP_2}})+(\widehat{\overrightarrow{OP_2},\overrightarrow{OP_3}}) = \alpha+\frac{\pi}{2}$ ព្រោះយើងសន្មត $(\widehat{\overrightarrow{OP_1},\overrightarrow{OP_2}}) = \alpha$

$$\sin(\widehat{\overrightarrow{OP_1},\overrightarrow{OP_3}}) = \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha = \cos(\widehat{\overrightarrow{OP_1},\overrightarrow{OP_2}})$$

ដូច្នេះ

$$S = \frac{1}{2}\ \left||\overrightarrow{OP_1}||\overrightarrow{OP_3}|\right|\cos(\widehat{\overrightarrow{OP_1},\overrightarrow{OP_2}}) = \frac{1}{2}\ |\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}| = \frac{1}{2}\cdot\frac{15}{2} = \frac{15}{4}$$

$S = \frac{15}{4}$ ឯកតាផ្ទៃ $\forall m\in \mathbb{R}$

លំហាត់

1)- សិក្សាទិសដៅអថេរភាព អនុគមន៍ $y = f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

2)- គូសខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍នេះក្នុងតំរុយអរតូនរមេ (oxy)

3)- ដោះស្រាយអត្ថិភាព និង សញ្ញាឫសសមីការ

$x^2-mx+m = 0$ ដោយពិភាក្សាតាមតំលៃ m ។

ចំលើយ

1)- សិក្សាទិសដៅអថេរភាព អនុគមន៍ $y = f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

សរសេរ $f(x)$ ជារាងកាណូនិច

$$
\begin{array}{r|l}
x^2 & x-1 \\ \cline{2-2}
-x^2+x & x+1 \\ \cline{1-1}
x & \\
-x+1 & \\ \cline{1-1}
1 &
\end{array}
$$

យើងបាន $y = f(x) = \frac{x^2}{x-1} = x+1+\frac{1}{x-1}$

ដែនកំណត់ $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x+1+\frac{1}{x-1} = \lim_{x\to\pm\infty} x = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} x+1+\frac{1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1} = \pm\infty$$

$$y' = f(x) = \frac{\mu'\nu-\nu'\mu}{\nu^2} \quad \text{ដោយ} \begin{cases} \mu = x^2 \Rightarrow \mu' = 2x \\ \nu = x-1 \Rightarrow \nu' = 1 \end{cases}$$

ដូច្នេះយើងបាន $y' = f(x) = \frac{2x^2-2x-x^2}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = 2 \Rightarrow y = 4 \end{cases}$$

តារាងទិសដៅអថេរភាព

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$			0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	4	↗	$+\infty$

អនុគមន៍មានតំលៃអតិបរមាស្មើ 0 ត្រង់ $x = 0$ ហើយមានតំលៃអប្បបរមាស្មើ 4 ត្រង់ $x = 2$ ។

2)- គូសខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍នេះក្នុងតំរុយអរតូនរមេ (oxy)

អាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោង (C) និង $(x'ox)$ ជាឫសនៃសមីការ

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0$$

អរដោនេចំនុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោង (C) និង $(y'oy)$ គឺ $y = f(0) = 0$

អាស៊ីមតូតឈរ ដោយ $\lim_{x\to 1} f(x) = \infty$ នោះយើងបានបន្ទាត់សមីការ $x = 1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

អាស៊ីមតូតទ្រេត រឺ អាស៊ីមតូតមិនស្របនិងអ័ក្សអរដោនេ

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-(x+1)] = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x-1} = 0$$ នោះយើងបានបន្ទាត់ $y = x-1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត

អាស៊ីមតូតទាំងពីរកាត់គ្នាត្រង់ចំនុច $\omega(x = 1; y = 1+1 = 2)$

ស្រាយថា $\omega(x = 1;\ y = 2)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះរបស់ខ្សែកោង (C)

ក្នុងតំរុយ (ωXY) យើងបានតាមរូបមន្តប្តូរតំរុយ

$$\begin{array}{l} x = 1+X \\ y = 2+Y \end{array} \Rightarrow \text{យើងបានសមីការខ្សែកោង (C)}$$

ធៀបតំរុយថ្មី រឺ សមីការបម្រួម គឺ

$$2+Y = \frac{(X+1)^2}{X+1-1} = \frac{X^2+2X+1}{X} \Rightarrow$$

$$Y = f(X) = \frac{X^2+2X+1}{X} - 2 = \frac{X^2+2X+1-2X}{X}$$

$$Y = f(X) = \frac{X^2+1}{X}$$

យើងបាន $f(-X) = \frac{(-X)^2+1}{-X} = \frac{X^2+1}{-X} = -\frac{X^2+1}{X} = -f(X)$

ដោយ $f(-X) = -f(X) \Rightarrow Y = f(X) = \frac{X^2+1}{X}$

ជាអនុគមន៍សេស $\Rightarrow \omega(x = 1, y = 2)$ គល់នៃតំរុយ (ωXY)

ជាផ្ចិតឆ្លុះរបស់ខ្សែកោង (C) ។ ដូច្នេះ ខ្សែកោង (C) មាន $\omega(x = 1; y = 2)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះ ។

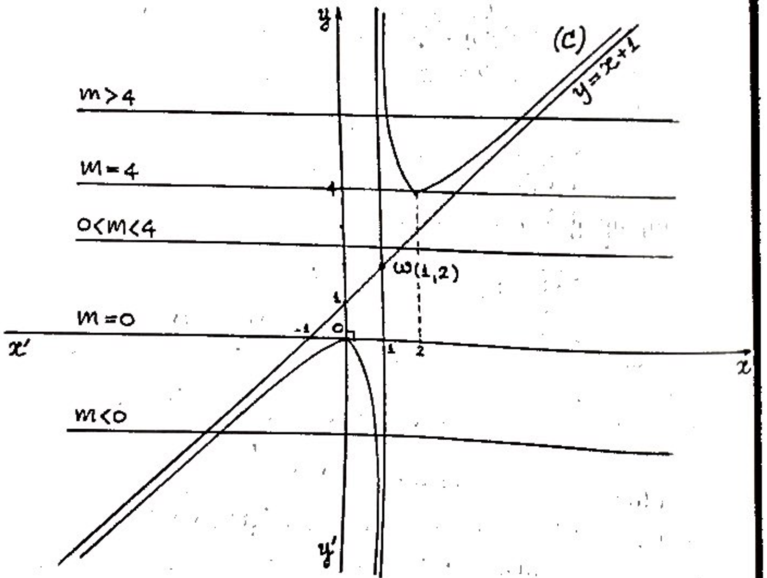
3)- ដោះស្រាយអត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការ

$x^2 - mx + m = 0$ ដោយពិភាក្សាតាមតំលៃ m

សមីការនេះអាចសរសេរ $x^2 = mx - m = m(x-1) \Leftrightarrow \frac{x^2}{x-1} = m$

ជាសមីការអាប់ស៊ីសរវាងខ្សែកោង (C) និងបន្ទាត់អថេរ $y = m$ ប្រែប្រួលស្រប $(x'ox)$ ។

ដោយប្រើក្រាភិច (C) យើងបានចំលើយក្នុងតារាងខាងក្រោម



m	អត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការ $x^2 - mx + m = 0$
$-\infty$	សមីការមានឫសពីរ $x_1 < 0 < x_2$
0	សមីការមានឫសឌុប $x_1 = x_2 = 0$
	សមីការគ្មានឫស
4	សមីការមានឫសឌុប $0 < x_1 = x_2 = 2$
$+\infty$	សមីការមានឫសពីរ $0 < x_1 < x_2$

លំហាត់

ក - សិក្សាទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍

$$y = f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x + 2}$$

ខ - គូសខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍នេះក្នុងតំរុយអរតូនរមេ (oxy) ។

គ - ដោះស្រាយអត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការ

$x^2 - (m+1)x - 2m - 2 = 0$ ដោយពិភាក្សាទៅតាមតំលៃនៃ m ។

ចំលើយ

ក - សិក្សាទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍

- សរសេរអនុគមន៍ $f(x)$ ជារាងកាណូនិច

$$\begin{array}{r|l} x^2 - x - 2 & x + 2 \\ \underline{-x^2 - 2x} & \overline{x - 3} \\ -3x - 2 & \\ \underline{+3x + 6} & \\ 4 & \end{array}$$

យើងអាចសរសេរ : $y = f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x+2} = x - 3 + \frac{4}{x+2}$

ដែនកំនត់ $\mathcal{D} = R \setminus \{-2\}$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} x - 3 + \frac{4}{x+2} = \lim_{x \to \pm\infty} x = \pm\infty$$

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} x - 3 + \frac{4}{x+2} = \lim_{x \to -2} \frac{4}{x+2} = \infty$$

$$f'(x) = \frac{\mu' v - v' \mu}{v^2} \quad \text{ដោយ} \begin{cases} \mu = x^2 - x - 2 \Rightarrow \mu' = 2x - 1 \\ v = x + 2 \Rightarrow v' = 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 4x - x - 2 - x^2 + x + 2}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + 4x}{(x+2)^2} = \frac{x(x+4)}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x+4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \Rightarrow y = -9 \\ x_2 = 0 \Rightarrow y = -1 \end{cases}$$

តារាងទិសដៅអថេរភាព

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	||	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-9	↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘	-1	↗	$+\infty$

អនុគមន៍មានតំលៃអតិបរមាស្មើ -9 ត្រង់ $x = -4$ និងមានតំលៃអប្បបរមាស្មើ -1 ត្រង់ $x = 0$

ខ - ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍

អាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោង (C) និងអ័ក្ស $(x'ox)$ ជាឫសនៃសមីការ

$$\frac{x^2 - x - 2}{x+2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$ ដូច្នេះ (C) កាត់ $(x'ox)$ ត្រង់ចំនុច $x = -1$ និង $x = 2$

អរដោនេចំនុចប្រសព្វរវាង (C) និង $(y'oy)$ គឺ $y = f(0) = -1$

• អាស៊ីមតូត

អាស៊ីសតូតឈរ : $\lim_{x \to -2} f(x) = \infty$, យើងបានបន្ទាត់សមីការ $x = -2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

អាស៊ីមតូតទ្រេត រឺ អាស៊ីមតូតមិនស្របអ័ក្សទាំងពីរ

$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (x-3)] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{4}{x+2} = 0$ យើងបានបន្ទាត់សមីការ

$y = x - 3$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ។

ផ្ចិតឆ្លុះរបស់ខ្សែកោង (C) អាស៊ីមតូតទាំងពីរ $x = -2$ និង $y = x - 3$ កាត់គ្នា ត្រង់ចំនុច $\omega(x = -2;\ y = -5)$

ក្នុងតំរុយ (ωXY) យើងបានតាមរូបមន្តដូរតំរុយ :

$x = -2 + X$; $y = -5 + Y$ ហើយសមីការ (C) ទៅជា :

$$-5 + Y = \frac{(-2+X)^2 - (-2+X) - 2}{-2 + X + 2} = \frac{X^2 - 5X + 4}{X}$$

$$\Rightarrow y = f(X) = \frac{X^2 - 5X + 4}{X} + 5 = \frac{X^2 + 4}{X}$$

ដោយ $-f(-X) = \frac{(-X)^2 + 4}{-X} = \frac{X^2 + 4}{-X} = -\frac{X^2 + 4}{X} = -f(X)$

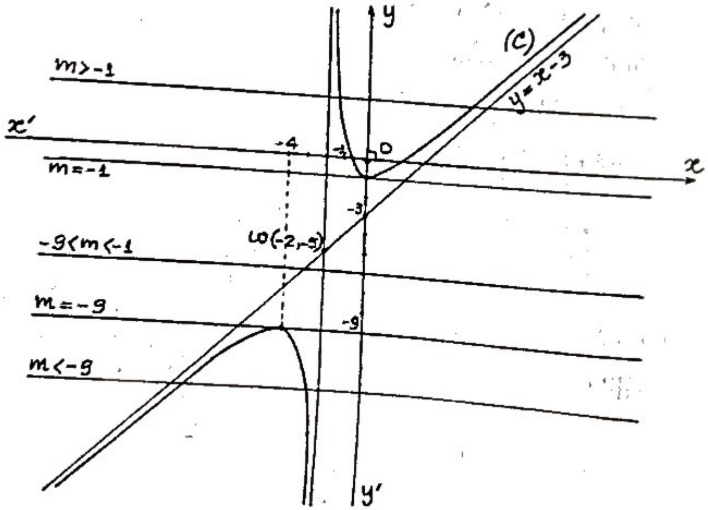
$\Rightarrow f(X)$ ជាអនុគមន៍សេស $\Rightarrow \omega(x = -2;\ y = -5)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះរបស់ខ្សែកោង (C)

គ. ដោះស្រាយអត្ថិភាពនិងសញ្ញាឫសសមីការ

$x^2-(m+1)x-2m-2=0$ ដោយពិភាក្សាតាមតំលៃ m ។
ដោយពន្លាតសមីការនេះទៅជា

$$x^2-mx-x-2m-2=0 \Leftrightarrow x^2-x-2=mx+2m \Leftrightarrow x^2-x-2=m(x+2)$$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2-x-2}{x+2}=m$ ជាសមីការអាប់ស៊ីសរវាងខ្សែកោង (C) សមីការ $y=f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x+2}$ និងបន្ទាត់អថេរ $y=m$ ប្រែប្រួលស្រប $(x'ox)$
ដោយពិនិត្យតាមក្រាភិច យើងបានចំលើយអត្ថិភាពនិងសញ្ញាឫសសមីការក្នុងតារាងខាងក្រោម :



m	អត្ថិភាព និង សញ្ញាឫសសមីការ ដោយពិនិត្យតាមក្រាភិច
$-\infty$	សមីការមានឫសពីរ $x_1<x_2<0$
-9	សមីការមានឫសឌុប $x_1=x_2=-4<0$
	សមីការគ្មានឫស
-1	សមីការមានឫសឌុប $x_1=x_2=0$
$+\infty$	សមីការមានឫសពីរ $x_1<0<x_2$

លំហាត់

1)- ក- សិក្សាទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $y=g(x)=\dfrac{x^2-2x+4}{2x-4}$

ខ- គូសខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍នេះក្នុងតំរុយអរតូនរមេ (oxy) ។

2)- ដោះស្រាយតាមក្រាភិចអត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការ

$x^2-2(m+1)x+4(m+1)=0$ ដោយពិភាក្សាទៅតាមតំលៃ m ។

ចំលើយ

1)- ក- សិក្សាទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $y=g(x)=\dfrac{x^2-2x+4}{2x-4}$

សរសេរ $g(x)$ ជារាងកាណូនិច

$$\begin{array}{r|l} x^2-2x+4 & 2x-4 \\ \cline{2-2} \underline{-x^2+2x} & \dfrac{x}{2} \\ 4 & \end{array}$$

យើងបាន $y = g(x) = \dfrac{x^2-2x+4}{2x-4} = \dfrac{x}{2} + \dfrac{4}{2x-4}$

អនុគមន៍ $g(x)$ មានដែនកំណត់ $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{2} + \frac{4}{2x-4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{2} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to 2} g(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x}{2} + \frac{4}{2x-4} = \lim_{x\to 2} \frac{4}{2x-4} = \infty$$

$g'(x) = \dfrac{\mu'\nu - \nu'\mu}{\nu^2}$ ដោយ $\begin{cases} \mu = x^2-2x+4 \Rightarrow \mu' = 2x-2 \\ \nu = 2x-4 \Rightarrow \nu' = 2 \end{cases}$

$$g'(x) = \frac{4x^2-8x-4x+8-2x^2+4-8}{(2x-4)^2} = \frac{2x(x-4)}{(2x-4)^2}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x(x-4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \Rightarrow y = -1 \\ x_2 = 4 \Rightarrow y = 3 \end{array}\right.$$

តារាងទិសដៅអថេរភាព

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	3	↗	$+\infty$

អនុគមន៍មានតំលៃអតិបរមាស្មើ -1 ត្រង់ $x = 0$ ហើយមានតំលៃអប្បបរមាស្មើ 3 ត្រង់ $x = 4$ ។

ខ- គូសខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍ $y = g(x)$

អាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោង (C) និងអ័ក្ស $(x'ox)$ ជាឫសនៃសមីការ

$\dfrac{x^2-2x+4}{2x-4} = 0 \Rightarrow x^2-2x+4 = 0$ ជាសមីការដឺក្រេទីពីរនៃ X

ដែលមាន $\Delta' = 1-4 = -3 < 0$ ដូច្នេះសមីការនេះគ្មានឫស បានសេចក្តីថា ខ្សែកោង (C) មិនកាត់ $(x'ox)$ ទេ

អរដោនេចំនុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោង (C) និងអ័ក្ស $(y'oy)$ គឺ $y = g(0) = -1$

អាស៊ីមតូតឈរ

$\lim_{x\to 2} g(x) = \infty \Rightarrow$ បន្ទាត់ $x = 2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

អាស៊ីមតូតទ្រេត

$\lim_{x\to\pm\infty}\left[g(x) - \dfrac{x}{2}\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{4}{2x-4} = 0 \Rightarrow$ បន្ទាត់ $y = \dfrac{x}{2}$

ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត

អាស៊ីមតូតទាំងពីរកាត់គ្នាត្រង់ចំនុច $\omega\left(x = 2, y = 2\frac{1}{2} = 1\right)$

ក្នុងតំរុយ (ωXY) យើងបានតាមរូបមន្តនៃការដូរតំរុយ

$x = 2 + X$, $y = 1 + Y$ សមីការ (C) អាចសរសេរ

$$1 + Y = \frac{(2+X)^2 - 2(2+X)+4}{2(2+X)-4} = \frac{4+4X+X^2-4-2X+4}{2X}$$

$$\Rightarrow Y = f(X) = \frac{X^2+2X+4}{2X} - 1 = \frac{X^2+4}{2X}$$

$$f(-X) = \frac{(-X)^2+4}{2(-X)} = \frac{X^2+4}{-2X} = -\frac{X^2+4}{2X} = -f(X)$$

$\Rightarrow f(X)$ ជាអនុគមន៍សេស $\Rightarrow \omega(x = 2; y = 1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះរបស់ខ្សែកោង (C)

ខ្សែកោង (C) មិនកាត់ $(x'ox)$ ទេ តែកាត់អ័ក្ស $(y'oy)$ ត្រង់ចំនុចអរដោនេ $y = -1$ និងមាន $\omega(x = 2, y = 1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះ ។

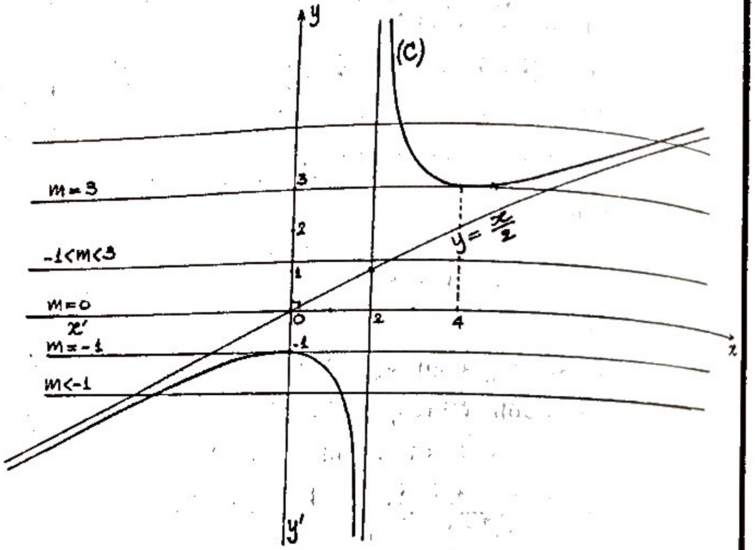
2). ដោះស្រាយតាមក្រាភិចអត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការ ដោយពិភាក្សាតាមតំលៃ m ។

$x^2 - 2(m+1)x + 4(m+1) = 0$

សមីការនេះអាចសរសេរ $x^2 - 2mx - 2x + 4m + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$x^2 - 2x + 4 = m(2x-4) \Leftrightarrow \dfrac{x^2-2x+4}{2x-4} = m$ ជាសមីការអាប់ស៊ីសរវាងខ្សែកោង(C)

$y = \dfrac{x^2-2x+4}{2x-4}$ និងបន្ទាត់ $y = m$ ស្រប $(x'0x)$



m	អត្ថិភាព និង សញ្ញាឫសសមីការ
$-\infty$	
	សមីការមានឫសពីរ $x_1 < 0 < x_2$
-1	សមីការមានឫសឌុប $x_1 = x_2 = 0$
	សមីការគ្មានឫស
3	សមីការមានឫសឌុប $x_1 = x_2 = 4 > 0$
$+\infty$	សមីការមានឫសពីរ $0 < x_1 < x_2$

1)- សិក្សាទិសដៅអថេរភាព និងគូសខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍

$$y = f(x) = \frac{(x-4)^2}{x-3}$$ ក្នុងតំរុយអរតូនរមេ ។

2)- ស្រាយថានៅលើខ្សែកោង (C) មានពីរចំនុច A និង B ដែលបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង (C) ត្រង់ចំនុចនោះស្របបន្ទាត់ $y + 3x = 0$ ។ តើចំនុចទាំងពីរនោះមានទីតាំងយ៉ាងណាចំពោះផ្ចិតឆ្លុះរបស់ខ្សែកោង (C) ?

3)- ដោះស្រាយតាមក្រាភិចអត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសរបស់សមីការ

$$x^2 - (m+8)x + 3m + 16 = 0$$ ដោយពិភាក្សាទៅតាមតំលៃ m ។

ចំលើយ

1)- **ក- សិក្សាទិសដៅអថេរភាពអនុគមន៍** $y = f(x) = \frac{x^2 - 8x + 16}{x-3}$

សរសេរអនុគមន៍ $f(x)$ ជារាងកាណូនិច

$$\begin{array}{rrr|l} x^2 & -8x & +16 & x-3 \\ \cline{4-4} -x^2 & +3x & & x-5 \\ \cline{1-3} & -5x & +16 & \\ & +5x & -15 & \\ \cline{2-3} & & 1 & \end{array}$$

អនុគមន៍ $f(x)$ អាចសរសេរ

$$f(x) = \frac{(x-4)^2}{x-3} = \frac{x^2 - 8x + 16}{x-3} = x - 5 + \frac{1}{x-3}$$

ដែនកនត់នៃអនុគមន៍ $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} x - 5 + \frac{1}{x-3} = \lim_{x \to \pm\infty} x = \pm\infty$$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} x - 5 + \frac{1}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{1}{x-3} = \infty$$

$$f'(x) = \frac{\mu' v - v'\mu}{v^2} \quad \text{ដោយ} \begin{cases} \mu = x^2 - 8x + 16 \Rightarrow \mu' = 2x - 8 \\ v = x - 3 \Rightarrow v' = 1 \end{cases}$$

ដូច្នេះ

$$f'(x) = \frac{x^2 - 6x + 8}{(x-3)^2} = \frac{(x-2)(x-4)}{(x-3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 2 \Rightarrow y = -4 \\ x_2 = 4 \Rightarrow y = 0 \end{array}\right.$$

តារាងទិសដៅអថេរភាព

x	$-\infty$	2		3		4	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−	‖	−	0	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗	-4	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

អនុគមន៍មានតំលៃអតិបរមាស្មើ -4 ត្រង់ $x = 2$ ហើយមានតំលៃអប្បបរមាស្មើ 0 ត្រង់ $x = 4$ ។

- អាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វរវាង (C) និង $(x'ox)$ ជាឫសនៃសមីការ

$$\frac{(x-4)^2}{x-3} = 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 4$$

ខ្សែកោង (C) ប៉ះ $(x'ox)$ ត្រង់ចំនុចអាប់ស៊ីស $x = 4$

- អរដោនេចំនុចប្រសព្វរវាង (C) និង $(y'oy)$ គឺ $y = f(o) = -\frac{16}{3}$

$\lim_{x \to 3} f(x) = \infty \Rightarrow$ បន្ទាត់ $x = 3$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (x-5)] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x-3} = 0 \Rightarrow$ បន្ទាត់សមីកា $y = x - 3$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត

អាស៊ីមតូតទាំងពីរកាត់គ្នាត្រង់ $\omega(x = 3, y = -2)$

ក្នុងតំរុយ (ωXY) តាមរូបមន្តនៃការដូរតំរុយ យើងបាន :

$x = 3 + X$ $\quad y = -2 + Y$ សមីការខ្សែកោង (C) អាចសរសេរ

$$-2 + Y = \frac{(3 + X - 4)^2}{3 + X - 3} \Rightarrow Y = \frac{X^2 - 2X + 1}{X} + 2 = \frac{X^2 - 2X + 1 + 2X}{X_2} = \frac{X^2 + 1}{X}$$

$$Y = f(X) \quad \text{ដោយ} \quad f(-X) = \frac{(-X)^2 + 1}{-X} = -\frac{X^2 + 1}{X} = -f(X)$$

នោះ $f(X)$ ជាអនុគមន៍សេស $\Rightarrow$ ខ្សែកោង (C) មាន $\omega(3; -2)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះ ។

2)- ស្រាយថានៅលើខ្សែកោង (C) មានពីរចំនុច A និង B ដែលបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំនុចនោះស្របបន្ទាត់ $y + 3x = 0$

តាង $M(x;y) \in (C)$ ចំនុចដែលបន្ទាត់ប៉ះស្របនឹងបន្ទាត់ $y + 3x = 0 \Leftrightarrow y = -3x$

មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង (C) ត្រង់ $M(x;y)$ គឺ $f'(x) = \frac{x^2 - 6x + 8}{(x-3)^2}$

ដើម្បីអោយបន្ទាត់ប៉ះនេះស្របបន្ទាត់ $y + 3x = 0 \Leftrightarrow y = -3x$ លុះត្រាតែមេគុណប្រាប់ទិសដៅរបស់វាស្មើគ្នា $\frac{x^2 - 6x + 8}{(x-3)^2} = -3 \Leftrightarrow$

$$4x^2 - 24x + 35 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{5}{2}, \ y = -\frac{9}{2} \\ x_2 = \frac{7}{2}, \ y = \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

យើងអាចយក $A\left(\frac{5}{2}; -\frac{9}{2}\right)$; $B\left(\frac{7}{2}; \frac{1}{2}\right)$

តើ A និង B មានលក្ខណៈយ៉ាងណាចំពោះផ្ចិតឆ្លុះរបស់ (C) ?

$$\frac{x_A + x_B}{2} = \frac{\frac{5}{2} + \frac{7}{2}}{2} = \frac{12}{4} = 3 = \text{អាប់ស៊ីសរបស់ } \omega$$

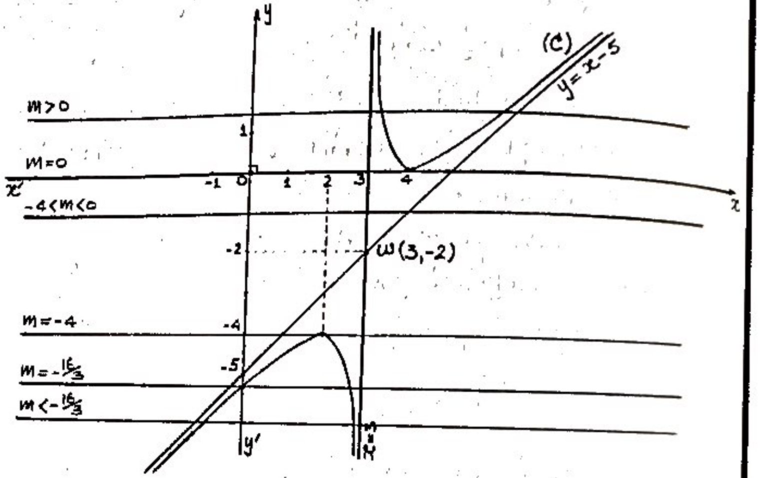
$$\frac{y_A + y_B}{2} = \frac{\frac{-9}{2} + \frac{1}{2}}{2} = \frac{-8}{4} = -2 = \text{អរដោនេរបស់ } \omega$$

ω ជាចំនុចកណ្តាលនៃ $[AB]$ រឺ A ឆ្លុះ B ចំពោះ ω

3)- ដោះស្រាយរត្តិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការ $x^2 - (m+8)x + 3m + 16 = 0$

សមីការនេះអាចសរសេរ $x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2 = m(x-3)$

$\Leftrightarrow \frac{(x-4)^2}{x-3} = m$ ជាសមីការអាប់ស៊ីសរវាងខ្សែកោង (C) និងបន្ទាត់ $y = m$ ស្រប $(x'0x)$ ។ យើងបានចំលើយក្នុងតារាងខាងក្រោម ។



m	អត្ថិភាព និង សញ្ញាឫសសមីការ
$-\infty$	សមីការមានឫសពីរ $x_1 < 0 < x_2$
$-\frac{16}{3}$	សមីការមានឫសពីរ $x_1 = 0 < x_2$
	សមីការមានឫសពីរ $0 < x_1 < x_2$
-4	សមីការមានឫសឌុប $x_1 = x_2 = 2 > 0$
	សមីការគ្មានឫស
0	សមីការមានឫសឌុប $x_1 = x_2 = 4 > 0$
$+\infty$	សមីការមានឫសពីរ $0 < x_1 < x_2$

លំហាត់

1)- សិក្សាអថេរភាពទិសដៅ និងគូសខ្សែកោង (C_1) តាងអនុគមន៍ $y = f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ ក្នុងតំរុយអរតូនរមេ (oxy) ។

2)- គូសខ្សែកោង (C_2) តាងអនុគមន៍ $y = g(x) = \left|\frac{x^2}{x-1}\right|$

3)- ដោះស្រាយអត្ថិភាព និង សញ្ញាឫសសមីការ $\left|\frac{x^2}{x-1}\right| = m$ ដោយពិភាក្សាទៅតាមតំលៃ m ។

ចំលើយ

1)- ក- **សិក្សាទិសដៅអថេរភាពអនុគមន៍** $y = f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

សរសេរអនុគមន៍នេះជារាងកាណូនិច ដោយចែកភាគយកនិងភាគបែង យើងបាន :

$$y = f(x) = \frac{x^2}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1}$$

ដែនកំនត់ $\mathcal{D} = R \setminus \{1\}$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} x + 1 + \frac{1}{x-1} = \lim_{x \to \pm\infty} x = \pm\infty$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} x + 1 + \frac{1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1} = \infty$$

$$f'(x) = \frac{\mu'\nu - \nu'\mu}{\nu^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{lll} x_1 = 0 & \Rightarrow & y = f(0) = 0 \\ x_2 = 2 & \Rightarrow & y = f(2) = 4 \end{array}\right.$$

តារាងទិសដៅអថេរភាព

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	4	↗	$+\infty$

អនុគមន៍មានតំលៃអតិបរមាស្មើ 0 ចំពោះ $x = 0$ ហើយមានតំលៃអប្បបរមាស្មើ 4 ចំពោះ $x = 2$ ។

ខ- គូសខ្សែកោង (C_1) តាងអនុគមន៍ $y = f(x)$

អាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោង (C_1) និង $(x'0x)$ ជាឫសរបស់សមីការ

$$\frac{x^2}{x-1} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0$$

ខ្សែកោង (C_1) ប៉ះ $(x'0x)$ ត្រង់គល់ 0 នៃតំរុយ (oxy) អរដោនេចំនុចប្រសព្វរវាង (C_1) និង $(y'oy)$ គឺ $y = f(0) = 0$

អាស៊ីមតូតឈរ $\lim_{x \to 1} f(x) = \infty \Rightarrow$ បន្ទាត់ $x = 1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

អាស៊ីមតូតទ្រេត $\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x-1} = 0$

$\Rightarrow$ បន្ទាត់ $y = x + 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត

អាស៊ីមតូតទាំងពីរកាត់គ្នាត្រង់ចំនុច $\omega(x = 1 \; ; \; y = 2)$

ស្រាយថា $\omega(x = 1, y = 2)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះរបស់ (C_1)

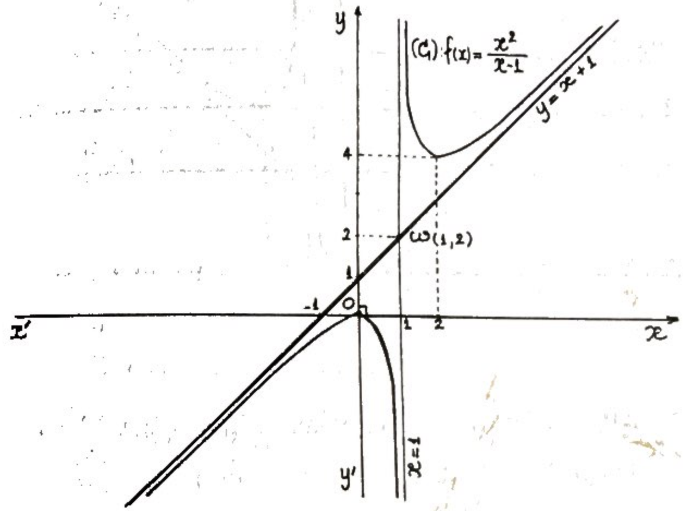
ក្នុងតំរុយអរតូនរមេ (ωXY) យើងបានតាមរូបមន្តប្តូរតំរុយ $x = 1 + X$, $y = 2 + Y$

ដូច្នេះ សមីការខ្សែកោង (C_1) អាចសរសេរ $2 + Y = \frac{(1+X)^2}{1+X-1} = \frac{1+2X+X^2}{X}$

$$Y = f(X) = \frac{X^2+2X+1}{X} - 2 = \frac{X^2+1}{X}$$

ដោយ $f(-X) = \frac{(-X)^2+1}{-X} = \frac{X^2+1}{-X} = -\frac{X^2+1}{X} = -f(X)$

$\Rightarrow f(X)$ ជាអនុគមន៍សេស $\Rightarrow \omega(x = 1 \; , \; y = 2)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះរបស់ខ្សែកោង (C_1) ។



2)- គូសខ្សែកោង (C_2) តាងអនុគមន៍ $y = g(x) = \left|\frac{x^2}{x-1}\right|$

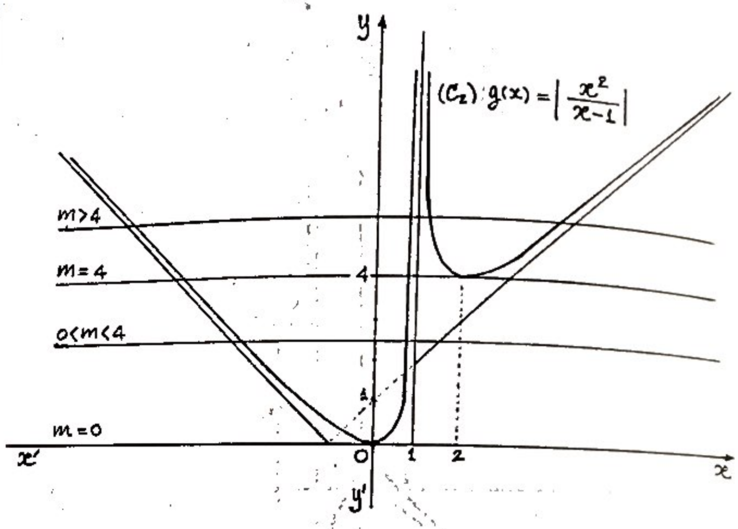
យើងអាចសរសេរ $g(x) = \left|\frac{x^2}{x-1}\right| = |f(x)|$

មានដែនកំណត់ $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$\forall x \in \mathcal{D}$, $f(x) \geq 0 \Rightarrow g(x) = |f(x)| = f(x) \Rightarrow (C_2) = (C_1)$

$\forall x \in \mathcal{D}$, $f(x) < 0 \Rightarrow g(x) = |f(x)| = -f(x) \Rightarrow (C_2)$

ជារូបឆ្លុះនៃ (C_1) ធៀប $(x'ox)$ ។



3)- ដោះស្រាយអត្ថិភាព និង សញ្ញាឫសសមីការ $\left|\frac{x^2}{x-1}\right| = m$ ជាសមីការអាប់ស៊ីស រវាងខ្សែកោង (C_2) និងបន្ទាត់ $y = m$ ស្រប $(x'ox)$ ។

m	អត្ថិភាពនិងសញ្ញាឫសសមីការ តាមក្រាភិច
$-\infty$	សមីការគ្មានឫស
0	សមីការមានឫសឌុប $x_1 = x_2 = 0$
	សមីការមានឫសពីរ $x_1 < 0 < x_2$
4	សមីការមានឫសបី $x_1 < 0 < x_2 < x_3 = 2$
$+\infty$	សមីការមានឫសបួន $x_1 < 0 < x_2 < x_3 < x_4$

លំហាត់

1)- សិក្សាទិសដៅអថេរភាព និង គូសខ្សែកោង (C_1) តាងអនុគមន៍

$$y = f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x + 2}$$ ក្នុងតំរុយអរតូនរមេ ។

2)- គូសខ្សែកោង (C_2) តាងអនុគមន៍ $y = g(x) = \left|\frac{x^2 - x - 2}{x + 2}\right|$ ក្នុងតំរុយអរតូនរមេ (oxy) ។

3)- ដោះស្រាយអត្ថិភាព និង សញ្ញាឫសសមីការ

$$\left|\frac{x^2 - x - 2}{x + 2}\right| = m$$ ពិភាក្សាតាមតំលៃ m ។

ចំលើយ

1)- ក- សិក្សាទិសដៅអថេរភាពអនុគមន៍ $y = f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x + 2}$

សរសេរ $f(x)$ ជារាងកាណូនិច ដោយចែកភាគយកនិងភាគបែង យើងបាន

$$y = f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x + 2} = x - 3 + \frac{4}{x + 2}$$

$$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} x - 3 + \frac{4}{x + 2} = \lim_{x \to \pm\infty} x = \pm\infty$$

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} x - 3 + \frac{4}{x + 2} = \lim_{x \to -2} \frac{4}{x + 2} = \infty$$

$$f'(x) = \frac{\mu'\nu - \nu'\mu}{\nu^2} = \frac{2x^2 + 4x - x - 2 - x^2 + x + 2}{(x + 2)^2} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 4x}{(x + 2)^2} = \frac{x(x + 4)}{(x + 2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = -1 \\ x = -4 \Rightarrow y = -9 \end{cases}$$

បើ $x = 0 \Rightarrow y = f(0) = -1$

$x = -4 \Rightarrow y = f(-4) = -9$

តារាងទិសដៅអថេរភាព

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-9	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	-1	↗	$+\infty$

អនុគមន៍មានតំលៃអតិបរមាស្មើ -9 ចំពោះ $x = -4$ ហើយមានតំលៃអប្បបរមាស្មើ -1 ចំពោះ $x = 0$ ។

ខ. គូសខ្សែកោង (C_1) តាងអនុគមន៍ $y = f(x)$

អាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វរវាង (C_1) និង $(x'ox)$ ជាឫសរបស់សមីការ

$$\frac{x^2-x-2}{x+2} = 0 \Leftrightarrow x^2-x-2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{array}\right.$$

ខ្សែកោង (C_1) កាត់ $(x'ox)$ បានពីរចំនុចមានអាប់ស៊ីសរៀងគ្នា $x_1 = -1,\ x_2 = 2$

អរដោនេចំនុចប្រសព្វរវាង (C_1) និង $(y'oy)$ គឺ $y = f(0) = -1$

$\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \infty \quad \Rightarrow$ បន្ទាត់ $x = -2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - (x-3)] = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{4}{x+2} = 0$ បន្ទាត់ $y = x - 3$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត

អាស៊ីមតូតទាំងពីរកាត់គ្នាត្រង់ចំនុច $\omega(x = -2;\ y = -5)$

ក្នុងតំរុយ (ωXY) យើងបានតាមរូបមន្តនៃការដូរតំរុយ

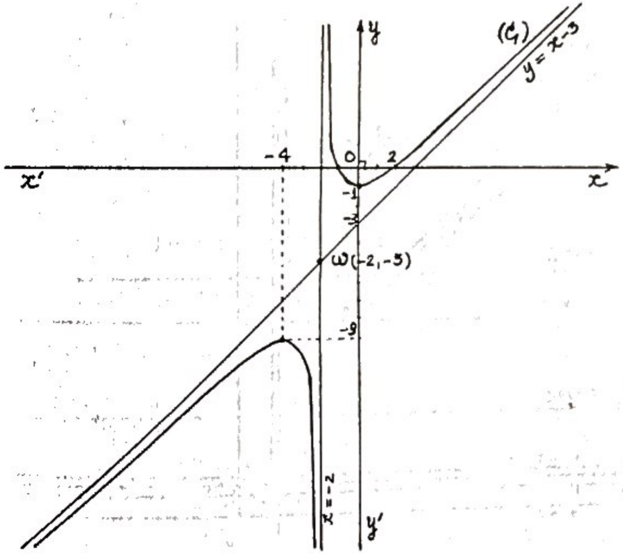
$x = -2 + X$, $y = -5 + Y$ នោះសមីការខ្សែកោង (C_1) អាចសរសេរ $-5 + Y = \frac{(-2+X)^2 - (-2+X) - 2}{-2+X+2} \Rightarrow$

$$Y = \frac{X^2 - 5X + 4}{X} + 5 = \frac{X^2 - 5X + 4 + 5X}{X} = \frac{X^2+4}{X}$$

$$Y = f(X) = \frac{X^2+4}{X}$$

$$f(-X) = \frac{(-X)^2+4}{-X} = \frac{X^2+4}{-X} = -\frac{X^2+4}{X} = -f(X)$$

ដោយ $f(-X) = -f(X) \Rightarrow f(X)$ ជាអនុគមន៍សេស $\Rightarrow \omega(x = -2;\ y = -5)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះរបស់ខ្សែកោង (C_1)



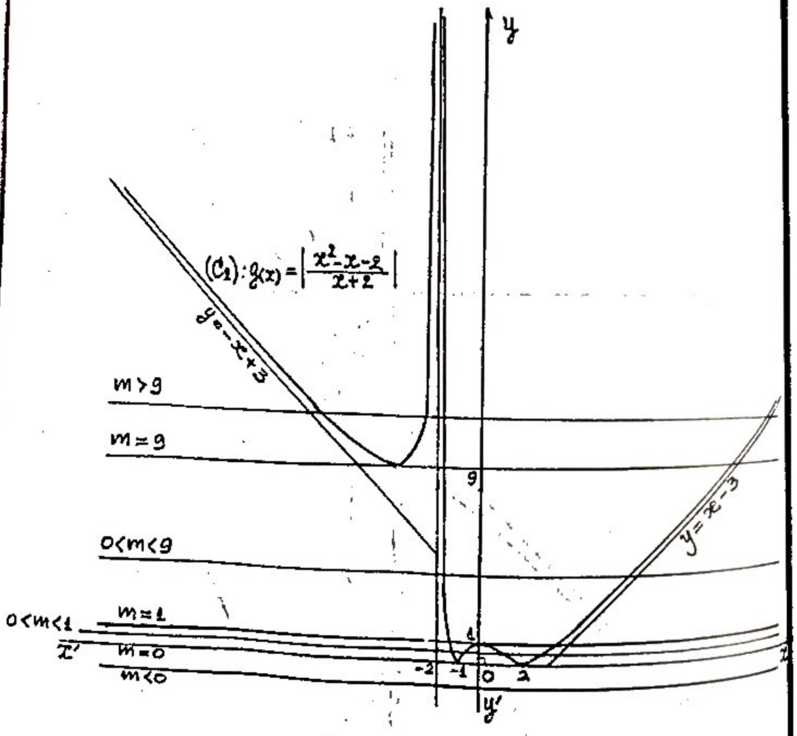
2) គូសខ្សែកោង (C_2) តាងអនុគមន៍ $y = g(x) = \left|\frac{x^2 - x - 2}{x + 2}\right| = |f(x)|$

អនុគមន៍មានដែនកំណត់ $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$\forall x \in \mathcal{D},\ f(x) \geq 0 \Rightarrow g(x) = |f(x)| = f(x) \Rightarrow (C_2) = (C_1)$

$\forall x \in \mathcal{D},\ f(x) < 0 \Rightarrow g(x) = |f(x)| = -f(x) \Rightarrow (C_2)$ ជារូបឆ្លុះនៃ

(C_1) ធៀបនឹង $(x'ox)$ ។ យើងអាចទាញសំណង់ (C_2)



m	អត្ថិភាពនិងសញ្ញាឫសសមីការ $\left\|\frac{x^2 - x - 2}{x + 2}\right\| = m$
$-\infty$	សមីការគ្មានឫស
0	សមីការមានឫសពីរ $x_1 = -1 < 0 < x_2 = 2$
	សមីការមានឫសបួន $x_1 < x_2 < 0 < x_3 < x_4$
1	សមីការមានឫសបី $x_1 < x_2 = 0 < x_3$
	សមីការមានឫសពីរ $x_1 < 0 < x_2$
9	សមីការមានឫសបី $x_1 = -4 < x_2 < 0 < x_3$
$+\infty$	សមីការមានឫសបួន $x_1 < x_2 < x_3 < 0 < x_4$

លំហាត់

1)- ក. សិក្សាទិសដៅអថេរភាព អនុគមន៍ : $y = f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{2x - 4}$

ខ. គូសខ្សែកោង (C_1) តាងអនុគមន៍នេះក្នុងតំរុយអរតូនរមេ (oxy)

2)- គូសខ្សែកោង (C_2) តាងអនុគមន៍ $y = g(x) = \left|\frac{x^2 - 2x + 4}{2x - 4}\right|$

3)- ដោះស្រាយអត្ថិភាព និង សញ្ញាឫសសមីការ

$\left|\frac{x^2 - 2x + 4}{2x - 4}\right| - K = 0$ ដោយពិភាក្សាទៅតាមតំលៃ K

ចំលើយ

1)- ក. សិក្សាទិសដៅអថេរភាពអនុគមន៍ $y = f(x) = \dfrac{x^2-2x+4}{2x-4}$

សរសេរ $f(x)$ ជារាងកាណូនិច ដោយចែកភាគយកនិងភាគបែង

យើងបាន $y = f(x) = \dfrac{x^2-2x+4}{2x-4} = \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x-2}$

អនុគមន៍មានដែនកំនត់ $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{2} + \frac{2}{x-2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{2} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x}{2} + \frac{2}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{2}{x-2} = \infty$$

$$f'(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{x^2-4x}{(2x-4)^2} = \frac{x(x-4)}{(2x-4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \Rightarrow y = f(0) = -1 \\ x_2 = 4 \Rightarrow y = f(4) = 3 \end{cases}$$

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

អនុគមន៍មានតំលៃអតិបរមា -1 ត្រង់ $x = 0$ និងមានអប្បបរមា 3 ត្រង់ $x = 4$

ខ. គូសខ្សែកោង (C_1) តាងអនុគមន៍ $y = f(x) = \dfrac{x^2-2x+4}{2x-4}$

អាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោង (C_1) និងអ័ក្ស $(x'ox)$ ជាឫសរបស់សមីការ

$\dfrac{x^2-2x+4}{2x-4} = 0 \Leftrightarrow x^2-2x+4 = 0$ សមីការដឺក្រេទី2នៃ x

ដែលមាន $\Delta' = 1-4 = -3 < 0 \Rightarrow$ សមីការគ្មានឫស

ដូច្នេះ (C_1) មិនកាត់ $(x'ox)$ ទេ ។

អរដោនេចំនុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោង (C_1) និងអ័ក្ស $(y'oy)$

គឺ $y = f(0) = -1$

$\lim_{x\to 2} f(x) = \infty \Rightarrow$ បន្ទាត់ $x = 2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

$\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x) - \dfrac{x}{2}\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{2}{x-2} = 0$ បន្ទាត់ $y = \dfrac{x}{2}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត

អាស៊ីមតូតទាំងពីរកាត់គ្នាត្រង់ចំនុច $\omega\left(x = 2;\ y = 2\cdot\dfrac{1}{2} = 1\right)$

ក្នុងតំរុយ (ωXY) យើងបានតាមរូបមន្តនៃការប្តូរតំរុយ

$x = 2 + X$; $y = 1 + Y$ នោះយើងអាចសរសេរសមីការ (C_1)

$$1 + Y = \frac{(1+X)^2 - 2(2+X) + 4}{2(2+X) - 4} = \frac{X^2+2X+4}{2X} \Rightarrow$$

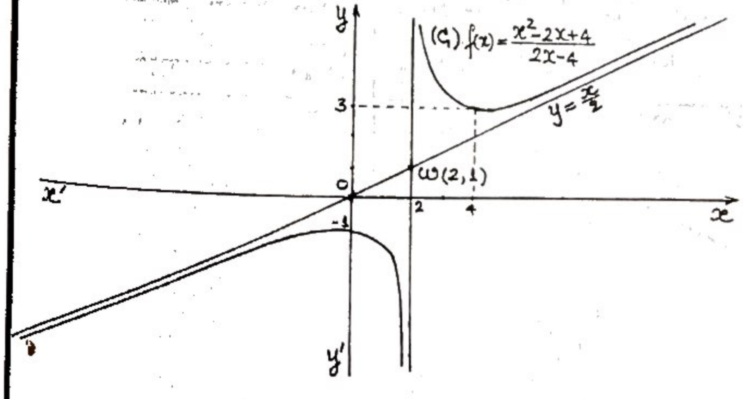
$$Y = \frac{X^2+2X+4}{2X} - 1 = \frac{X^2+2X+4-2X}{2X} = \frac{X^2+4}{2X} = f(X)$$

ដោយ $f(-X) = \dfrac{(-X)^2+4}{2(-X)} = \dfrac{X^2+4}{-2X} = -\dfrac{X^2+4}{2X} = -f(X)$

$\Rightarrow f(X)$ ជាអនុគមន៍សេស $\Rightarrow \omega(x = 2,\ y = 1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះរបស់ខ្សែកោង (C_1) ។

ខ្សែកោង (C_1) មិនកាត់ $(x'ox)$ ទេ កាត់ $(y'oy)$ ត្រង់ចំនុចមានអរដោនេ $y = -1$ ។

ខ្សែកោង (C_1) មានចំនុច $\omega(x = 2;\ y = 1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះ



2)- គូសខ្សែកោង (C_2) តាងអនុគមន៍ $y = g(x) = \left|\frac{x^2 - 2x + 4}{2x - 4}\right|$

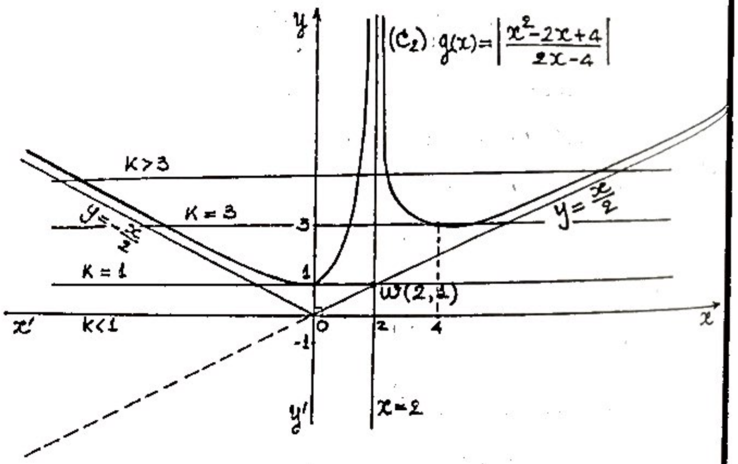
ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $g(x)$ $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$\forall x \in \mathcal{D}$ យើងបាន $g(x) = \left|\frac{x^2 - 2x + 4}{2x - 4}\right| = |f(x)| \geq 0$

- បើ $x \in \mathcal{D}$, $f(x) \geq 0 \Rightarrow g(x) = f(x)$ ដូច្នេះ យើងបាន $(C_2) = (C_1)$

- បើ $x \in \mathcal{D}$, $f(x) < 0 \Rightarrow g(x) = -f(x)$ ដូច្នេះ យើងបាន (C_2) ជារូបឆ្លុះ (C_1) ធៀបនឹង $(x'ox)$

យើងអាចទាញសំណង់ (C_2) ពី (C_1) បាន



3)- ដោះស្រាយអត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការ $\left|\frac{x^2 - 2x + 4}{2x - 4}\right| - K = 0$

សមីការនេះអាចសរសេរ $\left|\frac{x^2 - 2x + 4}{2x - 4}\right| = K$ ជាសមីការអាប់ស៊ីសរវាងខ្សែកោង (C_2) និងបន្ទាត់ $y = K$ ស្រប $(x'ox)$ យើងបានចំលើយតាមក្រាភិចក្នុងតារាងខាងក្រោម

K	អត្ថិភាព និង សញ្ញាឫសសមីការតាមក្រាភិច
$-\infty$	សមីការគ្មានឫស
1	សមីការមានឫសឌុប $x_1 = x_2 = 0$
	សមីការមានឫសពីរ $x_1 < 0 < x_2$
3	សមីការមានឫសបី $x_1 < 0 < x_2 < x_3 = 4$
$+\infty$	សមីការមានឫសបួន $x_1 < 0 < x_2 < x_3 < x_4$

លំហាត់

1/. សិក្សាអថេរភាពទិសដៅ និងគូសខ្សែកោង (C_1) តាងអនុគមន៍ $y = f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ ។

2/. គូសខ្សែកោង (C_2) តាងអនុគមន៍ $y = g(x) = \frac{x^2}{|x|-1}$ ។

3/. ដោះស្រាយអត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការ $x^2 - m|x| + m = 0$ ដោយពិភាក្សាទៅតាមតំលៃនៃ m ។

ចំលើយ

1/. ក- សិក្សាទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $y = f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ សរសេរ $f(x)$ ជារាងកាណូនិច ដោយចែកភាគយកនិងភាគបែង

យើងបាន $f(x) = \frac{x^2}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1}$

ដែនកំនត់ $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} x + 1 + \frac{1}{x-1} = \lim_{x \to \pm\infty} x = \pm\infty$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} x + 1 + \frac{1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1} = \infty$$

$$f'(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \Rightarrow y_1 = f(0) = 0 \\ x_2 = 2 \Rightarrow y_2 = f(2) = 4 \end{array} \right.$$

តារាងទិសដៅអថេរភាព

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	4	↗	$+\infty$

អនុគមន៍មានតំលៃអតិបរមាស្មើ 0 ចំពោះ $x = 0$ ហើយមានតំលៃអប្បបរមាស្មើ 4 ចំពោះ $x = 2$ ។

ខ. គូសខ្សែកោង (C_1) តាងអនុគមន៍ $y = f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ អាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វរវាង (C_1) និង $(x'ox)$ ជាឫសនៃសមីការ $\frac{x^2}{x-1} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0$

ដូច្នេះ ខ្សែកោង (C_1) ប៉ះ $(x'ox)$ ត្រង់គល់ O ។

អរដោនេចំនុចប្រសព្វរវាង (C_1) និង $(y'oy)$ គឺ $y = f(o) = o$

អាស៊ីមតូតឈរ $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} x + 1 + \frac{1}{x-1} = \infty$

នោះយើងបានបន្ទាត់ $x = 1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

អាស៊ីមតូតទ្រេត $\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x-1} = 0$

$\Rightarrow$ បន្ទាត់ $y = x + 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត

អាស៊ីមតូតទាំងពីរកាត់គ្នាត្រង់ចំនុច $\omega(x = 1, y = 2)$ ក្នុងតំរុយ (ωXY)

យើងបានតាមរូបមន្ត ដូរតំរុយ $x = 1 + X$, $y = 2 + Y$

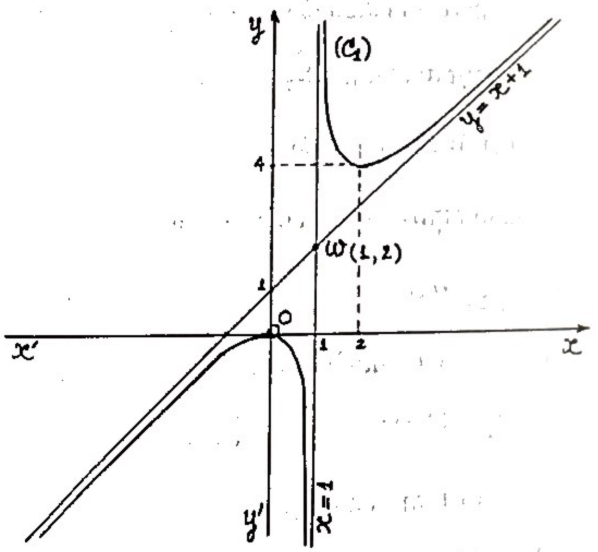
សមីការខ្សែកោង (C_1) អាចចសរសេរ $2 + Y = \frac{(1+X)^2}{1+X-1} = \frac{X^2+2X+1}{X}$

$$Y = f(X) = \frac{X^2+2X+1}{X} - 2 = \frac{X^2+2X+1-2X}{X}$$

$$= \frac{X^2+1}{X} \Rightarrow Y = f(X) = \frac{X^2+1}{X}$$

ដោយ $f(-X) = \frac{(-X)^2+1}{-X} = \frac{X^2+1}{-X} = -\frac{X^2+1}{X} = -f(X)$

$\Rightarrow f(X)$ ជាអនុគមន៍សេស $\Rightarrow \omega(x = 1, y = 2)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះរបស់ខ្សែកោង (C_1) ។



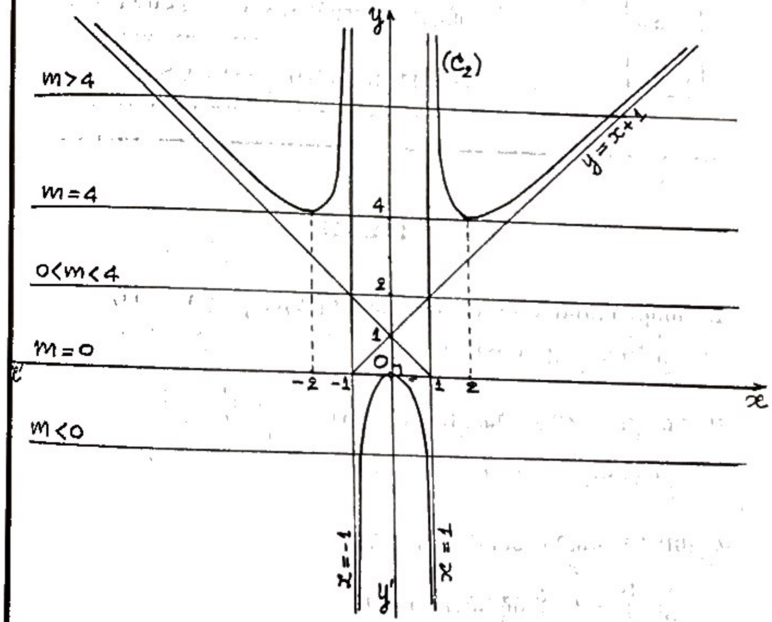
ង. គូសខ្សែកោង (C_2) តាងអនុគមន៍ $y = g(x) = \frac{x^2}{|x|-1}$

ដែនកំនត់ $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$

$\forall x \in \mathcal{D}$, $g(-x) = \frac{(-x)^2}{|-x|-1} = \frac{x^2}{|x|-1} = g(x) \Rightarrow g(x)$ជាអនុគមន៍គូ

បើ $x \geq 0$ និង $x \neq 1 \Rightarrow g(x) = f(x) = \frac{x^2}{x-1} \Rightarrow (C_2) = (C_1)$

បើ $x < 0$ និង $x \neq -1$ យើងបាន (C_2) ជារូបឆ្លុះនៃ (C_1) ធៀប $(y'oy)$ ព្រោះ $g(x)$ ជាអនុគមន៍គូ ។ យើងអាចគូស (C_2)



3/. ដោះស្រាយអត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការ $x^2 - m|x| + m = 0$

សមីការនេះអាចសរសេរ $x^2 = m(|x|-1) \Leftrightarrow \frac{x^2}{|x|-1} = m$

ជាសមីការអាប់ស៊ីសរវាងខ្សែកោង (C_2) និងបន្ទាត់ $y = m$ ស្របនឹង $(x'ox)$

m	អត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការ $x^2 - m\lvert x\rvert + m = 0$ តាមក្រាភិច
$-\infty$	សមីការមានឫសពីរ $x_1 < 0 < x_2$
0	សមីការមានឫសឌុប $x_1 = x_2 = 0$
4	សមីការមានឫសឌុបពីរ $x_1 = x_2 = -2 < 0 < x_3 = x_4 = 2$
$+\infty$	សមីការមានឫសបួន $x_1 < x_2 < 0 < x_3 < x_4$

លំហាត់

1/. សិក្សាទិសដៅអថេរភាព និងគូសខ្សែកោង (C_1) តាងអនុគមន៍ $y = f(x) = \frac{(x-4)^2}{x-3}$ ក្នុងតំរុយអរតូនរមេ (oxy) ។

2/. គូសខ្សែកោង (C_2) តាងអនុគមន៍ $y = g(x) = \frac{(|x|-4)^2}{|x|-3}$ ក្នុងតំរុយអរតូនរមេ oxy ។

3/. ដោះស្រាយអត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការ $\frac{(|x|-4)^2}{|x|-3} = m$ ពិភាក្សាតាមតំលៃ m ។

ចំលើយ

1/. ក. សិក្សាទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $y = f(x) = \frac{(x-4)^2}{x-3}$

សរសេរអនុគមន៍ $f(x) = \frac{(x-4)^2}{x-3} = \frac{x^2-8x+16}{x-3}$ ជាពងកាណូនិច

ដោយចែកភាគយកនឹងភាគបែង យើងបាន :

$$y = f(x) = \frac{(x-4)^2}{x-3} = \frac{x^2-8x+16}{x-3} = x - 5 + \frac{1}{x-3}$$

ដែនកំនត់ $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} x - 5 + \frac{1}{x-3} = \lim_{x \to \pm\infty} x = \pm\infty$$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} x - 5 + \frac{1}{x-3} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x-3} = \infty$$

$$f'(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{x^2-6x+8}{(x-3)^2} = \frac{(x-2)(x-4)}{(x-3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 2 \Rightarrow y = f(2) = -4 \\ x = 4 \Rightarrow y = f(4) = 0 \end{array}\right.$$

តារាងទិសដៅអថេរភាព

x	$-\infty$		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-4	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0	↗	$+\infty$

អនុគមន៍មានតំលៃអតិបរមាស្មើ -4 ចំពោះ $x = 2$ និងមានតំលៃអប្បបរមាស្មើ 0 ចំពោះ $x = 4$ ។

ខ. គូសខ្សែកោង (C_1)

អាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វរវាង (C_1) និង $(x'ox)$ ជាឫសនៃសមីការ

$\frac{(x-4)^2}{x-3} = 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 = 0 \Leftrightarrow x-4 = 0 \Leftrightarrow$

$x_1 = x_2 = 4$ $\Rightarrow$ ខ្សែកោង (C_1) ប៉ះ $(y'oy)$ ត្រង់ $x = 4$

អរដោនេចំនុចប្រសព្វរវាង (C_1) និង $(y'oy)$ គឺ $y = f(0) = -\frac{16}{3}$

អាស៊ីមតូតឈរ $\lim_{x \to 3} f(x) = \infty \Rightarrow$ បន្ទាត់ $x = 3$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត $\lim_{x \to \pm\infty} [f(x)-(x-5)] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x-3} = 0$

$\Rightarrow$ បន្ទាត់ $y = x-5$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត

អាស៊ីមតូតទាំងពីរកាត់គ្នាត្រង់ចំនុច $\omega(x = 3 , y = -2)$

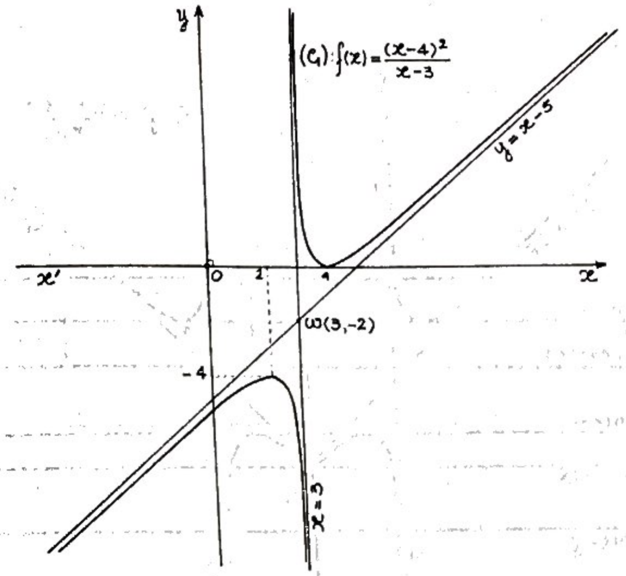
ក្នុងតំរុយ (ωXY) តាមរូបមន្តប្តូរតំរុយ យើងបាន $x = 3+X$, $y = -2+Y$

សមីការខ្សែកោង (C_1) អាចសរសេរ $-2+Y = \frac{(3+X-4)^2}{3+X-3} = \frac{X^2-2X+1}{X}$

$$Y = F(X) = \frac{X^2-2X+1}{X} + 2 = \frac{X^2+1}{X}$$

$$F(-X) = \frac{(-X)^2+1}{-X} = \frac{X^2+1}{-X} = -\frac{X^2+1}{X} = -F(X)$$

$\Rightarrow F(X)$ ជាអនុគមន៍សេស $\Rightarrow \omega(x = 3 ; y = -2)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះរបស់ខ្សែកោង (C_1) ។



2/. គូសខ្សែកោង (C_2) តាងអនុគមន៍ $y = g(x) = \frac{(|x|-4)^2}{|x|-3}$

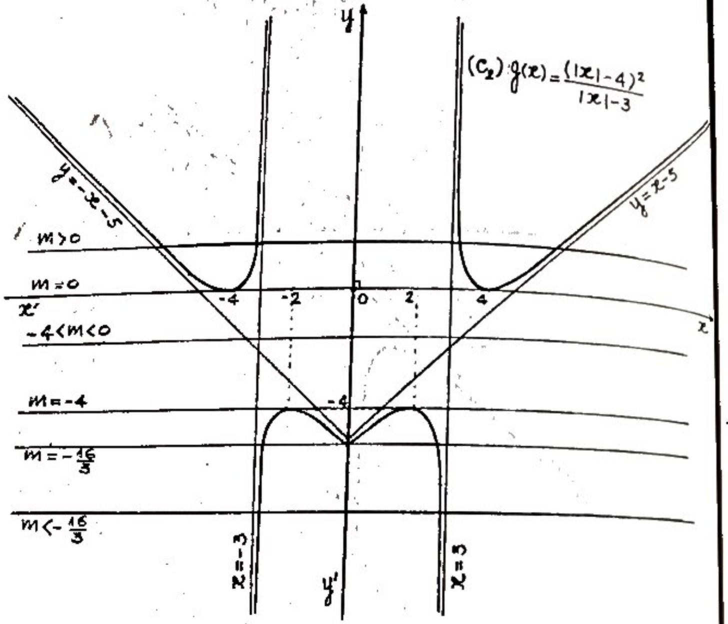
$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3;3\}$

$\forall x \in \mathcal{D},$ $g(-x) = \frac{(|-x|-4)^2}{(|-x|-3)^2} = \frac{(|x|-4)^2}{(|x|-3)} = g(x)$

$g(x)$ ជាអនុគមន៍គូ $\Rightarrow (C_2)$ មាន $(y'0y)$ ជាអ័ក្សឆ្លុះ

បើ $x \geq 0$ និង $x \neq 3 \Rightarrow g(x) = \frac{(x-4)^2}{(x-3)} \Rightarrow (C_2) = (C_1)$

បើ $x<0$ និង $x \neq -3$ នោះ (C_2) ជារូបឆ្លុះនៃ (C_1) ធៀបនឹង $(y'0y)$ ។



3/. ដោះស្រាយអត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការ $\frac{(|x|-4)^2}{|x|-3} = m$ ជាសមីការអាប់ស៊ីសរវាងខ្សែកោង (C_2) និងបន្ទាត់ $y = m$

m	អត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការ តាមក្រាភិច
$-\infty$	
	សមីការមានឫសពីរ $x_1 < 0 < x_2$
$-\frac{16}{3}$	សមីការមានឫសបី $x_1 < x_2 = 0 < x_3$
	សមីការមានឫសបួន $x_1 < x_2 < 0 < x_3 < x_4$
-4	សមីការមានឫសឌុបពីរ $x_1 = -2 < 0 < x_2 = 2$
	សមីការគ្មានឫស
0	សមីការមានឫសឌុបពីរ $x_1 = -4 < 0 < x_2 = 4$
	សមីការមានឫសបួន $x_1 < x_2 < 0 < x_3 < x_4$
$+\infty$	

លំហាត់

1/. សិក្សាទិសដៅអថេរភាព និងគូសខ្សែកោង (C_1) តាងអនុគមន៍

$$y = f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{2x - 4}$$ ក្នុងតំរុយអរតូនរមេ (oxy) ។

2/. គូសខ្សែកោង (C_2) តាងអនុគមន៍ $y = g(x) = \frac{x^2 - 2|x| + 4}{2|x| - 4}$

3/. ដោះស្រាយអត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការ

$$\frac{x^2 - 2|x| + 4}{2|x| - 4} - m = 0$$ ដោយពិភាក្សាទៅតាមតំលៃ m ។

ចំលើយ

1/. ក. សិក្សាទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $y = f(x) = \frac{x^2-2x+4}{2x-4}$

សរសេរ $f(x)$ ជារាងកាណូនិច ដោយចែកភាគយក និងភាគបែង

យើងបាន $y = f(x) = \frac{x^2-2x+4}{2x-4} = \frac{x}{2} + \frac{x}{x-2}$

ដែនកំណត់ : $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{2} + \frac{2}{x-2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{2} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x}{2} + \frac{2}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{2}{x-2} = \pm\infty$$

$$f'(x) = \frac{u'v-v'u}{v^2} = \frac{x^2-4x}{(2x-4)^2} = \frac{x(x-4)}{(2x-4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x-4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = f(0) = -1 \\ x = 4 \Rightarrow y = f(4) = 3 \end{array}\right.$$

តារាងទិសដៅអថេរភាព

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	3	↗	$+\infty$

អនុគមន៍មានតំលៃអតិបរមាស្មើ -1 ចំពោះ $x = 0$ និងមានតំលៃអប្បបរមាស្មើ 3 ចំពោះ $x = 4$ ។

ខ/. គូសខ្សែកោង (C_1) តាងអនុគមន៍ $y = f(x) = \frac{x^2-2x+4}{2x-4}$

អាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោង (C_1) និងអ័ក្ស $(x'ox)$ ជាឫសរបស់សមីការ

$$\frac{x^2-2x+4}{2x-4} = 0 \Leftrightarrow x^2-2x+4 = 0$$

ដែលមាន $\Delta' = 1-4 = -3 < 0 \Rightarrow$ សមីការគ្មានឫស

ដូច្នេះខ្សែកោង (C_1) មិនកាត់ $(x'0x)$ ទេ ។

អរដោនេចំនុចប្រសព្វរវាង (C_1) និង $(y'0y)$ គឺ $y = f(o) = -1$

អាស៊ីមតូតឈរ $\lim_{x\to 2} f(x) = \infty \Rightarrow$ បន្ទាត់ $x = 2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត $\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x) - \frac{x}{2}\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{x-2} = 0$

$\Rightarrow$ បន្ទាត់ $y = \frac{x}{2}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត

អាស៊ីមតូតទាំងពីរកាត់គ្នាត្រង់ចំនុច $\omega(x = 2 , y = 1)$

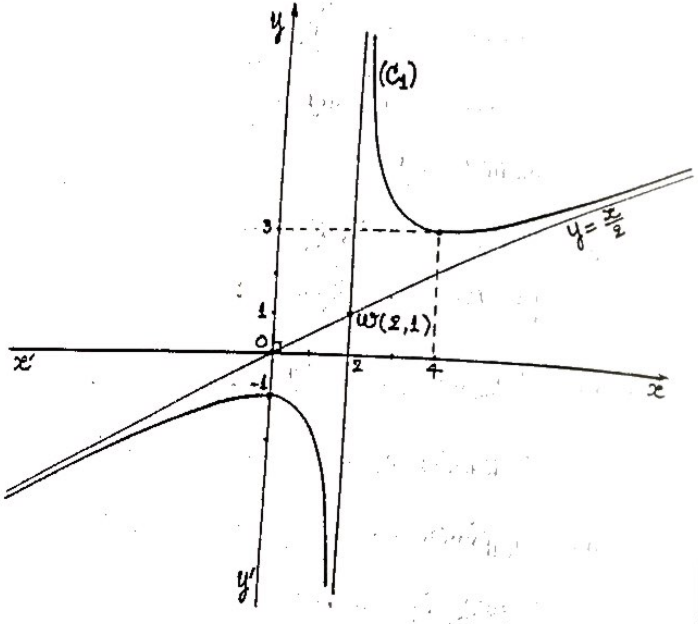
ក្នុងតំរុយ (ωXY) តាមរូបមន្តដូរតំរុយ យើងបាន $x = 2+X$, $y = 1+Y$

ហើយសមីការ (C_1) អាចសរសេរ $1+Y = \frac{(2+X)^2-2(2+X)+4}{2(2+X)-4}$

$Y = F(X) = \frac{X^2+4}{X}$ តែដោយ

$$F(-X) = \frac{(-X)^2+4}{-X} = \frac{X^2+4}{-X} = -\frac{X^2+4}{X} = -F(X)$$

$\Rightarrow F(X)$ ជាអនុគមន៍សេស $\Rightarrow \omega(2 ; 1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះរបស់ (C_1)



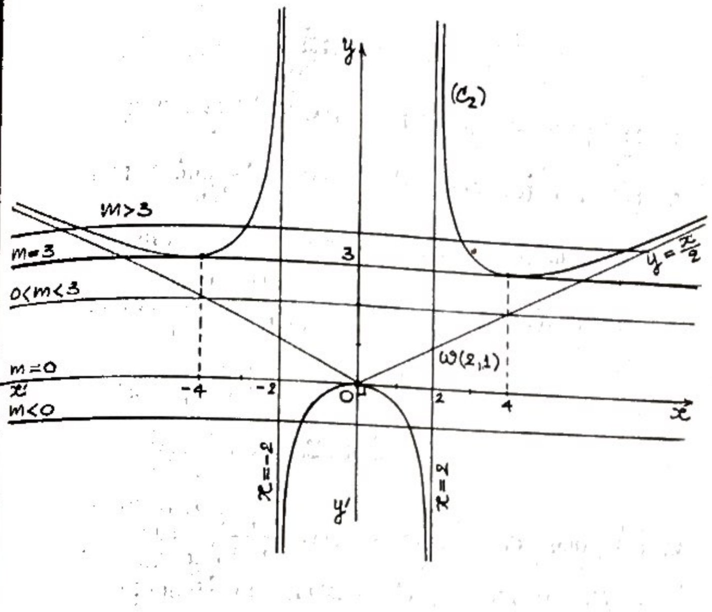
2/. គូសខ្សែកោង (C_2) តាងអនុគមន៍ $y = g(x) = \frac{x^2 - 2|x| + 4}{2|x| - 4}$

ដែនកំណត់ $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2 \, ; \, 2\}$

បើ $x \geq 0$ និង $x \neq 2 \Rightarrow g(x) = f(x) \Rightarrow (C_2) = (C_1)$

បើ $x < 0$ និង $x \neq -2$ នោះ (C_2) ជារូបឆ្លុះនៃ (C_1) ធៀបនឹង $(y'0y)$ ។

យើងអាចទាញសំណង់ (C_2) បានពី (C_1)



3/. ដោះស្រាយអត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការ $\frac{x^2 - 2|x| + 4}{2|x| - 4} = m$

ជាសមីការអាប់ស៊ីសរវាងខ្សែកោង (C_2) និងបន្ទាត់ $y = m$

m	អត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការតាមក្រាភិច
$-\infty$	
	សមីការមានឫសពីរ $x_1 < 0 < x_2$
0	សមីការមានឫសឌុប $x_1 = x_2 = 0$
	សមីការគ្មានឫស
3	សមីការមានឫសឌុបពីរ $x_1 = -2 < 0 < x_2 = 2$
	សមីការមានឫសបួន $x_1 < x_2 < 0 < x_3 < x_4$
$+\infty$	

លំហាត់

1/. គូសខ្សែកោង (C_1) តាងអនុគមន៍ $y = f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ ក្នុងតំរុយអរតូនរមេ (oxy) ។

2/. គូសខ្សែកោង (C_2) តាងអនុគមន៍ $y = g(x) = \dfrac{x^2}{|x|-1}$ ក្នុងតំរុយអរតូនរមេ (oxy)

3/. គូសខ្សែកោង (C_3) តាងអនុគមន៍ $y = h(x) = \left|\dfrac{x^2}{|x|-1}\right|$ ក្នុងតំរុយអរតូនរមេ (oxy)

4/. ដោះស្រាយអត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការ $\left|\dfrac{x^2}{|x|-1}\right| - m = 0$ ពិភាក្សាតាមតំលៃ m

---

ចំលើយ

1/. គូសខ្សែកោង (C_1) តាងអនុគមន៍ $y = f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

សរសេរ $f(x)$ ជារាងកាណូនិច ដោយចែកភាគយក និងភាគបែង

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1}$$

ដែនកំនត់ $\mathcal{D}_1 = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x + 1 + \frac{1}{x-1} = \lim_{x\to\pm\infty} x = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} x + 1 + \frac{1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} = \infty$$

$$f'(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 0 \\ x_2 = 4 \Rightarrow y_4 \end{cases}$$

x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−	‖	−	0	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	4	↗ $+\infty$

$\lim_{x\to 1} f(x) = \infty \Rightarrow$ បន្ទាត់ $x = 1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

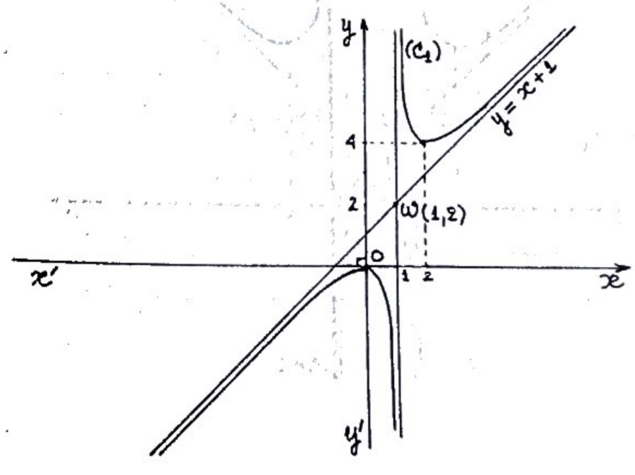
$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x-1} = 0$$

$\Rightarrow$ បន្ទាត់ $y = x + 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត

ខ្សែកោង (C_1) កាត់ $(x'ox)$ ត្រង់ចំនុច មានអាប់ស៊ីសជាឫសនៃសមីការ

$$\frac{x^2}{x-1} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0$$

ខ្សែកោង (C_1) កាត់ $(y'oy)$ ត្រង់ចំនុចអរដោនេ $y = f(0) = 0$ អាស៊ីមតូតទាំងពីរកាត់គ្នាត្រង់ $\omega(x = 1 \,;\, y = 2)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះរបស់ខ្សែកោង (C_1) ។



2/. គូសខ្សែកោង (C_2) តាងអនុគមន៍ $y = fg(x) = \frac{x^2}{|x|-1}$

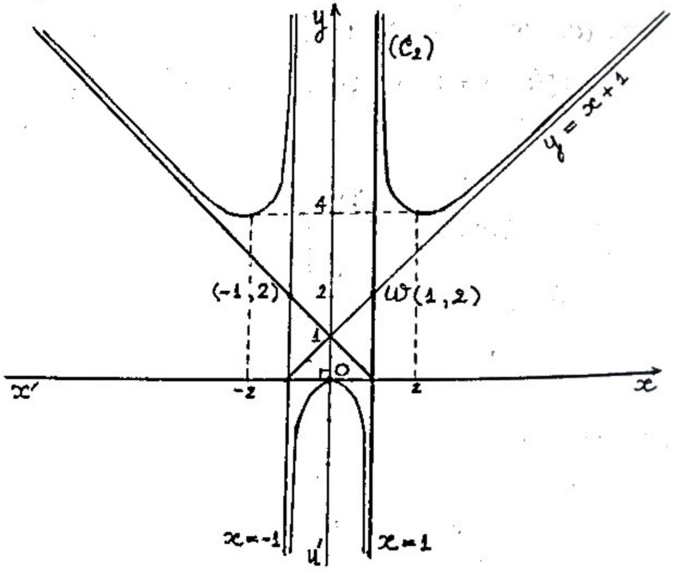
ដែនកំនត់ $\mathcal{D}_2 = \mathbb{R} \setminus \{-1 \ ; \ 1\}$

$\forall x \in \mathcal{D}_2$, $g(-x) = \frac{(-x)^2}{|-x|-1} = \frac{x^2}{|x|-1} = g(x) \Rightarrow g(x)$

ជាអនុគមន៍គូ $\Rightarrow (y'oy)$ ជាអ័ក្សឆ្លុះរបស់ (C_2) ។

បើ $x \geq 0$ និង $x \neq 1 \Rightarrow g(x) = f(x) = \frac{x^2}{x-2} \Rightarrow$ ខ្សែកោង $(C_2) = (C_1)$

បើ $x < 0$ និង $x \neq -1 \Rightarrow (C_2)$ ជារូបឆ្លុះនៃ (C_1) ធៀប $(y'oy)$



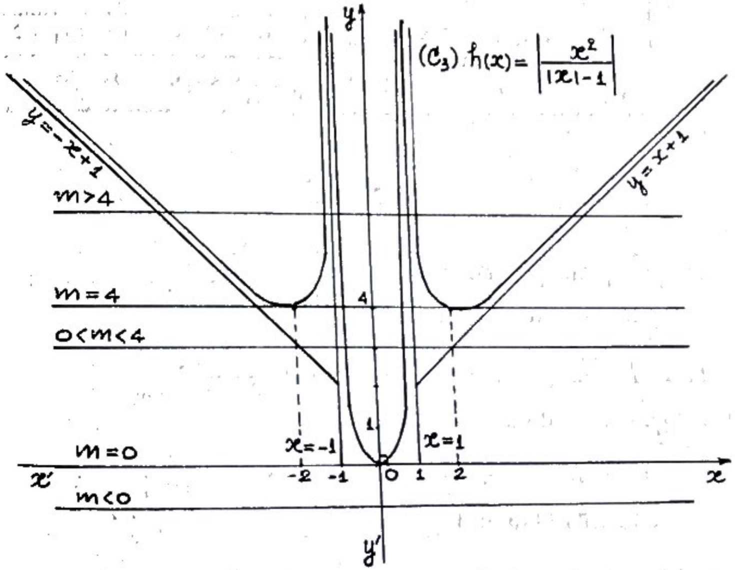
3/. គូសខ្សែកោង (C_3) តាងអនុគមន៍ $y = h(x) = \left|\frac{x^2}{|x|-1}\right|$

$h(x) = |g(x)| = \left|\frac{x^2}{|x|-1}\right|$ មានដែនកំនត់ $\mathcal{D}_3 = \mathcal{D}_2 = \mathbb{R} \setminus \{-1 \ ; \ 1\}$

$\forall x \in \mathcal{D}_3$, ដែល $g(x) \geq 0 \Rightarrow h(x) = g(x) \Rightarrow (C_3) = (C_2)$

$\forall x \in \mathcal{D}_3$, ដែល $g(x) < 0 \Rightarrow h(x) = -g(x) \Rightarrow (C_3)$ ជារូបឆ្លុះនៃ (C_2) ធៀប $(x'ox)$ ។

ដូច្នេះ យើងអាចទាញសំនង់ខ្សែកោង (C_3) បាន (C_2) ។



4/. ដោះស្រាយអត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការ $\left|\frac{x^2}{|x|-1}\right| - m = 0$

សមីការនេះអាចសរសេរ $\left|\frac{x^2}{|x|-1}\right| = m$ ជាសមីការអាប់ស៊ីសរវាងខ្សែកោង (C_3) និងបន្ទាត់ $y = m$ ស្រប $(x'ox)$ ។

m	អត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការ តាមក្រាភិច
$-\infty$	
	សមីការគ្មានឫស
0	សមីការមានឫសឌុប $x_1 = x_2 = 0$
	សមីការមានឫសពីរ $x_1 < 0 < x_2$
4	សមីការមានឫសបួន $x_1 = -2 < x_2 < 0 < x_3 < x_4 = 2$
$+\infty$	សមីការមានឫសប្រាំមួយ $x_1 < x_2 < x_3 < 0 < x_4 < x_5 < x_6$

លំហាត់

1/. គូសខ្សែកោង (C_1) តាងអនុគមន៍ $y = f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{2x - 4}$ ក្នុងតំរុយអរតូនរមេ (oxy) ។

2/. គូសខ្សែកោង (C_2) តាងអនុគមន៍ $y = g(x) = \frac{x^2 - 2|x| + 4}{2|x| - 4}$ ក្នុងតំរុយអរតូនរមេ (oxy) ។

3/. គូសខ្សែកោង (C_3) តាងអនុគមន៍ $y = h(x) = \left|\frac{x^2 - 2|x| + 4}{2|x| - 4}\right|$ ក្នុងតំរុយអរតូនរមេ (oxy) ។

4/. ដោះស្រាយអត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការ $\left|\frac{x^2 - 2|x| + 4}{2|x| - 4}\right| = K$ ដោយពិភាក្សាតាមតំលៃ K ។

ចំលើយ

1/. គូសខ្សែកោង (C_1) តាងអនុគមន៍ $y = f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{2x - 4}$

សរសេរ $f(x)$ ជារាងកាណូនិច ដោយចែកភាគយក និងភាគបែង

យើងបាន $y = f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{2x - 4} = \frac{x}{2} + \frac{2}{x - 2}$

ដែនកំនត់ $\mathcal{D}_1 = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{2} + \frac{2}{x-2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{2} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x}{2} + \frac{2}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{2}{x-2} = \infty$$

$$f'(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{2x(x-4)}{(2x-4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x(x-4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 4 \end{array}\right.$$

$x_1 = 0 \Rightarrow y = f(0) = -1$

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

អាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វរវាង (C_1) និង $(x'0x)$ ជាឫសរបស់សមីការ

$\frac{x^2 - 2x + 4}{2x - 4} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 4 = 0$ ដែលមាន

$\Delta' = 1 - 4 = -3 < 0 \Rightarrow$ សមីការគ្មានឫស $\Rightarrow (C_1)$ មិនកាត់ $(x'0x)$ ទេ ។

អាប់ស៊ីសនៃចំនុចប្រសព្វរវាង (C_1) និង $(y'0y)$ គឺ $y = f(0) = -1$

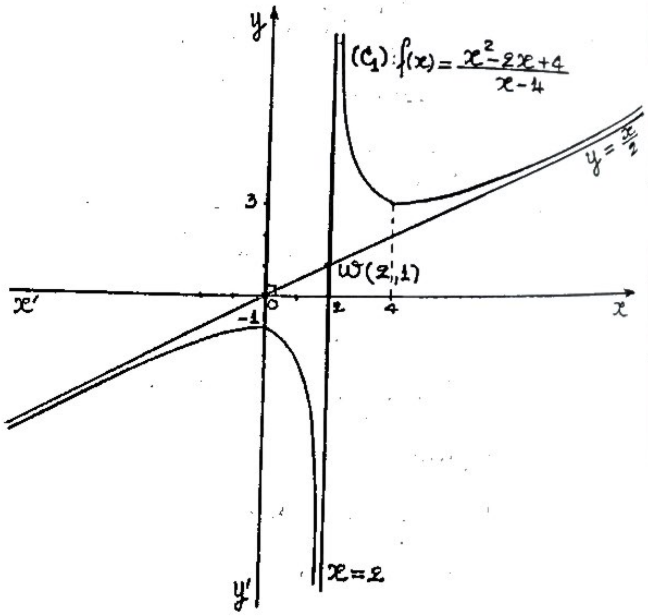
ដោយ $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \infty \Rightarrow$ បន្ទាត់ $x = 2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x) - \frac{x}{2}\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{x-2} = 0 \Rightarrow$$

បន្ទាត់ $y = \frac{x}{2}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត

អាស៊ីមតូតទាំងពីរនេះ កាត់គ្នាត្រង់ចំនុច $\omega(x = 2 , y = 1)$

$\omega(x = 2 , y = 1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះរបស់ខ្សែកោង (C_1) ។



ឃ. គូសខ្សែកោង (C_2) តាងអនុគមន៍ $y = g(x) = \frac{x^2 - 2|x| + 4}{2|x| - 4}$

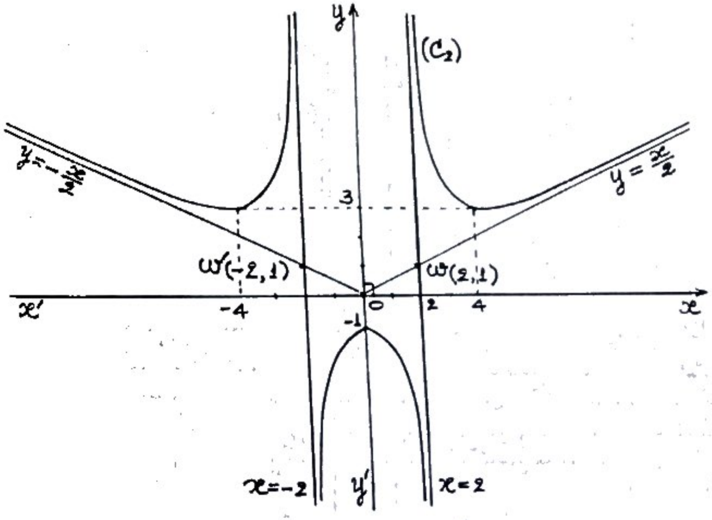
ដែនកំណត់ $\mathcal{D}_2 = \mathbb{R} \setminus \{-2;2\}$

$\forall x \in \mathcal{D}_2$, $y = g(-x) = \frac{(-x)^2 - 2|x| + 4}{2|-x| - 4} = \frac{x^2 - 2|x| + 4}{2|x| - 4} = g(x)$

$\Rightarrow g(x)$ ជាអនុគមន៍គូ $\Rightarrow (y'0y)$ ជាអ័ក្សឆ្លុះរបស់ (C_2)

បើ $x \geq 0$ និង $x \neq 2 \Rightarrow g(x) = f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{2x - 4} \Rightarrow (C_2) = (C_1)$

បើ $x < 0$ និង $x \neq -2$ យើងបាន (C_2) ជារូបឆ្លុះនៃ (C_1) ធៀបនឹង $(y'oy)$



3/. គូសខ្សែកោង (C_3) តាងអនុគមន៍ $y = h(x) = \left|\frac{x^2 - 2|x| + 4}{2|x| - 4}\right|$

ដែនកំណត់ $\mathcal{D}_3 = \mathcal{D}_2 = \mathbb{R} \setminus \{-2 \; ; \; 2\}$

យើងបាន $y = h(x) = \left|\frac{x^2 - 2|x| + 4}{2|x| - 4}\right| = |g(x)|$

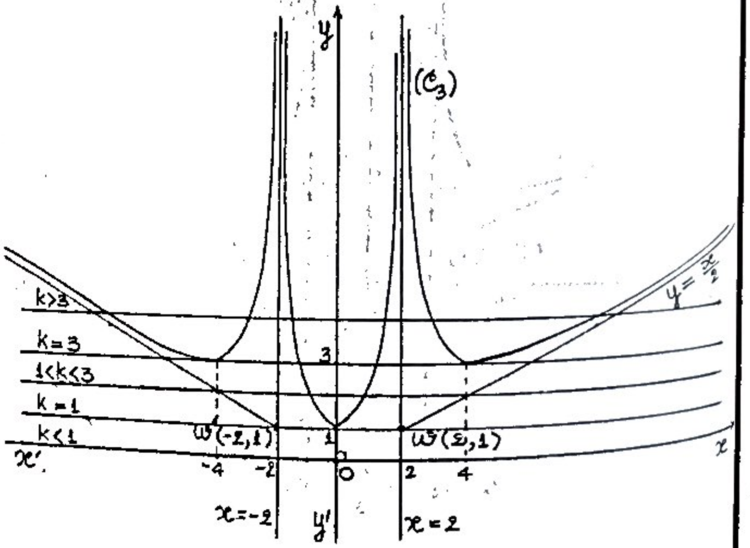
$\forall x \; , \; x \in \mathcal{D}_3 = \mathcal{D}_2$ ដែល $g(x) \geq 0 \Rightarrow |g(x)| = g(x)$

ដូច្នេះ $h(x) = |g(x)| = g(x) \Rightarrow (C_3) = (C_2)$

$\forall x \in \mathcal{D}_3 = \mathcal{D}_2$ ដែល $g(x) < 0 \Rightarrow |g(x)| = -g(x)$

$\Rightarrow h(x) = |g(x)| = -g(x) \Rightarrow (C_3)$ ជារូបឆ្លុះនៃ (C_2) ធៀបនឹង $(x'ox)$ ។

ដូច្នេះ យើងអាចទាញបានសំណង់ខ្សែកោង (C_3) ពី (C_2)



4/. ដោះស្រាយអត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការ $\left|\frac{x^2 - 2|x| + 4}{2|x| - 4}\right| = K$
ដោយពិភាក្សាតាមតំលៃ K

សមីការនេះ ជាសមីការអាប់ស៊ីសរវាងខ្សែកោង (C_3)

$y = \left|\frac{x^2 - 2|x| + 4}{2|x| - 4}\right|$ និងបន្ទាត់ $y = K$ ស្រប $(x'ox)$

ដោយពិនិត្យលើក្រាភិច (C_3) យើងបានអត្ថិភាពនិងសញ្ញាឫសសមីការក្នុងតារាងខាងក្រោម ។

K	អត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការ
$-\infty$	
	សមីការគ្មានឫស
1	សមីការមានឫសឌុប $x_1 = x_2 = 0$
	សមីការមានឫសពីរ $x_1 < 0 < x_2$
3	សមីការមានឫសបួន $x_1 = -4 < x_2 < 0 < x_3 < x_4 = 4$
$+\infty$	សមីការមានឫសប្រាំមួយ $x_1 < x_2 < x_3 < 0 < x_4 < x_5 < x_6$

លំហាត់

1/. គូសខ្សែកោង (C_1) តាងអនុគមន៍ $y = f(x) = \frac{(x-4)^2}{x-3}$ ក្នុងតំរុយអរតូនរមេ (oxy) ។

2/. គូសខ្សែកោង (C_2) តាងអនុគមន៍ $y = g(x) = \frac{(|x|-4)^2}{|x|-3}$ ក្នុងតំរុយអរតូនរមេ (oxy) ។

3/. គូសខ្សែកោង (C_3) តាងអនុគមន៍ $y = h(x) = \left|\frac{x^2 - 8|x| + 16}{|x| - 3}\right|$
ក្នុងតំរុយអរតូនរមេ (oxy) ។

4/. ដោះស្រាយអត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការ $\left|\frac{x^2 - 8|x| + 16}{|x| - 3}\right| = m$
ដោយពិភាក្សាតាមតំលៃ m ។

ចំលើយ

1/. គូសខ្សែកោង (C_1) តាងអនុគមន៍ $y = f(x) = \frac{(x-4)^2}{x-3}$

សរសេរ $f(x)$ ជារាងកាណូនិច ដោយចែកភាគយក និងភាគបែង

យើងបាន $y = f(x) = \frac{(x-4)^2}{x-3} = \frac{x^2-8x+16}{x-3} = x-5+\frac{1}{x-3}$

ដែនកំនត់ $\mathcal{D}_1 = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x-5+\frac{1}{x-3} = \lim_{x\to\pm\infty} x = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} x-5+\frac{1}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{1}{x-3} = \infty$$

$$f'(x) = \frac{u'v-v'u}{v^2} = \frac{x^2-6x+8}{(x-3)^2} = \frac{(x-2)(x-4)}{(x-3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 2 \Rightarrow y_1 = f(2) = -4 \\ x_2 = 4 \Rightarrow y_2 = f(4) = 0 \end{array}\right.$$

$x_1 = 2 \Rightarrow y_1 = -4$

$x_2 = 4 \Rightarrow y_2 = 0$

x	$-\infty$		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-4	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0	↗	$+\infty$

អាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វរវាង (C_1) និង $(x'0x)$ ជាឫសរបស់សមីការ

$\frac{(x-4)^2}{x-3} = 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 4$

ខ្សែកោង (C_1) ប៉ះអ័ក្ស $(x'0x)$ ត្រង់ចំនុចអាប់ស៊ីស $x = 4$

អរដោនេចំនុចប្រសព្វរវាង (C_1) និង $(y'0y)$ គឺ $y = f(0) = -\frac{16}{3}$

អាស៊ីមតូតឈរ $\lim_{x\to 3} f(x) = \infty \Rightarrow$ បន្ទាត់ $x = 3$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

អាស៊ីមតូតទ្រេត $\lim_{x\to\pm\infty} [f(x)-(x-5)] = \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x-3} = 0 \Rightarrow$

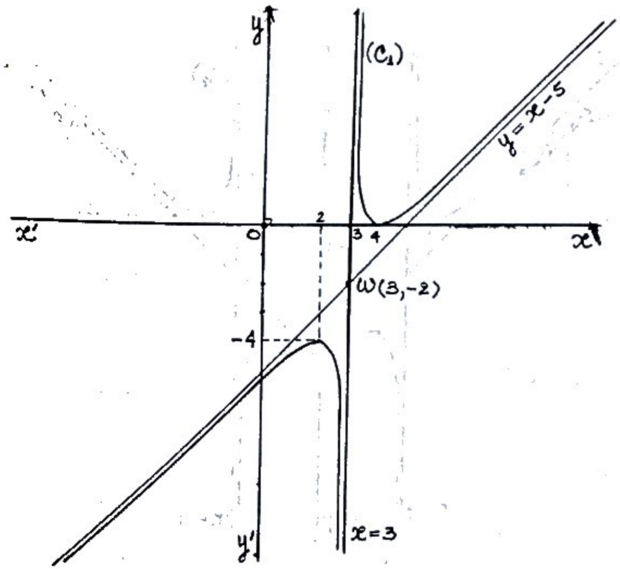
$\Rightarrow$ បន្ទាត់ $y = x-5$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត

អាស៊ីមតូតទាំងពីរនេះ កាត់គ្នាត្រង់ចំនុច $\omega(x = 3 , y = -2)$

ខ្សែកោង (C_1) កាត់ $(y'oy)$ ត្រង់ចំនុចអរដោនេ $y = -\frac{16}{3}$ ប៉ះ $(x'ox)$

ត្រង់ចំនុចអាប់ស៊ីស $x = 4$

ហើយមាន $\omega(x = 3 , y = -2)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះ ។ (C_1) មានកំពូលពីរ $(x = 2 , y = -4)$ និង $(x = 4 , y = 0)$



2/. គូសខ្សែកោង (C_2) តាងអនុគមន៍ $y = g(x) = \frac{(|x|-4)^2}{|x|-3}$

អនុគមន៍នេះអាចសរសេរ $y = g(x) = \frac{x^2-8|x|+16}{|x|-3}$

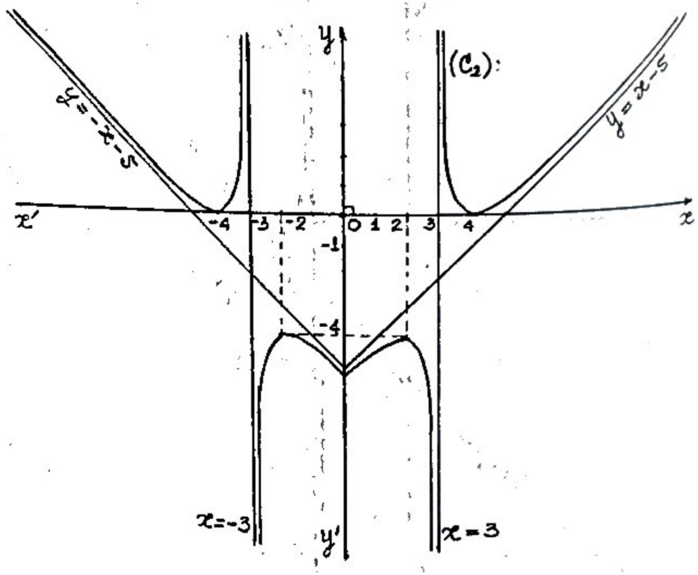
មានដែនកំណត់ $\mathcal{D}_2 = \mathbb{R} \setminus \{-3\ ;3\}$

$\forall x \in \mathcal{D}_2 \quad , g(-x) = \frac{(-x^2)-8(-|x|+16)}{|-x|-3} = \frac{x^2-8|x|+16}{|x|-3} = g(x)$

$\Rightarrow g(x)$ ជាអនុគមន៍គូ

បើ $x \geq 0$ និង $x \neq 3 \Rightarrow g(x) = f(x) = \frac{(x-4)^2}{x-3} \Rightarrow (C_2) = (C_1)$

បើ $x<0$ និង $x \neq -3$ យើងបាន (C_2) ជារូបឆ្លុះនៃ (C_1) ធៀបនឹង $(y'oy)$



3/. គូសខ្សែកោង (C_3) តាងអនុគមន៍ $y = h(x) = \left|\frac{x^2-8|x|+16}{|x|-3}\right|$

អនុគមន៍ $h(x) = \left|\frac{x^2-8|x|+16}{|x|-3}\right| = |g(x)|$

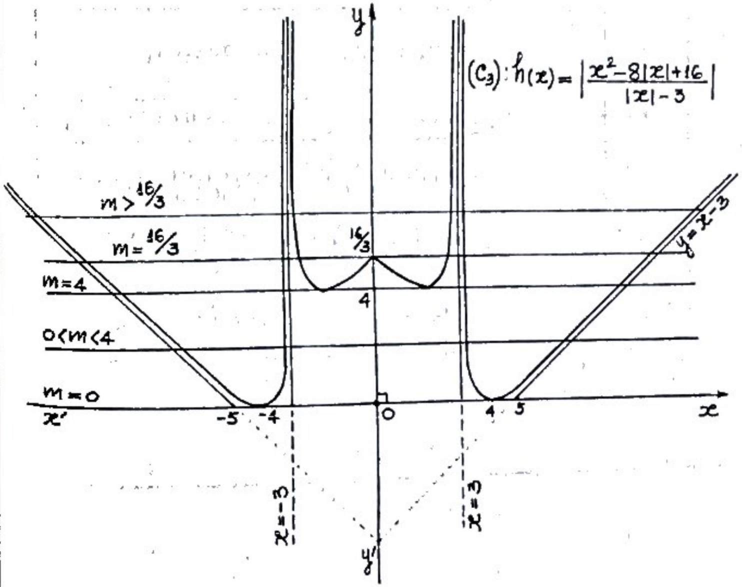
ដែនកំណត់ $\mathcal{D}_3 = \mathcal{D}_2$

$\forall x \in \mathcal{D}_3 = \mathcal{D}_2 \Rightarrow h(x) = |g(x)| \geq 0$

បើ $x \in \mathcal{D}_3 \ , \ gx \geq 0 \Rightarrow h(x) = g(x) \Rightarrow (C_3) = (C_2)$

បើ $x \in \mathcal{D}_3 \ , \ g(x) < 0 \Rightarrow h(x) = |g(x)| = -g(x) \Rightarrow$

(C_3) ជារូបឆ្លុះនៃ (C_2) ធៀបនឹង $(x'ox)$ ។



4/. ដោះស្រាយអត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការ $\left|\dfrac{x^2-8|x|+16}{|x|-3}\right| = m$

សមីការនេះ ជាសមីការអាប់ស៊ីសរវាងខ្សែកោង (C_3) និងបន្ទាត់ $y = m$ ស្រប $(x'ox)$

ដោយពិនិត្យតាមក្រាភិចយើងបានចំលើយក្នុងតារាងខាងក្រោម ។

m	អត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការ តាមតំលៃនៃ m
$-\infty$	សមីការគ្មានឫស
0	សមីការមានឫសពីរ $x_1 = -4 < 0 < x_2 = 4$
	សមីការមានឫសបួន $x_1 < x_2 < 0 < x_3 < x_4$
4	សមីការមានឫសបួន $x_1 < x_2 = -2 < 0 < x_3 = 2 < x_4$
	សមីការមានឫសប្រាំមួយ $x_1 < x_2 < x_3 < 0 < x_4 < x_5 < x_6$
$\frac{16}{3}$	សមីការមានឫសប្រាំ $x_1 < x_2 < x_3 = 0 < x_4 < x_5$
$+\infty$	សមីការមានឫសបួន $x_1 < x_2 < 0 < x_3 < x_4$

លំហាត់

1/. សិក្សាទិសដៅអថេរភាព និងគូសខ្សែកោង (C)

តាងអនុគមន៍ $y = f(x) = \dfrac{x^2-4x}{x^2-4x+3}$ ក្នុងតំរុយអរតូនរមេ (oxy) ។

2/. គូសខ្សែកោង (C) កាត់ $(x'ox)$ ត្រង់ O និង A ។ស្រាយថាបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង (C) ត្រង់ O និង A កាត់គ្នាលើអ័ក្សឆ្លុះរបស់ខ្សែកោង (C) ។

3/. ដោះស្រាយអត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការ $(m-1)x^2-4(m-1)x+3m = 0$ ដោយពិភាក្សាទៅតាមតំលៃ m

ចំលើយ

1/. សិក្សាទិសដៅអថេរភាព និងគូសខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍

$y = f(x) = \dfrac{x^2-4x}{x^2-4x+3}$ ក្នុងតំរុយអរតូនរមេ (oxy) ។

ដែនកំនត់ $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1 , 3\}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{4}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-\frac{4}{x}}{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}} = 1$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-4x}{x^2-4x+3} = \infty$$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x^2-4x}{x^2-4x+3} = \infty$$

$f'(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{6(x-2)}{(x^2-4x+3)^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

បើ $x = 2 \Rightarrow y = f(2) = 4$

តារាងទិសដៅអថេរភាព

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	1 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	4	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	1

អនុគមន៍មានតំលៃអប្បបរមាស្មើ4 ត្រង់ $x = 2$

គូសខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍ $y = f(x)$

អាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វរវាង (C) និង $(x'0x)$ ជាឬសរបស់សមីការ

$$\frac{x^2-4x}{(x^2-4x+3)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x-4) = 0$$

$\Leftrightarrow x_1 = 0 ; x_2 = 4$ ខ្សែកោង (C) កាត់ $(x'0x)$ ត្រង់ចំនុចអាប់ស៊ីស $x = 0$ និង $x = 4$

អរដោនេចំនុចប្រសព្វរវាង (C) និង $(y'0y)$ គឺ $y = f(0) = 0$

អាស៊ីមតូតដេក $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1 \Rightarrow$ បន្ទាត់ $y = 1$ ជាអាស៊ីមតូតដេក រឺ

អាស៊ីមតូតស្រប $(x'0x)$

អាស៊ីមតូតឈរ $\lim_{x \to 1} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to 3} f(x) = \infty$

$\Rightarrow$ បន្ទាត់ $x = 1$ និង $x = 3$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

អ័ក្សឆ្លុះ តាង $S(2 , 4)$ កំពូលរបស់ខ្សែកោង

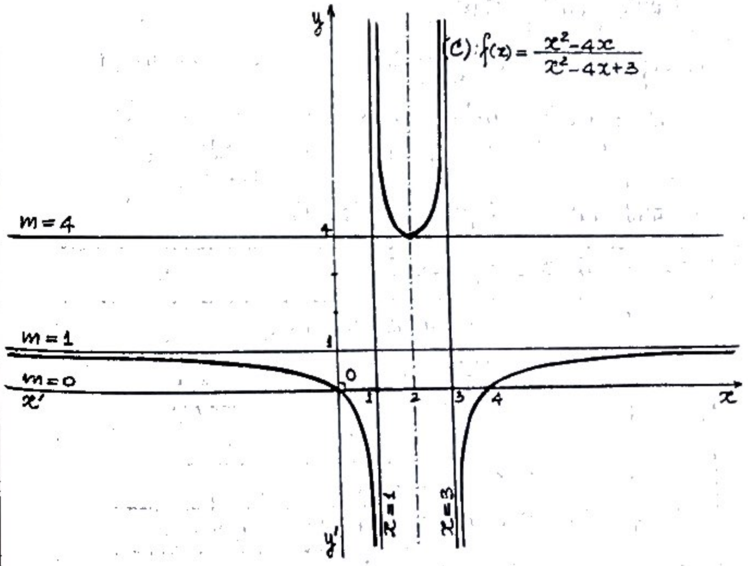
ក្នុងតំរុយ (XSY) យើងបាន តាមរូបមន្តប្តូរតំរុយ

$x = 2 + X$, $y = 4 + Y \Leftrightarrow$ សមីការ (C) អាចសរសេរ $4 + Y = \frac{(2+X)^2 - 4(2+X)}{(2+X)^2 - 4(2+X) + 3}$

$$Y = f(X) = \frac{X^2-4}{X^2-1} - 4$$

$f(-X) = \frac{(-X)^2-4}{(-X)^2-1} - 4 = \frac{X^2-4}{X^2-1} - 4 = f(X) \Rightarrow f(x)$ ជាអនុគមន៍គូ

$\Rightarrow$ បន្ទាត់ $(Y'SY)$ សមីការ $x = 2$ ជាអ័ក្សឆ្លុះរបស់ខ្សែកោង (C)



2/. ស្រាយថាបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង (C) ត្រង់ O និង A កាត់គ្នានៅលើអ័ក្សឆ្លុះរបស់ខ្សែកោង (C)

មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ O គឺ $f'(0) = -\frac{4}{3}$

សមីការបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ O គឺ $-\frac{4}{3} = \frac{y}{x} \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x$

មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ A គឺ $f'(4) = \frac{4}{3}$

សមីការបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ A គឺ $A(4\ ,\ 0)$: $\frac{4}{3} = \frac{y}{x-4} \Leftrightarrow y = \frac{4}{3}x - \frac{16}{3}$

រកកូអរដោនេចំនុចប្រសព្វនៃបន្ទាត់ប៉ះទាំងពីរ $-\frac{4}{3}x = \frac{4}{3}x - \frac{16}{3}$

$\Leftrightarrow -\frac{8x}{3} = -\frac{16}{3} \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = -\frac{8}{3} \Rightarrow$ ចំនុចប្រសព្វស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ $x = 2$ ជាអ័ក្សឆ្លុះរបស់ខ្សែកោង (C)

3/. ដោះស្រាយអត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការ $(m-1)x^2 - 4(m-1)x + 3m = 0$

សមីការអាចសរសេរ $mx^2 - x^2 - 4mx + 4x + 3m = 0 \Leftrightarrow$

$$m(x^2 - 4x + 3) = x^2 - 4x \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4x}{4x + 3x^2} = m$$

ជាសមីការអាប់ស៊ីសរវាងខ្សែកោង (C) និងបន្ទាត់ $y = m$

m	អត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការ
$-\infty$	សមីការមានឫសពីរ $0 < x_1 < x_2$
0	សមីការមានឫសពីរ $x_1 = 0 < x_2 = 4$
	សមីការមានឫសពីរ $x_1 < 0 < x_2$
1	សមីការគ្មានឫស
4	សមីការមានឫសឌុប $0 < x_1 = x_2 = 2$
$+\infty$	សមីការមានឫសពីរ $0 < x_1 < x_2$

លំហាត់

1/. សិក្សាទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $y = f(x) = \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 7x + 10}$

2/. គូសខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍នេះក្នុងតំរុយអរតូនរមេ (oxy) ។

3/. ដោះស្រាយអត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការ $\frac{(x-3)^2}{x^2 - 7x + 10} = m$ ដោយពិភាក្សាទៅតាម m

---

ចំលើយ

1/. សិក្សាទិសដៅអថេរភាព នៃអនុគមន៍ $y = f(x) = \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 7x + 10}$

ដែនកំនត់ $\mathcal{D} = R \setminus \{2\ ,\ 5\}$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2\left(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2}\right)}{x^2\left(1 - \frac{7}{x} + \frac{10}{x^2}\right)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2}}{1 - \frac{7}{x} + \frac{10}{x^2}} = 1$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 7x + 10} = \infty$$

$$\lim_{x \to 5} f(x) = \lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 7x + 10} = \infty$$

$$f'(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{-x^2 + 2x + 3}{(x^2 - 7x + 10)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -1 \\ x_2 = 3 \end{array}\right.$$

$x = -1 \Rightarrow y = f(-1) = \frac{8}{9}$

$x = 3 \Rightarrow y = f(3) = 0$

តារាងទិសដៅអថេរភាព

x	$-\infty$		-1		2		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	1	↘	$\frac{8}{9}$	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	0	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	1

អនុគមន៍មានតំលៃអប្បបរមាស្មើ $\frac{8}{9}$ ត្រង់ $x = -1$ ហើយមានតំលៃអតិបរមាស្មើ

ចំពោះ $x = 3$

2/. គូសខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍ $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 7x + 10}$

អាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វរវាង (C) និង $(x'0x)$ ជាឫសរបស់សមីការ

$x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 3 \Rightarrow$ ខ្សែកោង (C) ប៉ះ $(x'0x)$ ត្រង់ចំនុចអាប់ស៊ីស $x = 3$

អរដោនេចំនុចប្រសព្វរវាង (C) និង $(y'0y)$ គឺ $y = f(0) = \frac{9}{10}$

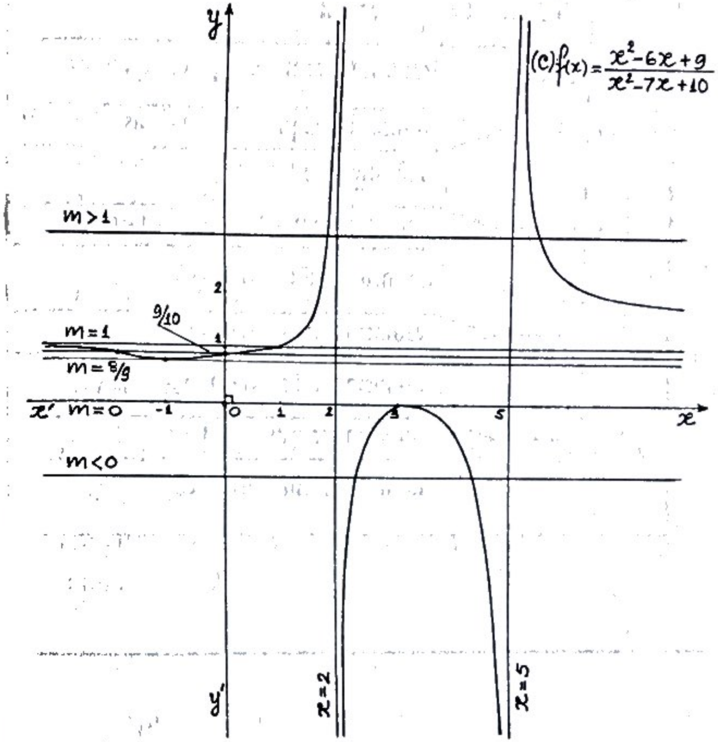
$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = \infty \Rightarrow$ បន្ទាត់ $x = 3$ និង $x = 5$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1 \Rightarrow$ បន្ទាត់ $y = 1$ ជាអាស៊ីមតូតដេក

ខ្សែកោង (C) កាត់អាស៊ីមតូតដេកសមីការ $y = 1$ ត្រង់ចំនុចមានអាប់ស៊ីសជាឫសនៃ

សមីការ $\dfrac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 7x + 10} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = x^2 - 7x + 10 \Leftrightarrow x = 1$

ខ្សែកោង (C) កាត់អាស៊ីមតូតដេកត្រង់ចំនុច $(x = 1 , y = 1)$



3/. ដោះស្រាយអត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការ $\dfrac{(x-3)^2}{x^2 - 7x + 10} = m$
ដោយពិភាក្សាទៅតាម m

សមីការនេះ ជាអាប់ស៊ីសរវាងខ្សែកោង (C) និងបន្ទាត់អថេរ $y = m$ ស្រប $(x'ox)$

ដោយពិនិត្យលើក្រាភិច យើងបានចំលើយក្នុងតារាងខាងក្រោម

m	អត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការ
$-\infty$	សមីការមានឫសពីរ $0 < x_1 < x_2$
0	សមីការមានឫសឌុប $x_1 = x_2 = 3 > 0$
	សមីការគ្មានឫស
$\frac{8}{9}$	សមីការមានឫសឌុប $x_1 = x_2 = -1 < 0$
	សមីការមានឫសពីរ $x_1 < x_2 < 0$
$\frac{9}{10}$	សមីការមានឫសពីរ $x_1 < x_2 = 0$
	សមីការមានឫសពីរ $x_1 < 0 < x_2$
1	សមីការមានឫសមួយ $x = 1 > 0$
$+\infty$	សមីការមានឫសពីរ $0 < x_1 < x_2$

លំហាត់

អោយអនុគមន៍ $f(x) = (x-m)^3 - 3x + m + 2$ ដែលមានខ្សែកោងតំនាង (C_m) ។

1/. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\forall m \in \mathbb{R}$ អនុគមន៍នេះមានតំលៃអតិបរមាមួយ និងអប្បបរមាមួយជានិច្ច រឺខ្សែកោង (C_m) មានកំពូលពីរ ។

2/. កំនត់ m ដើម្បីអោយអនុគមន៍

ក. កើនក្នុងចន្លោះ $]-\infty \; ; -5]$

ខ. កើនក្នុងចន្លោះ $[1 \; ; \; +\infty[$

3/. រកតំលៃ m ដើម្បីអោយអនុគមន៍មានតំលៃអតិបរមាត្រង់ $x = -1$ ។ ចំពោះតំលៃ m ដែលរកឃើញគូសខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍នេះក្នុងតំរុយអរតូនរមេ (oxy) ។

4/. រកគ្រប់សមីការបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង (C) ដែលផ្គុំជាមួយ $(x'ox)$ បានមុំ α កំនត់ដោយ $tg\alpha = 9$ ។

5/. ដោះស្រាយអត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការ $x^3 - 3x + 2 - K = 0$ ដោយពិភាក្សាតាមតំលៃ K

ចំលើយ

1/. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\forall m \in \mathbb{R}$ អនុគមន៍នេះមានតំលៃអតិបរមាមួយ និងអប្បបរមាមួយជានិច្ច រឺខ្សែកោង (C_m) មានកំពូលពីរ ។

អនុគមន៍នេះមានដែនកំនត់ $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ ព្រោះជាអនុគមន៍ពហុធា

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} x^3 = \pm\infty$$

$$f'(x) = 3(x-m)^2 - 3 = 3(x-m+1)(x-m-1)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-m+1)(x-m-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m-1 \\ x = m+1 \end{array}\right.$$

$-1 < 1 \Rightarrow \forall m \in \mathbb{R}$, $m-1 < m+1$

ដូច្នេះ $\forall m \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ មានឫសពីរ $x_1 = m-1$ និង $x_2 = m+1$ ផ្សេងគ្នាជានិច្ច មានន័យថាអនុគមន៍ មានតំលៃអតិបរមាមួយ និងអប្បបរមាមួយជានិច្ច រឺខ្សែកោង (C_m) មានកំពូលពីរ ។

2/. កំនត់ m ដើម្បីអោយអនុគមន៍

ក. កើនក្នុងចន្លោះ $]-\infty \,;\, -5]$

ខ. កើនក្នុងចន្លោះ $[1 \,;\, +\infty[$

តារាងទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍

x	$-\infty$		$m-1$		$m+1$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	អតិបរមា	↘	អប្បបរមា	↗	$+\infty$

ដោយពិនិត្យលើតារាងទិសដៅអថេរភាព យើងបាន

អនុគមន៍កើនក្នុងចន្លោះ $]-\infty \,;\, -5]$ លុះត្រាតែ

$]-\infty \,;\, -5] \subset]-\infty \,;\, m-1] \Rightarrow -5 \le m-1$

$\Rightarrow -4 \le m$ ឬ $m \ge -4$ ឬ $m \in [-4 \,;\, +\infty[$

អនុគមន៍កើនក្នុងចន្លោះ $[1 \,;\, +\infty[$ លុះត្រាតែ

$[1 \,;\, +\infty[\subset [m+1 \,;\, +\infty[\Rightarrow m+1 \le 1$

$\Rightarrow$ $m \le 0$; $m \in]-\infty \,;\, 0]$

3/. រកតំលៃ m ដើម្បីអោយអនុគមន៍មានតំលៃអតិបរមាត្រង់ $x = -1$ ។

ដោយពិនិត្យលើតារាងទិសដៅអថេរភាពខាងលើ អនុគមន៍មានតំលៃអតិបរមាត្រង់ $x = m-1$ យើងចង់បានអនុគមន៍មានតំលៃអតិបរមាត្រង់ $x = -1$ ដូច្នេះ យើងត្រូវយក

$m-1 = -1 \Rightarrow$ $m = 0$

បើ $m = 0$ អនុគមន៍អោយទៅជា $y = x^3 - 3x + 2$

គូសខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍ $y = x^3 - 3x + 2$

$\mathcal{D} = \mathbb{R}$

$\lim_{x \to \pm\infty} y = \lim_{x \to \pm\infty} x^3 = \pm\infty$

$f'(x) = 3x^3 - 3 = 3(x+1)(x-1)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -1 \Rightarrow y_1 = 4 \\ x_2 = 1 \Rightarrow y_2 = 0 \end{array} \right.$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

អាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោង (C) និង $(x'0x)$ ជាឫសនៃសមីការ $x^3 - 3x + 2 = 0$

តាង $P(x) = x^3 - 3x + 2$ ដោយ $P(1) = 1 - 3 + 2 = 0 \Rightarrow x = 1$ ជាឫសនៃ $P(x)$

$\Rightarrow P(x)$ ចែកដាច់នឹង $x - 1$

$$
\begin{array}{rrr|l}
x^3 & -3x & +2 & x-1 \\ \cline{4-4}
-x^3+x^2 & & & x^2+x-2 \\ \cline{1-3}
x^2 & -3x & +2 & \\
-x^2 & +x & & \\ \cline{1-3}
 & -2x & +2 & \\
 & +2x & -2 & \\ \cline{2-3}
 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

យើងបាន $P(x) = (x-1)(x^2+x-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2+x-2 = 0 \end{array}\right.$

$x^2+x-2 = 0$ ជាសមីការដឺក្រេទី 2 នៃ x ដែលមានឫស

$x = 1$ និង $x = -2$

ដូច្នេះ យើងបាន $x_1 = x_2 = 1$ និង $x_3 = -2$ មានន័យថា

ខ្សែកោង (C) ប៉ះ $(x'0x)$ ត្រង់ $x = 1$ ហើយកាត់ $(x'0x)$ ត្រង់ $x = -2$

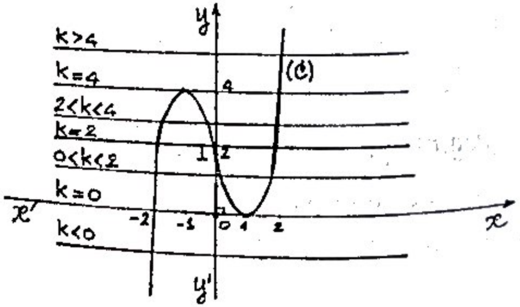
អរដោនេចំនុចប្រសព្វរវាង (C) និង $(y'0y)$ គឺ $y = f(0) = 2$

ចំនុចរបត់ $y'' = f''(x) = 6x$, $f''(x) = 0 \Leftrightarrow$

$6x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = f(0) = 2$

ដូច្នេះ ចំនុចរបត់ I មានកូអរដោនេ $x = 0$, $y = 2$ ។

$I(0\ ;\ 2)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះរបស់ខ្សែកោង ។



4/. រកគ្រប់សមីការបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង (C) ដែលផ្គុំជាមួយ $(x'0x)$ បានមុំ α កំនត់ដោយ $tg\alpha = 9$ ។

តាង $M(x\ ,\ y)$ ចំនុចនៅលើខ្សែកោង (C) ដែលបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំនុចនោះ ផ្គុំជាមួយ $(x'0x)$ បានមុំ α កំនត់ដោយ $tg\alpha = 9$,

យើងបាន មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង (C) ត្រង់ M គឺ 9

តាមបំនកស្រាយតាមធរណីមាត្រនៃដេរីវេ មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង (C) ត្រង់ M គឺជាដេរីវេទីមួយត្រង់ M គឺ $f'(x) = 3x^2-3$

យើងទាញបាន $3x^2-3 = 9 \Leftrightarrow x^2-1 = 3 \Leftrightarrow$

$x^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = -2 \Rightarrow y = 0 & M_1 \\ x = 2 \Rightarrow y = 4 & M_2 \end{array}\right.$

រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង (C) ត្រង់ $M_1(-2\ ;\ 0)$

$9 = \frac{y}{x+2} \Leftrightarrow y = 9x+18$

រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ $M_2(2\ ;\ 4)$

$9 = \frac{y-4}{x-2} \Leftrightarrow y-4 = 9x-18 \Leftrightarrow y = 9x-14$

បន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង (C) ដែលផ្គុំជាមួយ $(x'0x)$ បានមុំ α កំនត់ដោយ $tg\alpha = 9$ មានពីរ ដែលមានសមីការ

$y = 9x+18$ ប៉ះ (C) ត្រង់ចំនុច $(-2\ ;\ 0)$

$y = 9x-14$ ប៉ះ (C) ត្រង់ចំនុច $(2\ ;\ 4)$

5/. ដោះស្រាយអត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការ $x^3 - 3x + 2 - K = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = K$

ជាសមីការអាប់ស៊ីសរវាងខ្សែកោង (C) និងបន្ទាត់ $y = K$

ដោយពិនិត្យលើក្រាភិច យើងបានចំលើយក្នុងតារាងខាងក្រោម

K	អត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការ
$-\infty$	សមីការមានឫសមួយ $x<0$
0	សមីការមានឫសពីរ $x_1 = -2 < 0 < x_2 = 1$
	សមីការមានឫសបី $x_1 < 0 < x_2 < x_3$
2	សមីការមានឫសបី $x_1 < x_2 = 0 < x_3$
	សមីការមានឫសបី $x_1 < x_2 < 0 < x_3$
4	សមីការមានឫសពីរ $x_1 = -1 < 0 < x_2 = 2$
$+\infty$	សមីការមានឫសមួយ $x>0$

លំហាត់

1/. (C_a) ជាខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ $y = \frac{x^2 - 4x\sin a - 3\cos 2a}{x^2+1}$ ដែល $a \in [0\ ,\ 2\Pi]$ ។

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\forall a \in [0\ ,\ 2\Pi]$; ខ្សែកោង (C_a) កាត់ $(x'0x)$ បានពីរចំនុច $M_1(x_1)$, $M_2(x_2)$ ផ្សេងគ្នាជានិច្ច

ខ. សរសេរទំនាក់ទំនងគ្មាន a រវាង x_1 និង x_2

គ. គណនា $|M_1M_2|$

2/. កំនត់ $a \in [0\ ,\ 2\Pi]$ ដើម្បីអោយ $|M_1M_2|$

ក. មានតំលៃអតិបរមា

ខ. មានតំលៃអប្បបរមា

3/. កំនត់ a ដើម្បីអោយ

ក. M_1 និង M_2 នៅតែម្ខាងនៃគល់ O

ខ. M_1 និង M_2 មិននៅតែម្ខាងនៃគល់ O

គ. M_1 និង M_2 ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងគល់ O

ចំលើយ

1/.

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\forall a \in [0\ ,\ 2\Pi]$ ខ្សែកោង (C_a) កាត់ $(x'0x)$ បានពីរចំនុច $M_1(x_1)$ និង $M_2(x_2)$ ផ្សេងគ្នាជានិច្ច

អនុគមន៍ $y = \frac{x^2 - 4x\sin a - 3\cos 2a}{x^2+1}$ មានដែនកំនត់ $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

យើងដឹងថាអាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោង (C_a) និង $(x'0x)$ ជាឫសនៃសមីការ

$$\frac{x^2-4x\sin a-3\cos 2a}{x^2+1}=0 \Leftrightarrow x^2-4x\sin a-3\cos 2a=0 \qquad (1)$$

ដូច្នេះ ដើម្បីស្រាយថា $\forall a\in[0\ ,\ 2\Pi]$ ខ្សែកោង (C_a) កាត់ $(x'0x)$ បានពីរចំនុច $M_1(x_1)$ និង $M_2(x_2)$ ផ្សេងគ្នាជានិច្ច នោះយើងត្រូវស្រាយថា សមីការ (1) មានឫសពីរ x_1 និង x_2 ផ្សេងគ្នាជានិច្ច $\forall a\in[0\ ,\ 2\Pi]$

សមីការ (1) មាន $\Delta' = b'^2-ac = 4\sin^2 a+3\cos 2a =$

$= 4\sin^2 a+3(\cos^2 a-\sin^2 a) = 4\sin^2 a+3(1-\sin^2 a-\sin^2 a)$

$= 4\sin^2 a+3-6\sin^2 a = 3-2\sin^2 a = 1+2-2\sin^2 a$

$= 1+2(1-\sin^2 a) = 1+2\cos^2 a>0 \quad ; \quad \forall a\in[0\ ,\ 2\Pi]$

ដោយ $\Delta' = 1+2\cos^2 a>0\ ,\ \forall a\in[0\ ,\ 2\Pi]$ នោះសមីការ(1) មានឫសពីរ x_1 និង x_2 ផ្សេងគ្នាជានិច្ច ដូច្នេះខ្សែកោង (C_a) កាត់ $(x'0x)$ បានពីរចំនុច $M_1(x_1)$ និង $M_2(x_2)$ ផ្សេងគ្នាជានិច្ច ។

ខ. សរសេរទំនាក់ទំនងគ្មាន a រវាង x_1 និង x_2

x_1 និង x_2 ជាឫសនៃសមីការ (1) យើងបាន

$P = x_1x_2 = \frac{c}{a} = -3\cos 2a = -3(\cos^2 a-\sin^2 a)$

$= -3(1-\sin^2 a-\sin^2 a) = -3(1-2\sin^2 a) = -3+6\sin^2 a$

$S = x_1+x_2 = -\frac{b}{a} = 4\sin a \Rightarrow \sin a = \frac{S}{4} \Rightarrow$

$P = -3+6\left(\frac{S}{4}\right)^2 = -3+6\frac{S^2}{16} = -3+\frac{S^2}{8} \Rightarrow$

$8P = -24+S^2 \Rightarrow S^2-8P-24 = 0 \Rightarrow$

$$\boxed{(x_1+x_2)^2-8x_1x_2-24 = 0}$$

ក. គណនា $|M_1M_2|$, $\overline{OM}_1 = x_1$, $\overline{OM}_2 = x_2$

$\overline{M_1M_2} = \overline{OM}_2-\overline{OM}_1 = x_2-x_1$

$|M_1M_2| = |\overline{M_1M_2}| = |\overline{OM}_2-\overline{OM}_1| = |x_2-x_1|$

$= \left|\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}-\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}\right| = \left|\frac{2\sqrt{\Delta'}}{a}\right| = \left|\frac{2\sqrt{\Delta'}}{1}\right|$

$= 2\sqrt{\Delta'} = 2\sqrt{1+\cos^2 a}$

$$\boxed{|M_1M_2| = 2\sqrt{1+\cos^2 a}}$$

២. កំនត់ $a\in[0\ ,\ 2\Pi]$

ក. ដើម្បីអោយ $|M_1M_2|$ មានតំលៃអតិបរមា

$\forall a\in[0\ ,\ 2\Pi]$; យើងបាន $0\le\cos^2 a\le 1$

អតិបរមានៃ $|M_1M_2|$ គឺអតិបរមានៃ $\cos^2 a$ តែ $\cos^2 a$ មានតំលៃអតិបរមា កាលណា $\cos^2 a = 1$

$\cos^2 a = 1 \Leftrightarrow \cos a = \pm 1 \Leftrightarrow a = K\Pi$

$K = 0 \Rightarrow a = 0$

$K = 1 \Rightarrow a = \Pi$ $\qquad K = 2 \Rightarrow a = 2\Pi$

$$\boxed{a\in\{0\ ;\ \Pi\ ;\ 2\Pi\}}$$

ខ. ដើម្បីអោយ $|M_1M_2|$ មានតំលៃអប្បបរមា

អប្បបរមានៃ $|M_1M_2|$ គឺអប្បបរមានៃ $\cos^2 a$; $\cos^2 a$ អប្បបរមា កាលណា $\cos^2 a = 0 \Leftrightarrow \cos a = 0 \Leftrightarrow a = \frac{\Pi}{2}+K\Pi$

$K = 0 \Rightarrow a = \frac{\Pi}{2}$

$K = 1 \Rightarrow a = \frac{\Pi}{2}+\Pi = \frac{3\Pi}{2}$

$$\boxed{a\in\left\{\frac{\Pi}{2}\ ;\ \frac{3\Pi}{2}\right\}}$$

3/. កំនត់ a ដើម្បីអោយ

ក. ដើម្បីអោយ M_1 និង M_2 នៅតែម្ខាងនៃគល់ O

$\left[\begin{array}{l} M_1 \ , \ M_2 \text{ នៅតែខាងឆ្វេងគល់ O} \Rightarrow x_1 < x_2 < 0 \Rightarrow P = x_1x_2 > 0 \\ M_1 \ , \ M_2 \text{ នៅតែខាងស្តាំគល់ O} \Rightarrow 0 < x_1 < x_2 \Rightarrow P = x_1x_2 > 0 \end{array}\right.$

$\Rightarrow P = \frac{c}{a} = -3\cos 2a > 0 \Rightarrow \cos 2a < 0 \Leftrightarrow$

$\frac{\Pi}{2} + K2\Pi < 2a < \frac{3\Pi}{2} + K2\Pi \Leftrightarrow \frac{\Pi}{4} + K\Pi < a < \frac{3\Pi}{4} + K\Pi$

$K = 0 \Rightarrow \frac{\Pi}{4} < a < \frac{3\Pi}{4}$

$K = 1 \Rightarrow \Pi + \frac{\Pi}{4} = \frac{5\Pi}{4} < a < \frac{3\Pi}{4} + \Pi = \frac{7\Pi}{4}$

$$a \in \left]\frac{\Pi}{4} \ ; \ \frac{3\Pi}{4}\right[U \left]\frac{5\Pi}{4} \ ; \ \frac{7\Pi}{4}\right[$$

ខ. ដើម្បីអោយ M_1 និង M_2 មិននៅតែម្ខាងនៃគល់ O

បើ M_1 និង M_2 មិននៅតែម្ខាងនៃគល់ O នោះ M_1 និង M_2 នៅសងខាង គល់ O $\Rightarrow x_1 < 0 < x_2$ រឺ $x_2 < 0 < x_1 \Rightarrow P = x_1x_2 < 0$

$\Rightarrow -3\cos 2a < 0 \Rightarrow \cos 2a > 0 \Rightarrow$

$\left[\begin{array}{l} K2\Pi < 2a < \frac{\Pi}{2} + K2\Pi \\ \frac{3\Pi}{2} + K2\Pi < 2a < 2\Pi + K2\Pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} K\Pi < a < \frac{\Pi}{4} + K\Pi \\ \frac{3\Pi}{4} + K\Pi < a < \Pi + K\Pi \end{array}\right.$

$K = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < a < \frac{\Pi}{4} \\ \frac{3\Pi}{4} < a < \Pi \end{array}\right.$

$K = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Pi < a < \frac{\Pi}{4} + \Pi = \frac{5\Pi}{4} \\ \frac{3\Pi}{4} + \Pi = \frac{7\Pi}{4} < a < 2\Pi \end{array}\right.$

$$a \in \left]0 \ , \ \frac{\Pi}{4}\right[U \left]\frac{3\Pi}{4} \ ; \ \Pi\right[U \left]\Pi \ ; \ \frac{5\Pi}{4}\right[U \left]\frac{7\Pi}{4} \ ; \ 2\Pi\right[$$

គ. ដើម្បីអោយ M_1 ឆ្លុះ M_2 ធៀបគល់ O លុះត្រាតែ O ចំនុចកណ្តាលនៃ $|M_1M_2| \Rightarrow \overline{OM}_1 + \overline{OM}_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 0$

$-4\sin a = 0 \Rightarrow \sin a = 0 \Rightarrow a = K\Pi \ , \ K = 0 \ , \ 1 \ ; \ 2$

$$a \in \{0 \ , \ \Pi \ , \ 2\Pi\}$$

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាប្រលងសញ្ញាប័ត្រមធ្យមសិក្សាកំរិត ២ចំនេះទូទៅ និង

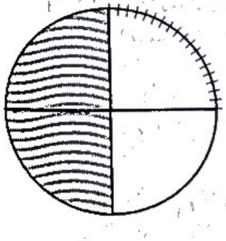
បំពេញវិជ្ជា សម័យប្រលងថ្ងៃទី ២៧ ខែមិថុនា ឆ្នាំ ១៩៩៥

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

I. រកដែលកំនត់នៃនុគមន៍ $y = lg(\sqrt{x-1} - \sqrt{7-x}) + \sqrt{\cos x}$

ចំលើយ អនុគមន៍នេះមានន័យលុះត្រាតែ $\left\{\begin{array}{l} (\sqrt{x-1} - \sqrt{7-x}) > 0 \\ \cos x \geqslant 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\left\{\begin{array}{l} x-1 \geqslant 0 \\ 7-x \geqslant 0 \\ \sqrt{x-1} > \sqrt{7-x} \\ \cos x \geqslant 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \geqslant 1 \\ x \leqslant 7 \\ x-1 > 7-x \\ \cos x \geqslant 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x > 4 \\ x \leqslant 7 \\ \cos x \geqslant 0 \end{array}\right.$



$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x > 4 \\ x \geqslant 7 \\ \cos x \geqslant 0 \end{array}\right.$

យើងត្រូវយក $\frac{3\Pi}{2} \leqslant x \leqslant 7$

ដូច្នេះយើងបានដែនកំនត់ $\mathcal{D} = \left[\frac{3\Pi}{2} \ ; \ 7\right]$

II. គណនា $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1-x^2}{\sin \Pi x}$; $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}$ បើ $a>0$

រំលឹក $\sin(mx+k\Pi) = \begin{cases} \sin\ mx & \text{បើ } k \text{ គូ} \\ -\sin\ mx & \text{បើ } k \text{ សេស} \end{cases}$

ឧទាហរណ៍ $\sin(3x \mp 3\Pi) = -\sin 3x$; $k = \pm 3$ សេស

$\sin(\Pi x \mp \Pi) = -\sin \Pi x$; $k = \pm 1$ សេស

$\sin(\Pi x \mp 4\Pi) = \sin \Pi x$; $k = \pm 4$ គូ

តាង $X = x-1 \Rightarrow x = X+1$

$x \to 1 \qquad X \to 0$

$1-x^2 = 1-(1+X)^2 = -X(2+X)$

$\sin \Pi x = \sin \Pi(X+1) = \sin(\Pi X + \Pi) = \sin \Pi X$ ព្រោះ $k = 1$ សេស

ដូច្នេះ $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1-x^2}{\sin \Pi x} = \lim\limits_{X\to 0} \frac{-X(X+2)}{-\sin \Pi X} = \lim\limits_{X\to 0} \frac{X}{\sin \Pi X}(X+2)$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{X\frac{X}{X}}{\Pi X \frac{\sin \Pi X}{\Pi X}}(X+2) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\Pi} \frac{1}{\frac{\sin \Pi X}{\Pi X}}(X+2) = \boxed{\frac{2}{\Pi}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(a-\sqrt{a^2-x^2})(a+\sqrt{a^2-x^2})}{x^2(a+\sqrt{a^2-x^2})}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2(a+\sqrt{a^2-x^2})} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{(a+\sqrt{a^2-x^2})} = \boxed{\frac{1}{2a}}$$

II. អោយអនុគមន៍ $f(x) = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$

ក. រកដែនកំណត់ រួចស្រាយ $f(x)$ ជាអនុគមន៍គូ

ខ. គណនា $f'(x)$ រួចរក $f'(100\Pi)$; $f'\left(\frac{175\Pi}{2}\right)$

គ. រក x ដើម្បីអោយ $f(x) = f'(x)$

ចំលើយ

ក. $1+\cos x = o \Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \Pi + k2\Pi$

ដូច្នេះ $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\Pi + k2\Pi\}$

ស្រាយថា $f(x)$ ជាអនុគមន៍គូ ត្រូវរកអោយបាន $\forall x \in \mathcal{D}$, $f(-x) = f(x)$

$\forall x \in \mathcal{D}$, $f(-x) = \frac{1-\cos(-x)}{1+\cos(-x)} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x} = f(x) \Rightarrow$

$f(x)$ ជាអនុគមន៍គូក្នុង $\mathcal{D}$

ខ. គណនា $f'(x) = \frac{u'v-v'u}{v^2}$

$u = 1-\cos x \Rightarrow u' = \sin x$

$v = 1-\cos x \Rightarrow v' = -\sin x$

$$f'(x) = \frac{\sin x(1+\cos x)+\sin x(1-\cos x)}{(1+\cos x)^2} = \frac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}$$

$\sin k\Pi = 0$ $\quad \cos k\Pi = \begin{cases} 1 & \text{បើ } k \text{ គូ} \\ -1 & \text{បើ } k \text{ សេស} \end{cases}$

$\sin\left(\frac{\Pi}{2}+k\Pi\right) = \begin{cases} 1 & \text{បើ } k \text{ គូ} \\ -1 & \text{បើ } k \text{ សេស} \end{cases}$ $\quad \cos\left(\frac{\Pi}{2}+k\Pi\right) = 0$

$$f'(100\Pi) = \frac{2\sin 100\Pi}{(1+\cos 100\Pi)^2} = \frac{0}{(1+1)^2} = \frac{0}{4} = 0$$

$\frac{175\Pi}{2} = \frac{\Pi}{2} + \frac{174\Pi}{2} = \frac{\Pi}{2} + 87\Pi$, $k = 87$ សេស

$$f'\left(\frac{175\Pi}{2}\right) = f'\left(\frac{\Pi}{2}+87\Pi\right) = \frac{2\sin\left(\frac{\Pi}{2}+87\Pi\right)}{\left[1+\cos\left(\frac{\Pi}{2}+\frac{87\Pi}{2}\right)\right]^2} = \frac{2(-1)}{(1+0)^2} = \boxed{-2}$$

គ. រក x ដើម្បីអោយ $f(x) = f'(x)$

$$f(x) = f'(x) \Leftrightarrow \frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \frac{2\sin x}{(1+\cos x)^2} \Leftrightarrow$$

$$(1-\cos x)(1+\cos x) = 2\sin x \Leftrightarrow 1-\cos^2 x = 2\sin x$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x - 2\sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x(\sin x - 2) = 0$$

ដោយ $\sin x \leqslant 1 < 2 \Rightarrow \sin x - 2 < 0$ ដូច្នេះ

$$\sin x(\sin x - 2) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = \left[\begin{array}{l} k2\Pi \in \mathcal{D} \\ \Pi + k2\Pi \in \mathcal{D} \end{array}\right.$$

ដូច្នេះ យើងបានចំលើយ $\boxed{x = k2\Pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}}$

IV. អោយអនុគមន៍ $g(x) = 29x^2 + 6x + 1995$

បើ $a > o$ និង $b > 0$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$g\left(\frac{a+b}{1+a+b}\right) < g\left(\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}\right)$$

យើងអាចស្រាយបានពីររបៀបផ្សេងគ្នា

របៀបទី ១ តាមនិយមន័យ $M < N$ គឺរក $M - N < 0$

ពី $0 < a \Rightarrow 1 < 1 + a < 1 + a + b \Rightarrow$

$$0 < \frac{1}{1+a+b} < \frac{1}{1+a} \Rightarrow 0 < \frac{a}{1+a+b} < \frac{a}{1+a} \quad (1)$$

ពី $0 < b \Rightarrow 1 < 1 + b < 1 + a + b \Rightarrow$

$$0 < \frac{1}{1+a+b} < \frac{1}{1+b} \Rightarrow 0 < \frac{a}{1+a+b} < \frac{a}{1+b} \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow 0 < \frac{a+b}{1+a+b} = A < \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} = B$$

ដើម្បីស្រាយ $g\left(\frac{a+b}{1+a+b}\right) = g(A) < g\left(\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}\right) = g(B)$

ត្រូវរកអោយបាន $g(A) - g(B) < 0$

យើង បានរកឃើញ $0 < A = \frac{a+b}{1+a+b} < B = \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}$

មានន័យថាយើងបាន $A - B < 0$

$$g\left(\frac{a+b}{1+a+b}\right) = g(A) = 29A^2 + 6A + 1995$$

$$g\left(\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}\right) = g(B) = 29B^2 + 6B + 1995$$

$$g(A) - g(B) = 29A^2 + 29B^2 + 6A + 6B = 29(A+B)(A-B) + 6(A-B)$$

$$= (A-B)[26((A+B)+6)]$$

ដោយ $A - b < 0$

$$\left.\begin{array}{l} \\ 26(A+B)+6>0 \end{array}\right| \Rightarrow g(A) - g(B) < 0 \Rightarrow$$

$$g(A) < g(B) \Rightarrow g\left(\frac{a+b}{1+a+b}\right) < g\left(\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}\right)$$

ដូច្នេះ : បើ $a > 0$ និង $b > 0$ យើងបាន $\boxed{g\left(\frac{a+b}{1+a+b}\right) < g\left(\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}\right)}$

របៀបទី ២ ប្រើដេរីវេ

បើ $g(x)$ កើនក្នុងចន្លោះ $\mathcal{D}_2$ គឺ $\forall x \in \mathcal{D}_2$; $g'(x) > 0$

មានន័យថា $\forall \alpha$, $\beta \in \mathcal{D}_2$ បើ $\alpha < \beta$ នោះយើងបាន $g(\alpha) < g(\beta)$

ដំបូងយើងត្រូវស្រាយ : $a < \frac{a+b}{a+1+b} < \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}$

$$0<a \Rightarrow 1<1+a<1+a+b \Rightarrow 0<\frac{1}{1+a+b}<\frac{a}{1+a} \Rightarrow 0<\frac{a}{1+a+b}<\frac{a}{1+a} \quad (1)$$

$$0<b \Rightarrow 1<1+b<1+a+b \Rightarrow 0<\frac{1}{1+a+b}<\frac{1}{1+b} \Rightarrow 0<\frac{b}{1+a+b}<\frac{b}{1+b} \quad (2)$$

$$(1)+(2) \Rightarrow 0<\frac{a+b}{1+a+b}<\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}$$

$g(x) = 29x^2+6x+1995$ ជាអនុគមន៍ត្រីធា មានដែនកំណត់

$\mathcal{D} = \mathbb{R}$, $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} 29x^2 = +\infty$

$g'(x) = 58x+6$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 58x+6 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{29}$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{29}$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	អប្បបរមា	↗ $+\infty$

តាង $\mathcal{D}_2 = \left]-\frac{3}{29} \; ; \; +\infty\right[$, ដែល $\forall x \in \mathcal{D}_2$, $g'x>0$

$\Rightarrow g(x)$ កើនក្នុងចន្លោះ $\mathcal{D}_2$ ដូច្នេះយើងបាន

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{a+b}{1+a+b} \;,\; \frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b} \in \mathcal{D}_2 \\ \frac{a+b}{1+a+b}<\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b} \end{array}\right\} \Rightarrow$$ តាមលក្ខណៈអនុគមន៍កើន

$$\boxed{g\left(\frac{a+b}{1+a+b}\right)<g\left(\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}\right)}$$

V. គណនា $F(x) = \int \frac{4x^2-5x^3+2}{x^3}dx$ បើ $F(1) = -4$

$$F(x) = \int \frac{4x^2-5x^3+2}{x^3}dx = \int 4xdx - \int 5dx + \int \frac{2}{x^3}dx$$

$$= 4\int xdx - 5\int dx + 2\int \frac{dx}{x^3} = 2x^2 - 5x - \frac{1}{x^2} + c$$

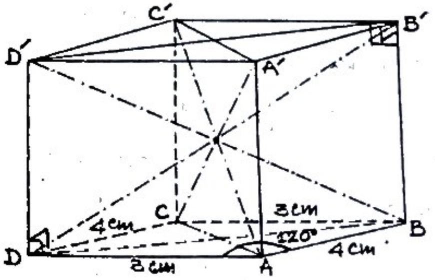
$$F(1) = -4 \Leftrightarrow 2-5-1+c = -4 \Leftrightarrow c = 0$$

ដូច្នេះ $\boxed{F(x) = 2x^2 - 5x - \frac{1}{x^2}}$

VI. មានប្រលេពីប៉ែតត្រង់មួយដែលជ្រុងបាតមានរង្វាស់ 3cm និង 4cm ហើយមុំដែលផ្គុំដោយជ្រុងទាំងពីរនេះមានរង្វាស់ 120° ។ រង្វាស់ទ្រនុងខាងនីមួយៗ ជាមធ្យមធរណីមាត្រនៃរង្វាស់ជ្រុងបាត ។

គណនារង្វាស់អង្កត់ទ្រូងប្រលេពីប៉ែតនោះ ។

ចំលើយ



តាង $ABCD\ A'B'C'D'$ ជាប្រលេពីប៉ែតកែងក្នុងសំនួរ បាត $ABCD$ និង $A'B'C'D'$ ជាប្រលេឡូក្រាមប៉ុនគ្នា

$|AB| = 4cm$, $|AD| = 3cm$

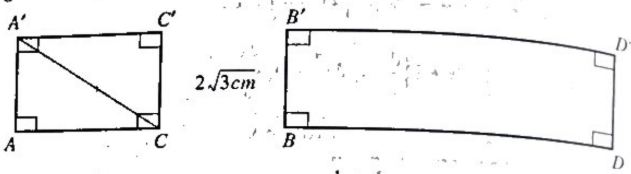
$\widehat{ABD} = 120°$

$\Rightarrow \widehat{ABC} = 60°$

តាមសម្មតិកម្ម ទ្រនុងខាងជាមធ្យមធរណីមាត្រនៃជ្រុងបាត

$|AA'|^2 = 4.3 = 12 \quad \Rightarrow |AA'| = 2\sqrt{3}cm$

មុខកាត់ទ្រូង $AA'C'C$ និង $BB'D'D$ ជាចតុកោណកែងដែលមាន អង្កត់ទ្រូង របស់ប្រលេពីប៉ែតត្រង់



រក $|AC|$ និង $|BD|$ $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$; $\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$

ក្នុងត្រីកោណ ABC តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស យើងបាន

$$|AC|^2 = |BA|^2 + |BC|^2 - 2|BA||BC|\cos\widehat{ABC} = 4^2 + 3^2 - 2\cdot 4\cdot 3\cdot \frac{1}{2}$$

$$= 25 - 12 = 13 \qquad \Rightarrow |AC| = \sqrt{13}$$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុសអនុវត្តក្នុងត្រីកោណ ABD

$$|BD|^2 = |AB|^2 + |AD|^2 - 2|AB||AD|\cos\widehat{BAD} = 4^2 + 3^2 - 2\cdot 4\cdot 4\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= 25 + 12 = 37 \qquad \Rightarrow |BD| = \sqrt{37}$$

គណនាអង្កត់ទ្រូង $|A'C|$ និង $|B'D|$

ក្នុងត្រីកោណ $AA'C$ កែងត្រង់ A :

$$|A'C|^2 = |A'A|^2 + |AC|^2 = 12 + 13 = 25$$

$$\Rightarrow |A'C| = \sqrt{25} = 5cm$$

ក្នុងត្រីកោណ $B'BD$ កែងត្រង់ B :

$$|B'D|^2 = |BB'|^2 + |BD|^2 = 12 + 37 = 49$$

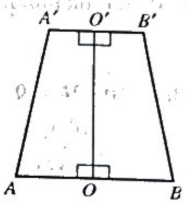
$$\Rightarrow |B'D| = \sqrt{49} = 7cm$$

អង្កត់ទ្រូងធំ មានរង្វាស់ $7cm$ អង្កត់ទ្រូងតូចមានរង្វាស់ $5cm$

VII. កំនាត់កោនមួយមាន a និង b ជារង្វាស់កាំថាសបាត ។ ក្រលាផ្ទៃមុខកាត់ដែលកាត់តាមអ័ក្សស្មើនឹងផលដកក្រលាផ្ទៃបាតទាំងពីរ ។

គណនាមាឌកំនាត់កោននោះ ។

ចំលើយ



A'

តាងមុខកាត់ដែលកាត់តាមអ័ក្ស ដោយ ចតុកោណព្នាយ សមបាត $ABB'A'$ ដែលមាន

$|AB| = 2a$ អង្កត់ផ្ចិតថាសបាតធំ

$|A'B'| = 2b$ អង្កត់ផ្ចិតថាសបាតតូច

$|oo'|$ ជារង្វាស់កំពស់

តាង S ក្រលាផ្ទៃមុខកាត់

$$S = \frac{2a+2b}{2}|oo'| = (a+b)|oo'|$$

តាង s_1 និង s_2 ក្រលាផ្ទៃបាតធំ និងបាតតូច

$s_1 = \Pi a^2$; $s_2 = \Pi b^2$ តែតាមសម្មតិកម្ម

$$S = s_1 - s_2 \Leftrightarrow (a+b)|oo'| = \Pi a^2 - \Pi b^2 = \Pi(a+b)(a-b)$$

$$\Rightarrow |oo'| = \Pi(a-b)$$

បើ V ជាមាឌកំនាត់កោននោះ យើងបាន

$$V = \frac{1}{3}(s_1 + s_2 + \sqrt{s_1 s_2})|oo'|$$

$$V = \frac{1}{3}(\Pi a^2 + \Pi b^2 + \Pi ab)\Pi(a-b)$$

$$= \frac{\Pi^2}{3}(a^2 + b^2 + ab)(a-b)$$

$$= \frac{\Pi^2}{3}(a^3 - b^3)$$

$$V = \frac{\Pi^2}{3}(a^3 - b^3)$$

VIII. (C) ជាខ្សែកោង តាងក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = f(x) = \frac{x^2-4x}{x^2-4x+3}$

1/. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ និងសង់ខ្សែកោង (C)

2/. រកកូអរដោនេនៃចំនុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង (C) ត្រង់ចំនុចមានអាប់ស៊ីស 0 និង 4 ។

3/. ដោះស្រាយតាមក្រាភិចអត្ថិភាពឫសសមីការ $(1-K)x^2-4(1-K)x-3K = 0$ ដោយពិភាក្សាតាមតំលៃ k ។

ចំលើយ

1/. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍

ដែនកំនត់ $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1 ; 3\}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{4}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-\frac{4}{x}}{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}} = 1$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-4x}{x^2-4x+3} = \infty$$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x^2-4x}{x^2-4x+3} = \infty$$

$$f'(x) = \frac{6(x-2)}{(x^2-4x+3)^2} \quad ; \; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x-2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow$$

$$y = f(2) = \frac{-4}{-1} = 4$$

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+1$

អនុគមន៍មានតំលៃអប្បបរមាស្មើ 4 ត្រង់ $x = 2$

អាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោង (C) និងអ័ក្ស $(x'0x)$ ជាឫសនៃសមីការ

$\frac{x^2-4x}{x^2-4x+3} = 0 \Leftrightarrow x^2-4x = 0 \Leftrightarrow$

$x(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \;\; ; \;\; x = 4$ ខ្សែកោង(C) កាត់ $(x'0x)$ ត្រង់ $x = 0$ និង $x = 4$ ។

អរដោនេចំនុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោង (C)និង $(y'0y)$ គឺ $y = f(0) = 0$

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1 \Rightarrow$ បន្ទាត់ $y = 1$ ជាអាស៊ីមតូតដេក រឺអាស៊ីមតូតស្រប $(x'0x)$ ។

$\lim_{x\to 1} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to 3} f(x) = \infty \Rightarrow$ បន្ទាត់ $x = 1$ និង $x = 3$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ រឺអាស៊ីមតូតស្រប $(y'0y)$

តាង S ជាកំពូលខ្សែកោង (C) យើងបាន $S(2;4)$

ក្នុងតំរុយអរតូនរមេ (SXY) យើងប្រើរូបមន្តប្តូរតំរុយ

$x = 2 + X$

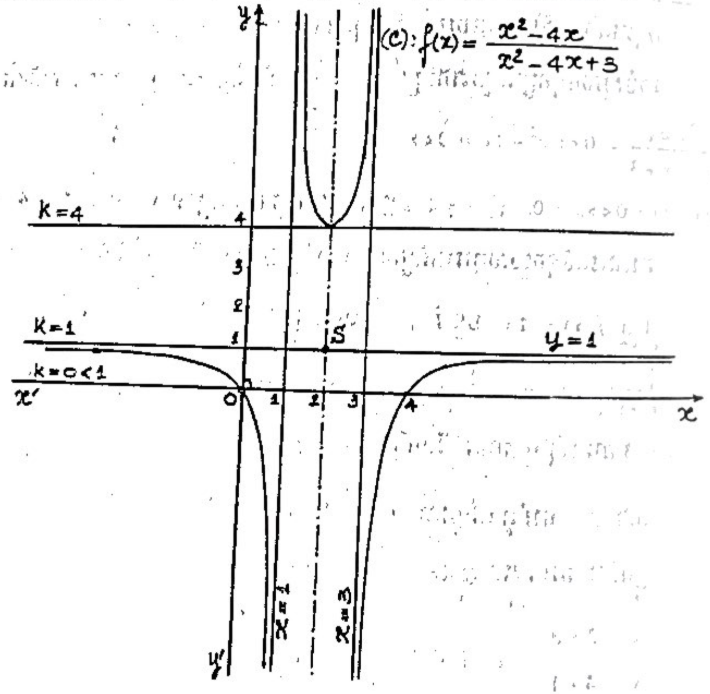
$y = 4 + Y$ $\Rightarrow$ សមីការខ្សែកោង (C) ទៅជា

$$4 + Y = \frac{(2+X)^2-4(2+X)}{(2+X)^2-4(2+X)+3} = \frac{X^2-4}{X^2-1} \Rightarrow$$

$$Y = f(X) = \frac{X^2-4}{X^2-1} - 4$$ ដោយ

$$f(-X) = \frac{(-X)^2-4}{(-X)^2-1} - 4 = \frac{X^2-4}{X^2-1} - 4 = f(X) \Rightarrow$$

$f(X)$ ជាអនុគមន៍គូ $\Rightarrow$ អ័ក្ស $(Y'SY)$ សមីការ $x = 2$ ជាអ័ក្សឆ្លុះរបស់ខ្សែកោង (C) ។



2/. រកកូអរដោនេនៃចំនុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង (C) ត្រង់ចំនុចអាប់ស៊ីស 0 និង 4

បើ $x = 0 \Rightarrow y = o \Rightarrow$ គល់ $O(0;0)$

បើ $x = 4 \Rightarrow y = o \Rightarrow$ តាងដោយ $A(4;0)$

មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង (C) ត្រង់ $x = 0$

គឺ $f'(0) = -\frac{12}{9} = -\frac{4}{3}$ សមីការបន្ទាត់ប៉ះត្រង់គល់ O

$$-\frac{4}{3} = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = -\frac{4}{3}x$$

មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង (C) ត្រង់ $x = 4$

គឺ $f'(4) = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$ សមីការបន្ទាត់ប៉ះត្រង់គល់ $A(4;0)$

$$\frac{4}{3} = \frac{y}{x-4} \Rightarrow y = \frac{4}{3}x - \frac{16}{3}$$

រកកូអរដោនេនៃចំនុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ប៉ះ $y = -\frac{4}{3}x$ និង $y = \frac{4}{3}x - \frac{16}{3}$ យើងបាន $-\frac{4}{3}x = \frac{4}{3}x - \frac{16}{3}$

$$-8x = -16 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = -\frac{8}{3}$$

បន្ទាត់ប៉ះទាំងពីរកាត់គ្នាត្រង់ $\boxed{x = 2\ ;\ y = -\frac{8}{3}}$

3/. ដោះស្រាយតាមក្រាភិចអត្ថិភាពឫសសមីការ $(1-K)x^2 - 4(1-K)x - 3K = 0$

សមីការនេះអាចសរសេរ $x^2 - Kx^2 - 4x + 4Kx - 3K = 0 \Leftrightarrow$

$$x^2 - 4x = K(x^2 - 4x + 3) \Leftrightarrow \frac{x^2-4x}{x^2-4x+3} = K$$

ជាសមីការអាប់ស៊ីសរវាងខ្សែកោង (C) និងបន្ទាត់ $y = K$ ស្រប $(x'ox)$

ដោយពិនិត្យតាមក្រាភិចរបស់ខ្សែកោង (C) យើងបានចំលើយក្នុងតារាងខាងក្រោម

K	អត្ថិភាព ឫសសមីការ
$-\infty$	សមីការ មានឫសពីរផ្សេងគ្នា x_1 និង x_2
1	សមីការ គ្មានឫស
	សមីការ គ្មានឫស
4	សមីការ មានឫសឌុប $x_1 = x_2 = 2$
$+\infty$	សមីការ មានឫសពីរផ្សេងគ្នា x_1 និង $x_2; x_1 < 0 < x_2$

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាប្រលងសញ្ញាប័ត្រមធ្យមសិក្សាកំរិត II ចំនេះទូទៅ និង
បំពេញវិជ្ជា សម័យប្រលងថ្ងៃ ០៨ សីហា ១៩៩៥

☆☆☆☆☆☆☆☆

I. ដោះស្រាយសមីការ $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0$

ចំលើយ

តាមលក្ខណៈក្រលប់ និងផ្តុំនៃវិធីបូក និងតាមរូបមន្ត

$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$ យើងអាចសរសេរ

$$(\cos 4x + \cos x) + (\cos 3x + \cos 2x) =$$

$$2\cos\frac{5x}{2}\cos\frac{3x}{2} + 2\cos\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\cos\frac{5x}{2}\left(\cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)$$

$$= 4\cos\frac{5x}{2}\cos x \ \cos\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \cos\frac{x}{2}\cos x \ \cos\frac{5x}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\cos\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\Pi}{2} + k\Pi \Leftrightarrow x = \Pi + k2\Pi$$

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\Pi}{2} + k\Pi$$

$$\cos\frac{5x}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{5x}{2} = \frac{\Pi}{2} + k\Pi \Leftrightarrow x = \frac{\Pi}{5} + \frac{k2\Pi}{5}$$

តាង S ជាសំនុំចំលើយ យើងបាន

$$S = \left\{\Pi + k2\Pi \ ; \ \frac{\Pi}{2} + k\Pi \ ; \ \frac{\Pi}{5} + \frac{k2\Pi}{5}\right\} \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$$

II. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $y = lg\left(\frac{x^2 - 9x + 20}{x - 5}\right)$

$lgA(x)$ មានន័យលុះត្រាតែ $A(x) > 0$

$A(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{x^2 - 9x + 20}{x - 5} = \frac{(x-4)(x-5)}{x-5} = x - 4 > 0$ និង $x \neq 5$

x	$-\infty$		4		5		$+\infty$
$A(x) > 0$		$-$	0	$+$	‖	$+$	

យើងបាន

$$\mathcal{D} = \ ]4 \ ; +\infty[\ - \{5\}$$

III. គណនា $I = \int_{-1}^{3}\left(\frac{x}{\sqrt{7+x^2}}+1\right)dx$

$$I = \int_{-1}^{3}\left(\frac{x}{\sqrt{7+x^2}}+1\right)dx = \int_{-1}^{3}\left(\frac{2x}{2\sqrt{7+x^2}}+1\right)dx$$

$$= [\sqrt{7+x^2}+x]_{-1}^{3} = [7-\sqrt{8}+1] = 8-2\sqrt{2}$$

យើងបាន $\boxed{I = 8-2\sqrt{2} = 2(4-\sqrt{2})}$

IV. 1/. សិក្សាទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $y = f(x) = \frac{2x^2-x+3}{1-x}$

2/. សង់ខ្សែកោង (C_1) តាងអនុគមន៍នេះក្នុងតំរុយអរតូនរមេ (oxy) ។

3/. សង់ខ្សែកោង (C_2) តាងអនុគមន៍ $y = g(x) = \left|\frac{2x^2-x+3}{1-x}\right|$ ក្នុងតំរុយអរតូនរមេ (oxy) ។

4/. ដោះស្រាយ និងពិភាក្សាទៅតាមតំលៃ m អត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការ $\left|\frac{2x^2-x+3}{1-x}\right| = m$ ។

ចំលើយ

1/. សិក្សាទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $y = f(x) = \frac{2x^2-x+3}{1-x}$

ដែនកំនត់ $\mathcal{D} = \mathbb{R}\setminus\{1\}$

សរសេរ $f(x)$ ជារាងកាណូនិច ដោយចែកភាគយក និងភាគបែង

យើងបាន $y = f(x) = \frac{2x^2-x+3}{1-x} = -2x-1+\frac{4}{1-x}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} -2x-1+\frac{4}{1-x} = \lim_{x\to\pm\infty} -2x = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} -2x-1+\frac{4}{1-x} = \lim_{x\to 1}\frac{4}{1-x} = \infty$$

$$f'(x) = \frac{u'v-v'u}{v^2} = \frac{2(-x^2+2x+1)}{(1-x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2+2x+1 = 0 \Leftrightarrow x^2-2x-1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1-\sqrt{2} & \Rightarrow y_1 = 4\sqrt{2}-3 \\ x_2 = 1+\sqrt{2} & \Rightarrow y_2 = -(4\sqrt{2}+3) \end{cases}$$

តាងអថេរភាព

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$(4\sqrt{2}-3)$	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$-(4\sqrt{2}+3)$	↘	$-\infty$

អនុគមន៍មានតំលៃអប្បបរមាស្មើ $(4\sqrt{2}-3)$ ចំពោះ $x = 1-\sqrt{2}$ ហើយមានតំលៃអតិបរមាស្មើ $-(4\sqrt{2}+3)$ ចំពោះ $x = 1+\sqrt{2}$ ។

2/. សង់ខ្សែកោង (C_1) តាងអនុគមន៍នេះក្នុងតំរុយអរតូនរមេ (oxy) ។

អាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោង (C_1) និង $(x'0x)$ ជាឫសនៃសមីការ

$\frac{2x^2-x+3}{1-x} = 0 \quad \Leftrightarrow 2x^2-x+3 = 0$ ដែលមាន

$\Delta = 1-24 = -23 < 0 \Rightarrow$ សមីការគ្មានឫស $\Rightarrow$ ខ្សែកោង (C_1) មិនកាត់ $(x'0x)$ ទេ ។

អរដោនេចំនុចប្រសព្វរវាង (C_1) និង $(y'0y)$ គឺ $y = f(0) = 3$

អាស៊ីមតូតឈរ $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \infty \Rightarrow$ បន្ទាត់ $x = 1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

អាស៊ីមតូតទ្រេត $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - (-2x - 1)] = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{4}{1 - x} = 0 \Rightarrow$

បន្ទាត់ $y = -2x - 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត

អាស៊ីមតូតទាំងពីរកាត់គ្នាត្រង់ $\omega(x = 1 \, ; y = -3)$ តាមរូបមន

ប្តូរតំរុយអនុវត្តក្នុងតំរុយ(ωXY) យើងបាន

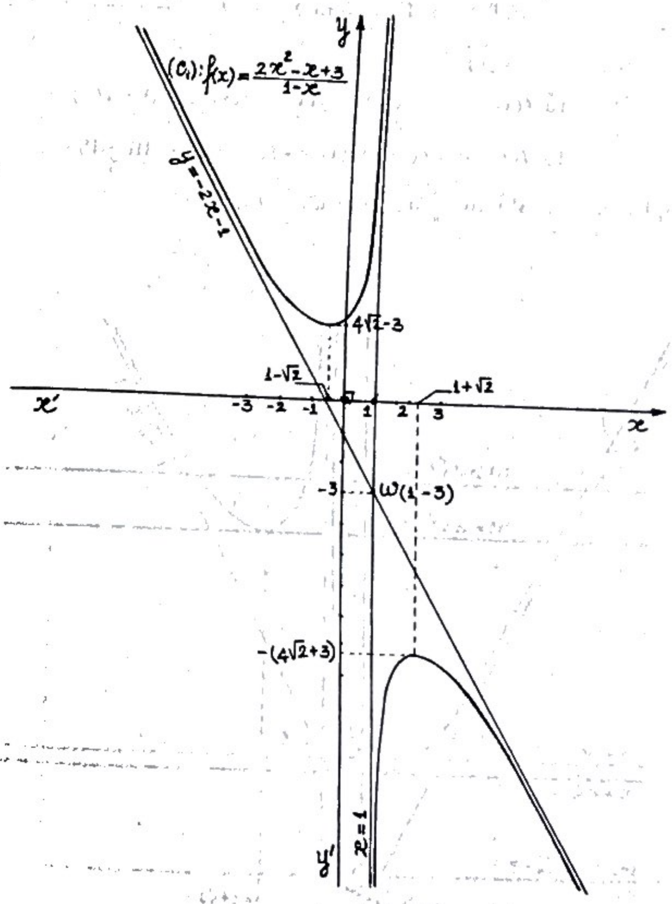
$x = 1 + X$
$y = -3 + Y$ នោះសមីការខ្សែកោង (C_1) អាចសរសេរ

$$-3 + y = \frac{2(1+X)^2 - (1+X) + 3}{1 - 1 - X} = \frac{-2X^2 + 3X + 4}{-X} \Rightarrow$$

$$Y = f(X) = \frac{2X^2 + 3X + 4}{-X} + 3 = \frac{-2X^2 - 4}{X}$$ ដោយ

$$f(-X) = \frac{-2(-X)^2 - 4}{-X} = \frac{-2X^2 - 4}{-X} = \frac{-2X^2 - 4}{X} = -f(X)$$

$\Rightarrow f(x)$ ជាអនុគមន៍សេស $\Rightarrow \omega(1 \; ; -3)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះរបស់ខ្សែកោង (C_1) ។



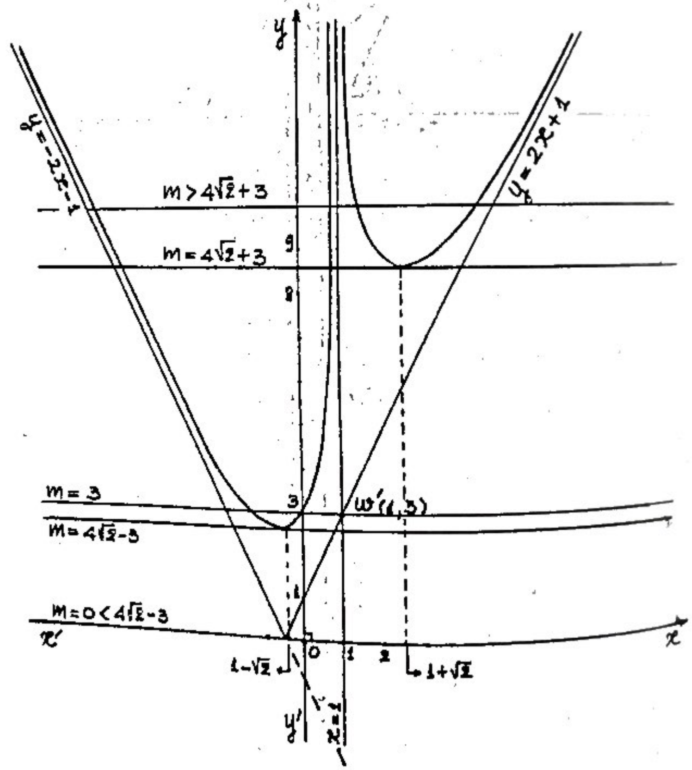
3/. សង់ខ្សែកោង (C_2) តាងអនុគមន៍ $y = g(x) = \left|\dfrac{2x^2 - x + 3}{1 - x}\right| = |f(x)|$

ដែនកំណត់ $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$\forall x \in \mathcal{D}$; បើ $f(x) \geqslant 0 \Rightarrow g(x) = |f(x)| = f(x) \Rightarrow (C_2) = (C_1)$

បើ $f(x) < 0 \Rightarrow g(x) = |f(x)| = -f(x) \Rightarrow (C_2)$ ជារូបឆ្លុះនៃ (C_1)

ធៀប $(x'0x)$ ។ យើងអាចធ្វើសំណង់ (C_2) បានពី (C_1) ។



4/. ដោះស្រាយ និងពិភាក្សាទៅតាមតំលៃ m អត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការ $\left|\dfrac{2x^2 - x + 3}{1 - x}\right| = m$ សមីការនេះអាចថាជាសមីការអាប់ស៊ីសរវាងខ្សែកោង (C_2) $y = \left|\dfrac{2x^2 - x + 3}{1 - x}\right|$ និងបន្ទាត់ $y = m$ ស្រប $(x'ox)$

ដោយពិនិត្យតាមក្រាភិច (C_2) យើងបានចំលើយក្នុងតារាងខាងក្រោម

m	អត្ថិភាព និង សញ្ញាឫសសមីការ $\left\|\dfrac{2x^2 - x + 3}{1 - x}\right\| = m$
$-\infty$	
	សមីការគ្មានឫស
$4\sqrt{2} - 3$	សមីការមានឫសឌុប $x_1 = x_2 = 1 - \sqrt{2} < 0$
	សមីការមានឫសពីរ $x_1 < x_2 = 0$
3	សមីការមានឫសពីរ $x_1 < x_2 = 0$
	សមីការមានឫសពីរ $x_1 < 0 < x_2$
$4\sqrt{2} + 3$	សមីការមានឫសបី $x_1 < 0 < x_2 < x_3 = 1 + \sqrt{2}$
	សមីការមានឫសបួន $x_1 < 0 < x_2 < x_3 < x_4$
$+\infty$	

V. ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A ដែល $|AB| = 6cm$; $|AC| = 8cm$ ។

S ជាចំនុចក្នុងលំហដែល $|SA| = |SB| = |SC| = 13cm$ ។

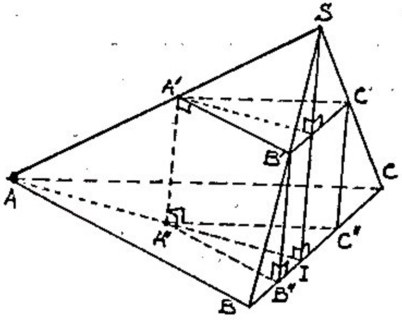
1/. បើ I ជាចំនុចកណ្តាលនៃ $[BC]$ ស្រាយថា $|SI|$ ជាកំពស់នៃតេត្រាអែត $SABC$ ។

2/. គណនាមាឌនៃតេត្រាអែត $SABC$

3/. $A'B'C'$ ជាត្រីកោណប្លែងនៃត្រីកោណ ABC ក្នុងបំលែងចាំងមាន S ជាកំពូល និងមានផលធៀប $\frac{1}{2}$ ។ គណនាមាឌនៃកំនាត់ពីរ៉ាមីត $ABCA'B'C'$

4/. $A''B''C''$ ជាត្រីកោណចំណោលកែងនៃត្រីកោណ $A'B'C'$ លើ (ABC) គណនាមាឌព្រីស $A'B'C'A''B''C''$ ។

ចំលើយ



1/. ស្រាយថា $|SI|$ ជាកំពស់នៃតេត្រាអែត តាមសម្មតិកម្ម

យើងមាន :

ត្រីកោណ ABC កែងត្រង់ A និង I ជាចំនុចកណ្តាលនៃ $[BC]$ នោះ I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC

$|SA| = |SB| = |SC|$ នោះ S ត្រូវស្ថិតនៅលើអ័ក្សរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC គឺបន្ទាត់កែង និងប្លង់(ABC) ត្រង់ $I \Rightarrow |SI|$ ជាកំពស់នៃតេត្រាអែត $SABC$ ។

2/. គណនាមាឌ V_1 នៃតេត្រាអែត $SABC$ ក្នុងត្រីកោណ ABC កែងត្រង់ A

យើងបាន $|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$

$\Rightarrow |BC| = 10cm \Rightarrow |IA| = |IB| = |IC| = \frac{|BC|}{2} = 5cm$

ក្នុងត្រីកោណ SIA កែងត្រង់ I

$|SI|^2 = |SA|^2 - |IA|^2 = 13^2 - 5^2 = 144$

$|SI| = \sqrt{144} = 12cm$

តាង S ក្រលាផ្ទៃត្រីកោណ ABC :

$S = \frac{1}{2}|AB||AC| = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24cm^2$

$V_1 = \frac{1}{3}S|SI| = \frac{1}{3}24 \cdot 12 = \boxed{96cm^3}$

3/. គណនាមាឌនៃកំនាត់ពីរ៉ាមីត $ABCA'B'C'$

សម្មតិកម្ម $A'B'C'$ ជាត្រីកោណប្លែងនៃត្រីកោណ ABC តាមបំលែងចាំងផ្ចិត S ផលធៀប $\frac{1}{2}$ នោះពីរ៉ាមីត $SA'B'C'$ ជាពីរ៉ាមីតប្លែងនៃពីរ៉ាមីត $SABC$ តាមបំលែងចាំងផលធៀប $\frac{1}{2}$ ដូច្នេះ $V_2 = V_1\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{V_1}{8}$

បើ V_3 ជាមាឌនៃកំនាត់ពីរ៉ាមីត $ABCA'B'C'$ យើងបាន

$V_3 = V_1 - V_2 = V_1 - \frac{V_1}{8} = \frac{7V_1}{8} = \frac{7 \times 96}{8} = 84cm^3$

4/. គណនាមាឌព្រីស $A'B'C'A''B''C''$

$A''B''C''$ ជាត្រីកោណចំណោលកែងនៃ $A'B'C'$ លើ ABC នោះយើងបានត្រីកោណ $A''B''C''$ និង $A'B'C'$ ប៉ុនគ្នា ព្រោះ $(A'B'C')//(ABC)$

តាង S' ក្រលាផ្ទៃត្រីកោណ $A'B'C'$ នោះយើងបាន

$$S' = S\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{S}{4} = \frac{24}{4} = 6cm^2$$

$|SI'|$ ជាអង្កត់ប្រវែងនៃ $|SI|$ តាមបំលែងចាំងផ្ចិត S

ផលធៀប $\frac{1}{2}$ $\Rightarrow |SI'| = |SI|\frac{1}{2} = \frac{|SI|}{2} \Rightarrow |I'I| = \frac{|SI|}{2} = \frac{12cm}{2} = 6cm$

បើ V_4 ជាមាឌនៃព្រីសនោះយើងបាន

$$V_4 = S'|I'I| = 6cm^2 \times 6cm = 36cm^3$$

លំហាត់

f ជាអនុគមន៍កំនត់ដោយ $f(x) = ax + b - \frac{1}{x}$

ក/. ចូរកំនត់តំលៃ a និង b ដើម្បីអោយខ្សែកោង (C) នៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ កាត់តាមពីរចំនុច $(-1;\ 0)$ និង $\left(\frac{1}{2};\ 0\right)$ ។

ខ/. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ និងគូសខ្សែកោង(C) តាងអនុគមន៍ $y = f(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{x}$ តាមតំរុយអរតូនមេ (oxy) ។

គ/. ដោយប្រើក្រាភិចខាងលើ ដោះស្រាយវិសមីការ $\frac{2x^2 + x - 1}{x} \geq 2x - 1$

ឃ/. ពីសំនង់ (C) ទាញសំនង់ខ្សែកោង (C') $y = g(x) = \left|\frac{2x^2 + x - 1}{x}\right|$ រួចដោះស្រាយអត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសមីការ ដោយពិភាក្សាទៅតាមតំលៃនៃ K

$$\left|\frac{2x^2 + x - 1}{x}\right| = K$$

ចំលើយ

ក/. កំនត់តំលៃ a និង b ដើម្បីអោយខ្សែកោង (C) $y = f(x) = ax + b - \frac{1}{x}$

- កាត់តាម $(-1;\ 0)$ លុះត្រាតែ $f(-1) = 0 \Leftrightarrow -a + b + 1 = 0 \Leftrightarrow$ $b = a - 1 \quad (1)$
- កាត់តាម $\left(\frac{1}{2};\ 0\right)$ លុះត្រាតែ $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{a}{2} + b - \frac{1}{\frac{1}{2}} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{2} + b - 2 = 0 \Leftrightarrow b = -\frac{a}{2} + 2 \quad (2)$$

ដោយផ្ទឹម (1) និង (2) យើងបាន : $a - 1 = -\frac{a}{2} + 2 \Leftrightarrow$

$$a + \frac{a}{2} = 2 + 1 = 3 \Leftrightarrow \frac{3a}{2} = 3 \Leftrightarrow \frac{a}{2} = 1 \Leftrightarrow a = 2$$

$b = a - 1 = 2 - 1 = 1$ ដូច្នេះយើងអាចទាញបាន $\boxed{a = 2\ ;\ b = 1}$

ខ/. a/- សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $y = f(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{x} = 2x + 1 - \frac{1}{x}$

ជាអនុគមន៍ប្រភាគសនិទាន ភាគបែង x មានឫស $x = 0$

ដូច្នេះអនុគមន៍មានដែនកំនត់ $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} 2x + 1 - \frac{1}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} 2x = \pm\infty$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} 2x + 1 - \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0} -\frac{1}{x} = \infty$$

$$f'(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2} \qquad u = 2x^2 + x - 1 \Rightarrow u' = 4x + 1 \qquad v = x \Rightarrow v' = 1$$

$$f'(x) = \frac{4x^2 + x - 2x^2 - x + 1}{x^2} = \frac{2x^2 + 1}{x^2}$$ ដោយយើងដឹងថា

$\forall x \in \mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\quad x^2 > 0$ និង $2x^2 + 1 > 0$ នោះ

$f'(x) = \frac{2x^2+1}{x^2} > 0 \Rightarrow f(x)$ កើនក្នុងដែនកំនត់ $\mathcal{D} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

$\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$ នោះបញ្ជាក់ថា បន្ទាត់ $(y'y)$ សមីការ $x = 0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

រកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេត តាមនិយមន័យបើ $y = ax+b$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ $y = f(x)$

នោះគេបាន $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-(ax+b)] = 0$

ដោយ $f(x) = 2x+1-\frac{1}{x}$ នោះយើងបាន $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-(2x+1)] = \lim_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) = 0$

ដែលបញ្ជាក់ថា បន្ទាត់ $y = 2x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតរបស់ខ្សែកោង (C)

អាស៊ីមតូតឈរ $x = 0$ និងអាស៊ីមតូតទ្រេត $y = 2x+1$ កាត់គ្នាត្រង់ $\omega(0;1)$ ។

ខ្សែកោង (C) មិនកាត់ $(y'0y)$ ទេព្រោះយើងពុំអាចរក $f(0)$ បានទេ

តែខ្សែកោង (C) កាត់ $(x'0x)$ ត្រង់ $x = -1$ និង $x = \frac{1}{2}$

រកផ្ចិតឆ្លុះរបស់ (C) ក្នុងតំរុយ (ωXY) យើងបានតាមរូបមន្តប្តូរតំរុយ

$x = 0+X = X$, $y = 1+Y$ អនុគមន៍ទៅជា

$$1+Y = \frac{2X^2+X-1}{X} \Rightarrow Y = \frac{2X^2+X-1}{X} - 1 = \frac{2X^2-1}{X}$$

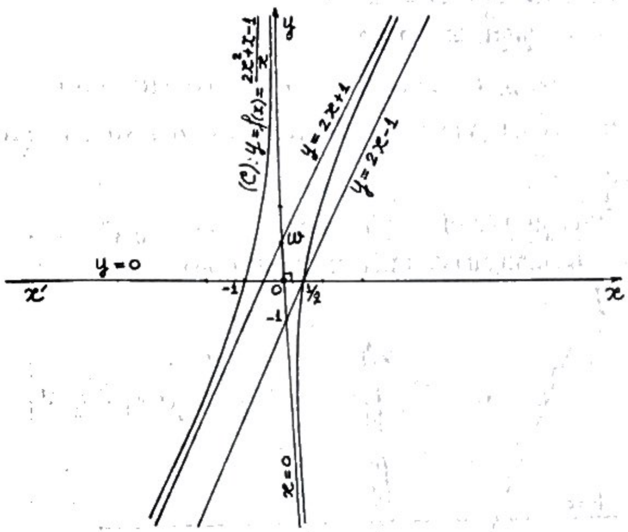
$Y = f(X) = \frac{2X^2-1}{X}$ ជាសមីការបង្រួមរបស់ (C)

$$f(-X) = \frac{2(-X)^2-1}{-X} = \frac{2X^2-1}{-X} = -f(X)$$

$\Rightarrow f(X)$ ជាអនុគមន៍សេស $\Rightarrow$ $\omega(0;1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះរបស់ខ្សែកោង (C) ។

$$f(-X) = \frac{2(-X)^2-1}{-X} = \frac{2X^2-1}{-X} = -\frac{2X^2-1}{X} = -f(X)$$

$\Rightarrow f(X)$ ជាអនុគមន៍សេស $\Rightarrow \omega(0;1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះរបស់ខ្សែកោង (C)



គ/. ប្រើក្រាភិចដោះស្រាយវិសមីការ $\frac{2x^2+x-1}{x} \geqslant 2x-1$

$y = \frac{2x^2+x-1}{x}$ ជាសមីការរបស់ខ្សែកោង (C)

$y = 2x-1$ ជាសមីការរបស់បន្ទាត់ស្របអាស៊ីមតូតទ្រេត $y = 2x+1$

តាមក្រាភិចវិសមីការ $\frac{2x^2+x-1}{x} \geqslant 2x-1$ គឺគេអោយយើងរើសរកតំលៃ x ដែល (C) នៅលើបន្ទាត់ $y = 2x-1$

ចំលើយដោយពិនិត្យតាមក្រាភិច $S = \left]-\infty \; ; \; O\right[\cup \left[\frac{1}{2} \; ; \; +\infty\right[$

ឃ. ទាញសង់ (C') $y = g(x) = \left|\frac{2x^2+x-1}{x}\right|$

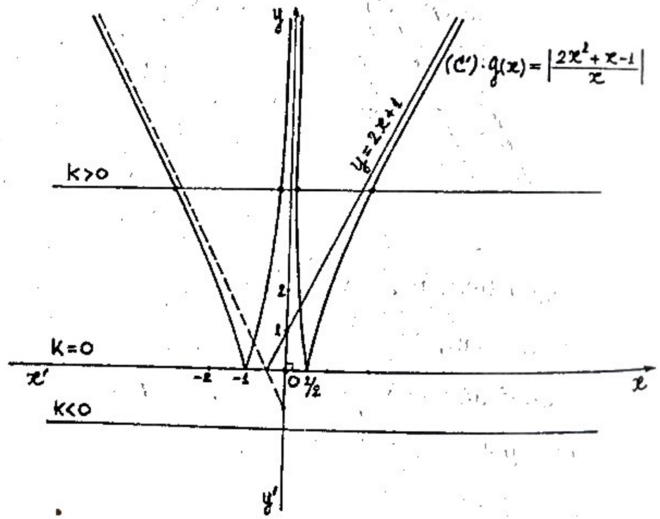
$g(x)$ មានដែនកំនត់ $\mathcal{D'} = \mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$g(x) = |f(x)|$ ដូច្នេះយើងអាចទាញបាន

បើ $f(x) \geqslant 0$ នោះ $|f(x)| = f(x) = g(x) \Rightarrow (C') = (C)$

បើ $f(x) < 0$ នោះ $|f(x)| = -f(x) \Rightarrow g(x) = -f(x) \Rightarrow (C')$ ជារូបឆ្លុះនៃ (C) ធៀប $(x'ox)$ ។

ដើម្បីបាន (C') ចំពោះខ្សែកោង (C) នៅលើ $(x'ox)$ យើងរក្សាទុក ចំពោះ (C) ដែលនៅក្រោម $(x'ox)$ យើងត្រូវគូរឆ្លុះធៀប $(x'ox)$



ដោះស្រាយតាមក្រាភិចអត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសមីការ $\left|\frac{2x^2+x-1}{x}\right| = K$ ជាសមីការអាប់ស៊ីសរវាង (C') និងបន្ទាត់ $y = K$ ស្រប $(x'ox)$

K	អត្ថិភាព និង សញ្ញាឫសមីការ
$-\infty$ ... O	សមីការគ្មានឫស
O	សមីការមានឫសពីរ $x_1 = -1 < 0 < x_2 = \frac{1}{2}$
O ... $+\infty$	សមីការមានឫសបួន $x_1 < x_2 < 0 < x_3 < x_4$

លំហាត់

គេអោយអនុគមន៍ $y = f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{x-2}$ ដែលមានខ្សែកោងតំនាង (C)

1/. គណនា a , b និង c ដោយដឹងថា (C) កាត់តាមចំនុច : $A\left(0 \; ; \; \frac{3}{2}\right)$, $B(-1 \; ; \; 0)$, $C(3 \; ; \; 0)$

2/. សិក្សាទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍ ដោយបញ្ជាក់សមីការអាស៊ីមតូត និងផ្ចិតឆ្លុះ រួចសង់ខ្សែកោង (C) ក្នុងតំរុយអរតូនរមេ (oxy) ។

3/. ស្រាយថាបន្ទាត់ (D_m) សមីការ $y = m(x-1)+3$ កាត់តាមចំនុចនឹង E មួយដែលត្រូវបញ្ជាក់ ។ កំនត់ m ដើម្បីអោយ (C) និង (D_m) មានចំនុចប្រសព្វពីរ M និង N ។ រកសំនុំចំនុចកណ្តាល I នៃ $[MN]$ កាលណា m ប្តូរតំលៃ ។

4/. ដោះស្រាយអត្ថិភាពឫសមីការ $f(x) = K$ ធៀបចំនួន 0 ដោយពិនិត្យទៅតាមតំលៃនៃ K ។

ចំលើយ

1/. គណនា a , b និង c ដោយដឹងថា (C) កាត់តាមចំនុច :

$A\left(0\ ;\ \frac{3}{2}\right) \Rightarrow \quad f(0) = \frac{c}{-2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow c = -3$

$B(-1\ ;\ 0) \Rightarrow \quad f(-1) = \frac{a-b-3}{-1-2} = \frac{a-b-3}{-3} = 0 \Leftrightarrow a-b-3 = 0$

$\Leftrightarrow b = a-3 \quad (1)$

$C(3\ ;\ 0) \Rightarrow \quad f(3) = \frac{9a+3b-3}{3-2} = \frac{9a+3b-3}{1} = 0 \Leftrightarrow$

$9a+3b-3 = 0 \Leftrightarrow 3a+b-1 = 0 \Leftrightarrow b = -3a+1 \quad (2)$

ដោយផ្ទឹម (1) និង (2) នោះយើងអាចទាញបាន

$a-3 = -3a+1 \Leftrightarrow 4a = 4 \Leftrightarrow a = 1 \Rightarrow b = 1-3 = -2$

ដូច្នេះយើងអាចទាញបាន $\boxed{a = 1 \ ;\ b = -2 \text{ និង } c = -3}$

2/. ដោយ $a=1$; $b=-2$ និង $c=-3$ នោះអនុគមន៍ទៅជា

$y = f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x-2}$ ជាអនុគមន៍ប្រភាគសនិទានមានដែនកំណត់ $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

សរសេរអនុគមន៍នេះជារាងកាណូនិច ដោយចែកភាគយក និងភាគបែង

យើងបាន $y = f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x-2} = x - \frac{3}{x-2}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x - \frac{3}{x-2} = \lim_{x\to\pm\infty} x = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} x - \frac{3}{x-2} = \lim_{x\to 2} -\frac{3}{x-2} = \infty$$

$f'(x) = \frac{U'V - V'U}{V^2} \qquad U = x-2x-3 \qquad \Rightarrow U' = 2x-2$

$\qquad\qquad\qquad\qquad V = x-2 \qquad \Rightarrow V' = 1$

យើងបាន : $f'(x) = \frac{2x^2-4x-2x+4-x^2+2x+3}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x+7}{(x-2)^2}$

ដោយ $(x-2)^2>0$, $\forall x\in \mathcal{D}$ នោះយើងបាន $f'(x)$ យកសញ្ញាតាមភាគយក

x^2-4x+7 ជាត្រីធាដឺក្រេទី ២នៃ x ដែល $\begin{cases} a = 1>0 \\ \Delta' = 4-7 = -3<0 \end{cases}$

នោះគឺរអោយ $x^2-4x+7>0$, $\forall x\in \mathcal{D}$

ដូច្នេះយើងបាន $f'(x)>0$, $\forall x\in \mathcal{D}$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	‖	+
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

អនុគមន៍នេះកើនក្នុង $\mathcal{D}$

បញ្ជាក់សមីការអាស៊ីមតូតដែលមាន

$\lim_{x\to 2} f(x) = \infty$ នោះបញ្ជាក់ថាបន្ទាត់ $x = 2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x)-x] = \lim_{x\to\pm\infty} -\frac{3}{x-2} = 0 \Rightarrow$ បន្ទាត់ $y = x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត

បញ្ជាក់ផ្ចិតឆ្លុះ អាស៊ីមតូតឈរ $x = 2$ និងអាស៊ីមតូតទ្រេត $y = x$ កាត់គ្នាត្រង់

ត្រង់ $\omega(x = 2\ ;\ y = 2)$ ស្រាយថា ω ជាផ្ចិតឆ្លុះរបស់ខ្សែកោង (C)

ក្នុងតំរុយ (ωXY) យើងបានតាមរូបមន្តនៃការប្តូរតំរុយ $x = 2+X$, $y = 2+Y$

នោះអនុគមន៍ទៅជា $2+Y = \frac{(2+X)^2-2(2+X)-3}{2+X-2} = \frac{4+4X+X^2-4-2X-3}{X}$

$$Y = f(X) = \frac{X^2+2X-3}{X} - 2 = \frac{X^2-3}{X}$$

$$Y = f(X) = \frac{X^2+2X-3}{X} - 2 = \frac{X^2-3}{X}$$

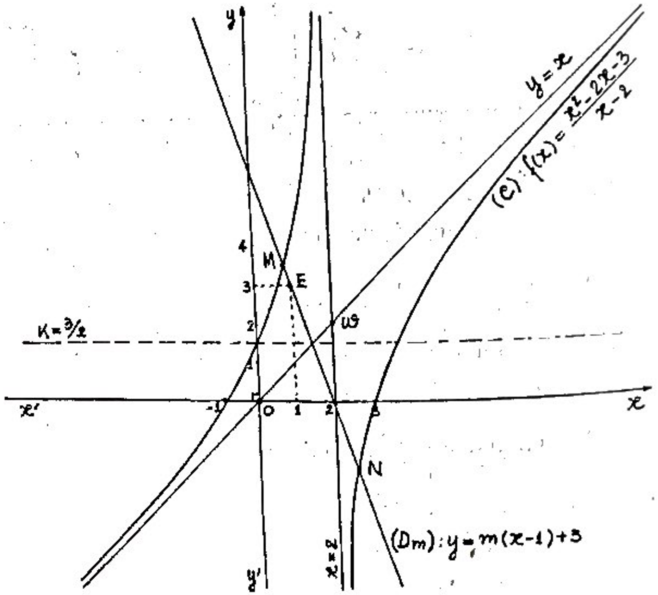
ដោយ $f(-X) = \frac{(-X)^2-3}{-X} = -\frac{X^2-3}{X} = -f(X)$

នោះយើងបាន $f(X)$ ជាអនុគមន៍សេស $\Rightarrow \omega(2\ ;\ 2)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះរបស់ខ្សែកោង(C) ។

(C) កាត់ $(x'ox)$ ត្រង់ចំនុចមានអាប់ស៊ីសជាឫសនៃសមីការ

$$\frac{x^2-2x-3}{x-2} = 0 \Leftrightarrow x^2-2x-3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

(C) កាត់ $(y'oy)$ ត្រង់ចំនុចអរដោនេ $y = f(0) = \frac{3}{2}$



3. ស្រាយបញ្ជាក់ថាបន្ទាត់ (D_m) សមីការ $y = m(x-1)+3$ កាត់តាមចំនុចនឹង E

សមីការនេះអាចសរសេរ $y-3 = m(x-1)$ វាផ្ទៀងផ្ទាត់ $\forall m \in \mathbb{R}$ លុះត្រាតែ

$$\begin{cases} y-3 = 0 \\ x-1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$ ដូច្នេះបន្ទាត់ (D_m) កាត់តាមចំនុចនឹង $E(1;3)$

សមីការអាប់ស៊ីសរវាង (C) និង (D_m)

$$\frac{x^2-2x-3}{x-2} = m(x-1)+3 \Leftrightarrow m(x-1)(x-2)+3(x-2) = x^2-2x-3$$

$$\Leftrightarrow mx^2-3mx+2m+3x-6 = x^2-2x-3 \Leftrightarrow$$

$(m-1)x^2-(3m-5)x+2m-3 = 0$ ជាសមីការអាប់ស៊ីសរវាង (C) និង (D_m)

ដើម្បីអោយ (C) និង (D_m) មានចំនុចប្រសព្វពីរ M និង N លុះត្រាតែសមីការអាប់ស៊ីស

មានឫសពីរ គឺ $\begin{cases} a = m-1 \neq 0 \\ \Delta \geqslant 0 \end{cases}$

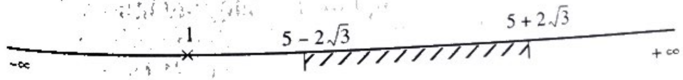
$a = m-1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$

$\Delta = (3m-5)^2 - 4(m-1)(2m-3) = 9m^2-30m+25-8m^2+12m+8m-12$

$\Delta = m^2-10m+13$ ជាត្រីធាដឺក្រេទី 2នៃ m មាន $\delta' = 25-13 = 12$

$= 4\times 3 = (2\sqrt{3})^2$ ដូច្នេះ Δ មានឫសពីរគឺ $m_1 = 5-2\sqrt{3}$, $m_2 = 5+2\sqrt{3}$

m	$-\infty$		$5-2\sqrt{3}$		$5+2\sqrt{3}$		$+\infty$
$\Delta \geqslant 0$		+	0	−	0	+	



យើងត្រូវយក : $m \in\ ]-\infty\ ;\ 5-2\sqrt{3}] \cup [5+2\sqrt{3}\ ;\ +\infty[\ \setminus \{1\}$

រកសំនុំចំនុចកណ្ដាល I នៃ $[MN]$ បើ m ផ្លាស់ប្ដូរតំលៃ

តាង $I(x, y)$ កូអរដោនេនៃ I

$$x = \frac{x_M + x_N}{2} = -\frac{b}{2a} = \frac{3m-5}{2(m-1)} = \frac{3m-5}{2m-2}$$

$$y = m\left(\frac{3m-5}{2m-2} - 1\right) + 3 = m\left(\frac{3m-5-2m+2}{2m-2}\right) + 3$$

$$= m\left(\frac{m-3}{2m-2}\right) + 3 = \frac{m^2-3m+6m-6}{2m-2} = \frac{m^2+3m-6}{2m-2}$$

$$x = \frac{3m-5}{2m-2} \quad ; \quad y = \frac{m^2+3m-6}{2m-2}$$

សរសេរទំនាក់ទំនងគ្មាន m រវាង x និង y រឺសសមីការសំនុំចំនុច

$$2mx - 2x = 3m - 5 \Leftrightarrow 2mx - 3m = 2x - 5 \Leftrightarrow m = \frac{2x-5}{2x-3}$$

$$y = \frac{\left(\frac{2x-5}{2x-3}\right)^2 + 3\frac{2x-5}{2x-3} - 5}{2\frac{2x-5}{2x-3} - 2} = \frac{(2x-5) + (6x-15)(2x-3) - 5(2x-3)^2}{(4x-10)(2x-3) - 2(2x-3)^2}$$

$$\frac{4x^2 - 20x + 25 + 12x^2 - 18x - 30x + 45 - 20x^2 + 60x - 45}{(2x-3)(4x-10-4x+6)} = \frac{-4x^2 - 8x + 25}{-4(2x-3)}$$

$$y = \frac{-4x^2 - 8x + 25}{-4(2x-3)} = \frac{4x^2 + 8x - 25}{8x - 12}$$

ដូច្នេះសំនុំចំនុច I គឺខ្សែកោង $y = \dfrac{4x^2 + 8x - 25}{8x - 12}$

ដោះស្រាយតាមក្រាភិចអត្ថិភាព និងសញ្ញារឺសសមីការ $f(x) = K$ ជាសមីការអាប់ស៊ីសរវាងខ្សែកោង (C) និងបន្ទាត់ $y = K$ ។ តាមក្រាភិចយើងបានចំលើយ

K	អត្ថិភាព និង សញ្ញាឫសមីការ
$-\infty$	សមីការមានឫសពីរ $x_1 < 0 < x_2$
$\frac{3}{2}$	$x_1 = 0 < x_2$
$+\infty$	សមីការមានឫសពីរ $0 < x_1 < x_2$

លំហាត់

អោយអនុគមន៍ $y = f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-1}$ ដោយមានខ្សែកោងតំនាង (C)

1/. សិក្សាទិសដៅអថេរភាព និងសង់ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍នេះក្នុងតំរុយអរតូនរមេ (oxy) ។ រកសមីការបន្ទាត់ខ្សែកោង (C) ត្រង់គល់ O នៃតំរុយ ។

2/. គេមានបន្ទាត់ (D_m) សមីការ $y = mx$ ។ កំនត់ m ដើម្បីអោយ (C) និង (D_m) មានចំនុចប្រសព្វពីរ M និង N ។ រក m កាលណាចំនុចទាំងពីរនេះមិនអាចមិនអាចនៅលើមែកតែម្ខាងរបស់ខ្សែកោង (C) ។ ក្នុងករណីនេះ រកសំនុំចំនុចកណ្ដាល I នៃ $[MN]$ កាលណា m ផ្លាស់ប្ដូរតំលៃ ។

3/. ដោះស្រាយអត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការតាមតំលៃ K

$$\frac{x^2-4}{x-1} = K$$

ចំលើយ

1/. សិក្សាទិសដៅអថេរភាព និងសង់ខ្សែកោង (C) ក្នុងតំរុយអរតូនរមេ (oxy)

អនុគមន៍ $y = f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-1}$ ជាអនុគមន៍ប្រភាគសនិទាន មានភាគបែង $x-1$

$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ដូច្នេះយើងត្រូវយកដែនកំនត់ $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

យើងសរសេរ $f(x)$ ជារាងកាណូនិច ដោយចែកភាគយក និងភាគបែងនោះយើងបាន $1 - \dfrac{3}{x-1}$

$$y = f(x) = \frac{x^2-4}{x-1} = x + 1 - \frac{3}{x-1}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} x = \pm\infty \quad , \quad \lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} -\frac{3}{x-1} = \infty$$

$$f'(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2} \qquad \begin{aligned} u &= x^2 - 4 &\Rightarrow\quad u' &= 2x \\ v &= x - 1 &\Rightarrow\quad v' &= 1 \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2-2x-x^2+4}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x+4}{(x-1)^2}$$ ដោយ $(x-1)^2>0$, $\forall x\in \mathcal{D}$

នោះ $f'(x)$ យកសញ្ញាតាមភាគយក x^2-2x+4 ជាត្រីធាដឺក្រេទី 2នៃ x ដែល

$$\begin{cases} a = 1>0 \\ \Delta' = 1-4 = -3<0 \end{cases} \Rightarrow x^2-2x+4>0 \quad \forall x\in \mathbb{R}$$

$f'(x)>0$, $\forall x\in \mathcal{D} \Rightarrow f(x)$ ជាអនុគមន៍កើនក្នុង $\mathcal{D}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

$\lim_{x\to 1} f(x) = \infty$ នោះយើងបានបន្ទាត់ $x = 1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

រកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេត

អនុគមន៍ $y = f(x)$ មានបន្ទាត់ $y = ax+b$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតលុះត្រាតែ

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x)-(ax+b)] = 0$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x)-(x+1)] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[x+1-\frac{3}{x-1}-(x+1)\right] = \lim_{x\to\pm\infty} -\frac{3}{x-1} = 0$$

នោះយើងបានតាមនិយមន័យខាងលើ បន្ទាត់ $y = x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត

អាស៊ីមតូតឈរ $x =$ និងអាស៊ីមតូតទ្រេត $y = x+$ កាត់គ្នាត្រង់ $\omega(1;2)$

ខ្សែកោង (C) កាត់ $(x'0x)$ ត្រង់ចំនុចមានអាប់ស៊ីសជាឫសសមីការ

$$\frac{x^2-4}{x-1} = 0 \Leftrightarrow x^2-4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

អរដោនេនៃចំនុចប្រសព្វរវាង (C) និង $(y'oy)$ គឺ $y = f(0) = 4$

ស្រាយថា $\omega(1;2)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះរបស់ខ្សែកោង (C) ក្នុងតំរុយ (ωXY) យើងបានតាមរូបមន្ត

នៃការប្តូរតំរុយ $\begin{cases} x = 1+X \\ y = 2+Y \end{cases}$

នោះទៅជាអនុគមន៍ $2+Y = \frac{(1+X)^2-4}{1+X-1} = \frac{1+2X+X^2-4}{X} = \frac{X^2+2X-3}{X}$

ដូច្នេះ $Y = f(X) = \frac{X^2+2X-3}{X} - 2 = \frac{X^2+2X-3-2X}{X} = \frac{X^2-3}{X}$

$$f(-X) = \frac{(-X)^2-3}{X} = \frac{X^2-3}{-X} = -\frac{X^2-3}{X} = -f(X)$$

$\Rightarrow f(X)$ ជាអនុគមន៍សេស $\Rightarrow \omega(1;2)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះរបស់ខ្សែកោង (C)

រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង (C) ត្រង់គល់ $O(0,0)$

- មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង (C) ត្រង់ O

$$f'(0) = \frac{4}{1} = 4$$

- សមីការបន្ទាត់ប៉ះត្រង់គល់ O

$$4 = \frac{y-0}{x-0} \Leftrightarrow y = 4x$$

2/. សមីការអាប់ស៊ីសរវាង (C) និង (D_m)

$$\frac{x^2-4}{x-1} = mx \Leftrightarrow mx^2-mx = x^2-4$$

$\Leftrightarrow (m-1)x^2-mx+4 = 0$ ជាសមីការអាប់ស៊ីសរវាង (C) និង (D_m) ។

កំនត់ m ដើម្បីអោយ (C) និង (D_m) មានចំនុចប្រសព្វពីរ M និង N

ដើម្បីអោយមាន M និង N លុះត្រាតែសមីការអាប់ស៊ីសមានឫសពីរ

$a = m-1 \neq 0$ និង $\Delta \geqslant 0$

$a \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$, $\Delta = m^2 - 16(m-1) = m^2 - 16m + 16$

ជាត្រីធាដឺក្រេទី 2នៃm មាន $\varsigma' = 64 - 16 = 48 = (4\sqrt{3})^2$

ដូច្នេះ Δ មានឫសពីរ $m_1 = 8 - 4\sqrt{3}$, $m_2 = 8 + 4\sqrt{3}$

m	$-\infty$		$8-4\sqrt{3}$		$8+4\sqrt{3}$		$+\infty$
$\Delta \geqslant 0$		+	0	−	0	+	

$-\infty$	1	$8-4\sqrt{3}$	$8+4\sqrt{3}$	$+\infty$

យើងត្រូវយក $m \in]-\infty \;;\; 8-4\sqrt{3}]\ U[8+4\sqrt{3} \;;\; +\infty[\setminus \{1\}$

រក m បើ M និង N មិននៅលើមែកតែម្ខាងនៃ(C)

គឺរក m ដើម្បីអោយ M និង N នៅលើមែកសងខាងនៃ(C) នោះ 1 ត្រូវនៅចន្លោះឫសនៃសមីការអាប់ស៊ីស គឺ $af(1) < 0$

$a = m - 1$

$f(1) = m - 1 - m + 4 = 3$

$\Rightarrow af(1) = 3(m-1)$

m	$-\infty$		1		$+\infty$
$af(1) < 0$		−	0	+	

យើងត្រូវយក $\boxed{m \leqslant 1}$

រកសំនុំចំនុចកណ្ដាល I នៃ $[MN]$ តាង $I(x, y)$

$x = \dfrac{x_M + x_N}{2} = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{m}{2}$ អថេរ

$y = mx = \dfrac{m^2}{2}$ អថេរ

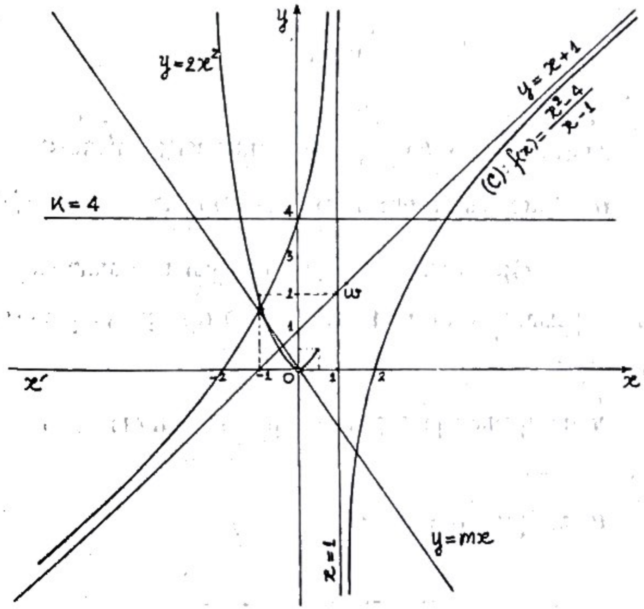
រកទំនាក់ទំនងគ្មានm រវាង y និង x រឺសមីការសំនុំចំនុច I

$x = \dfrac{m}{2} \Rightarrow m = 2x \Rightarrow y = \dfrac{(2x)^2}{2} = 2x^2$

ដូច្នេះ សំនុំចំនុច I ជាប៉ារ៉ាបូល $y = 2x^2$ ដោយ

$m \leqslant 1 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{m}{2} \leqslant \dfrac{1}{2}$

3/. ដោះស្រាយតាមក្រាភិចអត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការ $\dfrac{x^2-4}{x-1} = K$ ជាសមីការអាប់ស៊ីសរវាងខ្សែកោង (C) និងបន្ទាត់ $y = K$ ស្រប $(x'ox)$



K	អត្ថិភាព និង សញ្ញាឫសសមីការ
$-\infty$	សមីការមានឫសពីរ $x_1 < 0 < x_2$
4	សមីការមានឫសពីរ $x_1 = 0 < x_2$
$+\infty$	សមីការមានឫសពីរ $0 < x_1 < x_2$

លំហាត់

គេមានអនុគមន៍ $y = f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-2}$ ដែលមានខ្សែកោងតំណាង (C)

1/. រកតំលៃ a និង b ដោយដឹងថាខ្សែកោង (C) កាត់តាម : $(1;-1)$, $\left(3;\frac{1}{3}\right)$

2/. ចំពោះតំលៃ a និង b រកឃើញ ចូរសិក្សាទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។ ស្រាយថាបន្ទាត់ $x = 1$ ជាអ័ក្សឆ្លុះនៃខ្សែកោង (C) រួចសង់ខ្សែកោង (C) ក្នុងតំរុយអរតូនរមេ (oxy) ។

3/. ដោះស្រាយតាមក្រាភិចអត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការដោយពិភាក្សាតាមតំលៃនៃ m : $f(x) = m$

4/. គូសខ្សែកោង (C') តាងអនុគមន៍ $y = |f(x)|$

ចំលើយ

1/. រកតំលៃ a និង b

បើខ្សែកោង (C) កាត់តាម $(1;-1)$ យើងបាន $f(1) = -1$

$$\frac{a}{1} + \frac{b}{1-2} = a - b = -1 \Leftrightarrow a = b - 1$$

បើខ្សែកោង (C) កាត់តាម $\left(3;\frac{1}{3}\right)$ យើងបាន $f(3) = \frac{1}{3}$

$$\frac{a}{3} + \frac{b}{3-2} = \frac{a}{3} + b = \frac{1}{3} \Leftrightarrow a + 3b = 1 \Leftrightarrow a = -3b + 1$$

ដោយ $\begin{cases} a = b - 1 \\ a = -3b + 1 \end{cases} \Rightarrow b - 1 = -3b + 1 \Leftrightarrow 4b = 2 \Leftrightarrow$

$$b = \frac{1}{2} \quad ; \quad a = b - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

ដូច្នេះយើងបាន $a = -\frac{1}{2}$; $b = \frac{1}{2}$

2/. បើ $a = -\frac{1}{2}$; $b = \frac{1}{2}$ នោះអនុគមន៍ទៅជា :

$$y = f(x) = -\frac{1}{2x} + \frac{1}{2(x-2)} = \frac{-(x-2)+x}{2x(x-2)} = \frac{-x+2+x}{2x(x-2)}$$

$$= \frac{2}{2x(x-2)} = \frac{1}{x(x-2)}$$

$$y = f(x) = \frac{1}{x(x-2)}$$

$x(x-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$ យើងបាន $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0;2\}$

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^2} = 0$, $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to 2} f(x) = \infty$

$u = 1 \quad \Rightarrow \quad u' = 0$

$f'(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ $\quad v = x(x-2) = x^2 - 2x \quad \Rightarrow \quad v' = 2x - 2$

$f'(x) = \frac{-2x+2}{x^2(x-2)^2}$ $\quad x^2(x-2)^2 > 0 \quad , \quad \forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow$

$f'(x)$ យកសញ្ញាតាមភាគយក $-2x+2$ ជាទ្វេធាដឺក្រេទី ១នៃ x ដែលមានឫស $x = 1$

បើ $x = 1 \Rightarrow y = -1$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	+	0	−	‖	−	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	−1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

អនុគមន៍មានតំលៃអតិបរមាស្មើ 1 ត្រង់ $x = 1$

ស្រាយថាបន្ទាត់ $x = 1$ ជាអ័ក្សឆ្លុះរបស់ខ្សែកោង (C)

យើងអាចប្រើវិធីរបៀបផ្សេងគ្នា

a/. តាមទ្រឹស្តីបទ $x = a$ ជាអ័ក្សឆ្លុះ លុះត្រាតែ $f(a+x) = f(a-x)$

រក $f(1+x) = \frac{1}{(1+x)(1+x-2)} = \frac{1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x^2-1}$

រក $f(1-x) = \frac{1}{(1-x)(1-x-2)} = \frac{1}{(1-x)(-1-x)} = \frac{1}{x^2-1}$

ដោយ $f(1+x) = f(1-x) = \frac{1}{x^2-1}$ នោះយើងបានបន្ទាត់ $x = 1$ ជាអ័ក្សឆ្លុះរបស់ខ្សែកោង (C) ។

b/. តាមវិធីផ្លូវតំរុយ ដោយអនុគមន៍មានតំលៃអប្បបរមាស្មើ -1 ត្រង់ $x = 1$ នោះយើងបាន $S(1;-1)$ ជាកំពូលរបស់ខ្សែកោង(C) យើងប្រើតំរុយ (SXY)

តាមរូបមន្តនៃការផ្លូវតំរុយ $x = 1 + X$, $y = -1 + Y$ នោះអនុគមន៍ទៅជា

$-1 + Y = \frac{1}{(1-X)(1-X-2)} = \frac{1}{(1-X)-(1-X)} = \frac{1}{X^2-1}$

ដូច្នេះ $Y = f(X) = \frac{1}{X^2-1} + 1 = \frac{1+X^2-1}{X^2-1} = \frac{X^2}{X^2-1}$

ដោយ $f(-X) = \frac{(-X)^2}{(-X)^2-1} = \frac{X^2}{X^2-1} = f(X) \Rightarrow f(X)$

ជាអនុគមន៍គូ $\Rightarrow$ អ័ក្ស (SY) សមីការ $x = 1$ ជាអ័ក្សឆ្លុះនៃខ្សែកោង (C)

សង់ខ្សែកោង (C) ក្នុងតំរុយអរតូនរមេ (oxy)

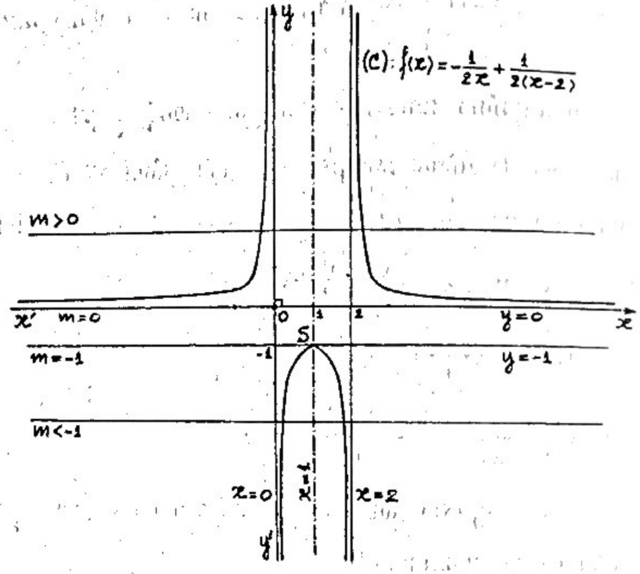
ខ្សែកោង (C) មិនកាត់អ័ក្សទាំងពីរទេ ព្រោះយើងពុំអាចអោយតំលៃ $x = 0$

ហើយ $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$

ដោយ $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ នោះយើងបានបន្ទាត់ $y = 0$ រឺ $(x'ox)$ ជាអាស៊ីមតូតដេក

$\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to 2} f(x) = \infty$ នោះបន្ទាត់ $x = 0$ រឺ $(y'oy)$ និង

បន្ទាត់ $x = 2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ



3/. ដោះស្រាយតាមក្រាភិចអត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការ $f(x) = m$

សមីការ $f(x) = m$ ជាសមីការអាប់ស៊ីសរវាងខ្សែកោង (C) និងបន្ទាត់ $y = m$ ស្រប$(x'ox)$

K	អត្ថិភាព និង សញ្ញាឫសសមីការ
$-\infty$	
	សមីការមានឫសពីរ $0 < x_1 < x_2$
-1	សមីការមានឫសឌុប $x_1 = x_2 = 1 > 0$
	សមីការគ្មានឫស
0	សមីការគ្មានឫស
	សមីការមានឫសពីរ $x_1 < 0 < x_2$
$+\infty$	

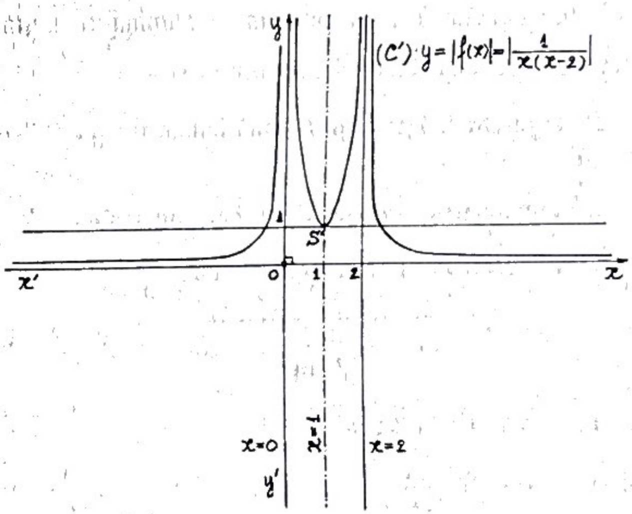
4/. គូសខ្សែកោង (C') តាងអនុគមន៍ $y = |f(x)|$

អនុគមន៍ $y = |f(x)| = \left|\frac{1}{x(x-2)}\right| = \left|\frac{1}{x^2-2x}\right|$

មានដែនកំណត់ $\mathcal{D}' = \mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0;2\}$

យើងបាន បើ $f(x) \geqslant 0 \Rightarrow |f(x)| = f(x) \Rightarrow (C') = (C)$

បើ $f(x) < 0 \Rightarrow |f(x)| = -f(x)$ នោះ (C') ជារូបឆ្លុះនៃ (C) ធៀប$(x'ox)$



កំណត់សំគាល់ :

បើខ្សែកោង (C) នៅក្រោម $(x'ox)$ យើងត្រូវគូសរូបឆ្លុះរបស់វាធៀប$(x'ox)$ ទើបបាន (C')

បើ (C') នៅលើ $(x'ox)$ នោះយើងទុកដដែលទើបបាន (C')

លំហាត់

អោយអនុគមន៍ $y = f(x) = \dfrac{ax^2+bx}{x^2-4x+3}$ ដែលមានខ្សែកោងតំណាង (C)

1/. គណនាតំលៃលេខមេគុណ a និង b ដោយដឹងថាអនុគមន៍មានតំលៃអប្បបរមាស្មើ 4 ត្រង់ $x = 2$ ។

2/. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ ចំពោះតំលៃ a និង b ដែលរកឃើញ បញ្ជាក់សមីការអាស៊ីមតូតទាំងអស់ ។ ស្រាយថាបន្ទាត់ $x = 2$ ជាអ័ក្សឆ្លុះរបស់ខ្សែកោង (C) រួចសង់ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍នេះក្នុងតំរុយអរតូនរមេ (oxy) ។

3/. រកកូអរដោនេនៃចំនុចប្រសព្វរបស់បន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង (C) ត្រង់ $x = 0$ និង $x = 4$ ។

4/. ដោយប្រើក្រាភិច ដោះស្រាយអត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការ $(1-k)x^2-4(1-k)x-3k = 0$ ដោយពិភាក្សាទៅតាមតំលៃ K ។

ចំលើយ

1/. គណនាមេគុណ a និង b

អនុគមន៍ $y = f(x) = \dfrac{ax^2+bx}{x^2-4x+3}$

$x^2-4x+3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \end{array}\right.$ នោះយើងបានដែនកំនត់ $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1;3\}$

$y' = \dfrac{u'v-v'u}{v^2}$ $\quad u = ax^2+bx \Rightarrow u' = 2ax+b$

$v = x^2-4x+3 \Leftrightarrow v' = 2x-4$

$$y' = \frac{(2ax+b)(x^2-4x+3)-(2x-4)(ax^2+bx)}{(x^2-4x+3)^2} = \frac{(-4a-b)x^2+6ax+3b}{(x^2-4x+3)^2}$$

$x = 2$ ធ្វើអោយ $f(x)$ មានតំលៃអប្បបរមានោះ $x = 2$ ជាឫសនៃ $f'(x) \Rightarrow$

$f'(2) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{(-4a-b)4+12a+3b}{(4-8+3)^2} = 0 \Leftrightarrow -16a-4b+12a+3b = 0$

$\Leftrightarrow -4a-b = 0 \Leftrightarrow b = -4a \quad (1)$

$x = 2$ អនុគមន៍មានតំលៃលេខស្មើ 4 នោះ $f(2) = 4 \Leftrightarrow$

$\dfrac{4a+2b}{4-8+3} = \dfrac{4a+2b}{-1} = 4 \Leftrightarrow 4a+2b = -4 \Leftrightarrow$

$2a+b = -2 \Leftrightarrow b = -2a-2 \quad (2)$

ដោយផ្ទឹម (1) និង (2) យើងបាន $-2a-2 = -4a$

$2a = 2 \Leftrightarrow a = 1 \quad \Rightarrow b = -4a = -4$

យើងបាន $\boxed{a = 1 \quad , \quad b = -4}$

2/. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $y = f(x) = \dfrac{x^2-4x}{x^2-4x+3}$

ដែនកំនត់ អនុគមន៍ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ប្រភាគសនិទានមានភាគបែង x^2-4x+3

$x^2-4x+3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \end{array}\right.$ ដូច្នេះយើងបាន $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1;3\}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \infty \quad , \quad \lim\limits_{x\to 3} f(x) = \infty$

$f'(x) = \dfrac{u'v-v'u}{v^2}$ $\quad u = x^2-4x \Rightarrow u' = 2x-4$

$v = x^2-4x+3 \Rightarrow v' = 2x-4$

$$f'(x) = \frac{(2x-4)(x^2-4x+3)-(2x-4)(x^2-4x)}{(x^2-4x+3)^2} = \frac{(2x-4)(x^2-4x+3-x^2+4x)}{(x^2-4x+3)^2}$$

$$= \frac{(2x-4)\cdot 3}{(x^2-4x+3)^2} = \frac{6(x-2)}{(x^2-4x+3)^2} \quad \text{ដោយ } (x^2-4x+3)^2 > 0 \quad , \quad \forall x \in \mathcal{D}$$

នោះ $f'(x)$ យកសញ្ញាតាមភាគយក $6(x-2)$ ដែលជាទ្វេធាដឺក្រេទី 1 នៃ x មានឫស $x = 2$ បើ $x = 2 \Rightarrow y = f(2) = 4$

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	1	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	4	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	1

អនុគមន៍មានតំលៃអប្បបរមាស្មើ 4 ត្រង់ $x = 2$

- បញ្ជាក់សមីការអាស៊ីមតូតទាំងអស់ដែលមាន

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$ នោះយើងបានបន្ទាត់ $y = 1$ ជាអាស៊ីមតូតដេក

$\lim_{x \to 1} f(x) = \infty \quad , \quad \lim_{x \to 3} f(x) = \infty$

នោះយើងបានបន្ទាត់ $x = 1$ និង $x = 3$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

- ស្រាយបញ្ជាក់ថា បន្ទាត់ $x = 2$ ជាអ័ក្សឆ្លុះរបស់ខ្សែកោង (C) ដោយអនុគមន៍មានតំលៃអតិបរមាស្មើ 4 ត្រង់ $x = 2$ នោះយើងបាន $S(2;4)$ ជាកំពូលរបស់ខ្សែកោង (C) ។ ក្នុងតំរុយអរតូនរមេ (SXY) យើងបានតាមរូបមន្តការដូរតំរុយ

$x = 2 + X \quad ; \quad y = 4 + Y$ នោះអនុគមន៍ទៅជា

$$4 + Y = \frac{(2+X)^2 - 4(2+X)}{(2+X)^2 - 4(2+X) + 3} = \frac{4 + 4X + X^2 - 8 - 4X}{4 + 4X + X^2 - 8 - 4X + 3} = \frac{X^2 - 4}{X^2 - 1} \Rightarrow$$

$$Y = f(X) = \frac{X^2 - 4}{X^2 - 1} - 4$$

តែ $f(-X) = \frac{(-X)^2 - 4}{(-X)^2 - 1} - 4 = \frac{X^2 - 4}{X^2 - 1} - 4 = f(X) \Rightarrow f(X)$ ជាអនុគមន៍

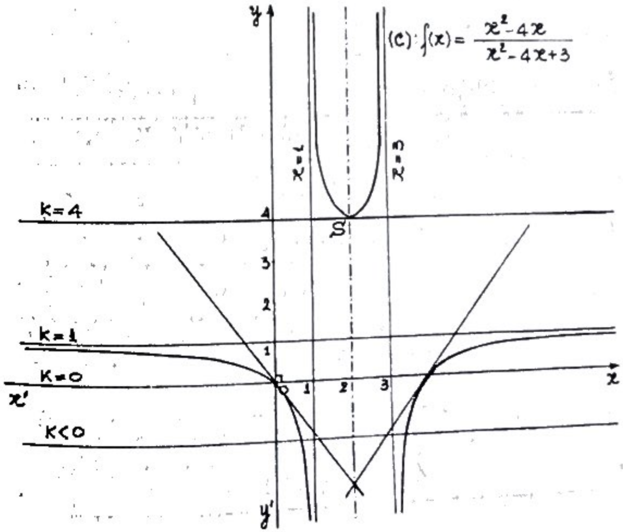
$\Rightarrow$ អ័ក្ស (SY) សមីការ $x = 2$ ជាអ័ក្សឆ្លុះរបស់ (C)

- សង់ខ្សែកោង (C)

ខ្សែកោង (C) កាត់ $(x'ox)$ ត្រង់ចំនុចមានអាប់ស៊ីសជាឫសនៃសមីការ :

$$\frac{x^2 - 4x}{x^2 - 4x + 3} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 4 \end{array} \right.$$

ខ្សែកោង (C) កាត់ $(y'oy)$ ត្រង់ចំនុចមានអរដោនេ : $y = f(o) = 0$



3/. បើ $x = 0 \Rightarrow y = f(O) = 0$ ដូច្នេះគល់ $O(0,0)$

បើ $x = 4 \Rightarrow y = f(4) = 0$ $(4,0)$

សមីការនៃបន្ទាត់ប៉ះ (C) ត្រង់ $x = 0$; មានមេគុណប្រាប់ទិស $f'(O) = \frac{-12}{9} = -\frac{4}{3}$

មានសមីការ $-\frac{4}{3} = \frac{y-0}{x-0} \Leftrightarrow y = -\frac{4}{3}x$

សមីការនៃបន្ទាត់ប៉ះ (C) ត្រង់ $x = 4$; មានមេគុណប្រាប់ទិស $f'(4) = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$

មានសមីការ $\frac{4}{3} = \frac{y-0}{x-4} \Leftrightarrow y = \frac{4x}{3} - \frac{16}{3}$

គណនាកូអរដោនេចំនុចប្រសព្វនៃបន្ទាត់ប៉ះទាំងពីរ

$\frac{4}{3}x - \frac{16}{3} = -\frac{4}{3}x \Leftrightarrow \frac{8}{3}x = \frac{16}{3} \Leftrightarrow 8x = 16 \Leftrightarrow x = 2$

$\Rightarrow y = \frac{-4}{3} \cdot 2 = -\frac{8}{3}$ យើងបានចំនុចប្រសព្វតាងដោយ $I\left(2;-\frac{8}{3}\right)$

4/. ដោះស្រាយតាមក្រាភិចអត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការ

$(1-K)x^2 - 4(1-K)x - 3K = 0 \Leftrightarrow x^2 - Kx^2 - 4x + 4Kx - 3K = o$

$x^2 - 4x = K(x^2 - 4x + 3) \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 4x + 3} = K$

ជាសមីការអាប់ស៊ីសរវាងខ្សែកោង (C) និងបន្ទាត់ $y = K$ ស្រប $(x'Ox)$

K	អត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការ
$-\infty$	
	សមីការ មានឫសពីរ $0 < x_1 < x_2$
0	សមីការ មានឫសពីរ $x_1 = 0 < x_2 = 4$
	សមីការ មានឫសពីរ $x_1 < 0 < x_2$
1	សមីការ គ្មានឫស
	សមីការ គ្មានឫស
4	សមីការ មានឫសឌុប $x_1 = x_2 = 2 > 0$
	សមីការ មានឫសពីរ $0 < x_1 < x_2$
$+\infty$	

លំហាត់

1/. គេមានអនុគមន៍ $y = f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ ដែលមានក្រាបតំនាង (C) ។

សិក្សាទិសដៅអថេរភាពនិងសង់ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍នេះក្នុងតំរុយអរតូនរមេ (Oxy)

2/. តាម $A \in (C)$ អាប់ស៊ីស O គេគូសបន្ទាត់ (D_m) មានមេគុណប្រាប់ទិស m ។ សរសេរសមីការបន្ទាត់ (D_m) ។ រួចកំនត់ m ដើម្បីអោយ (C) និង (D_m) មានចំនុចប្រសព្វពីរទៀត M និង N ខុសពី A ។ រកកូអរដោនេចំនុចកណ្តាល I នៃ $[MN]$ ជាអនុគមន៍នៃ m រួចរកសំនុំចំនុច I បើ m ផ្លាស់ប្តូរតំលៃ ។

3/. ដោះស្រាយតាមក្រាភិចអត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការ ដោយពិភាក្សាទៅតាមតំលៃនៃ K ។ $(K-1)x^2 - K - 1 = 0$

ចំលើយ

1/. សិក្សាទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $y = f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

អនុគមន៍នេះជាប្រភេទអនុគមន៍សនិទានដែលមានភាគបែង $x^2 - 1$

$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \end{array}\right.$ ដូច្នេះ $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$; $\lim_{x \to -1} f(x) = \infty$; $\lim_{x \to 1} f(x) = \infty$

$f'(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ $\quad u = x^2 + 1 \Rightarrow u' = 2x$ $\quad v = x^2 - 1 \Leftrightarrow v' = 2x$

$f'(x) = \frac{2x(x^2-1) - 2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$; $f'(x)$ យកសញ្ញាតាម $-4x$, $\forall x \in \mathcal{D}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = f(O) = -1$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

អនុគមន៍មានតំលៃអតិបរមាស្មើ -1 ត្រង់ $x = 0$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$ នោះយើងបានបន្ទាត់ $y = 1$ ជាអាស៊ីមតូតដេក

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \infty$

យើងបានបន្ទាត់ $x = -1$ និង $x = 1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

អាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោង (C) និង $(x'Ox)$ ជាឫសនៃសមីការ

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x^2-1} = 0 \Leftrightarrow x^2+1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$ សមីការគ្មានឫស

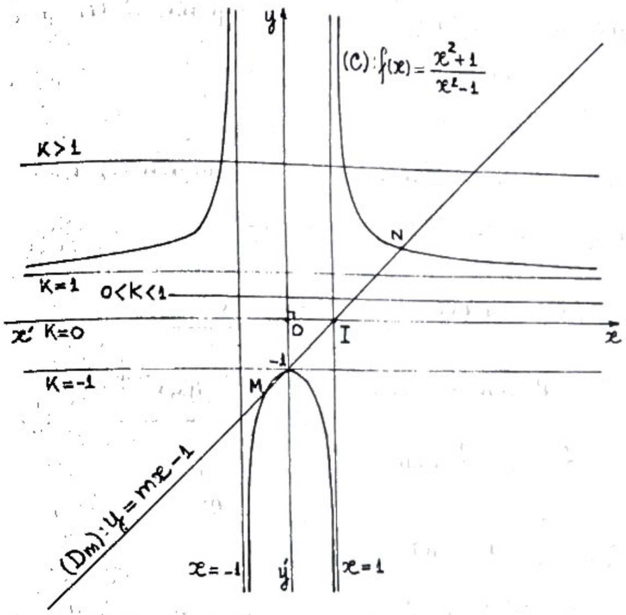
ដូច្នេះខ្សែកោង (C) មិនកាត់ $(x'Ox)$ ទេ

អរដោនេចំនុចប្រសព្វរវាង (C) និង $(y'Oy)$ គឺ $y = f(O) = -1$

ស្រាយអ័ក្សឆ្លុះ

$\forall x \in \mathcal{D}$ យើងបាន $f(-x) = \frac{(-x)^2+1}{(-x)^2-1} = \frac{x^2+1}{x^2-1} = f(x)$ យើងបាន

$f(x)$ ជាអនុគមន៍គូ $\Rightarrow (y'Oy)$ ជាអ័ក្សឆ្លុះរបស់ខ្សែកោង (C) ។



សមីការបន្ទាត់ (D_m) : $m = \frac{y+1}{x-0} \Leftrightarrow y+1 = mx \Leftrightarrow$

(D_m) : $y = mx - 1$

សមីការអាប់ស៊ីសរវាង (C) និង (D_m)

$\frac{x^2+1}{x^2-1} = mx - 1 \Leftrightarrow mx^3 - mx - x^2 + 1 = x^2 + 1 \Leftrightarrow$

$mx^3 - 2x^2 - mx = 0 \Leftrightarrow x(mx^2 - 2x - m) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 0 & \text{អាប់ស៊ីស } A \\ mx^2 - 2x - m = 0 & (1) \end{array}\right.$

ដើម្បីអោយមានចំនុចប្រសព្វពីរទៀត M និង N លុះត្រាតែសមីការ (1) មានឬសពីរ

$$\begin{cases} a = m \neq 0 \\ \Delta' = 1 + m^2 > 0 \end{cases}$$

តែ M និង N ខុសពី A នោះ គឺត្រូវ $x = 0$ មិនមែនជាឬសនៃ (1) គឺ $x = 1$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ (1) : $0 - 0 - m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$

ដូច្នេះ យើងត្រូវយក $\boxed{m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}$

រកកូអរដោនេនៃ I ចំនុចកណ្ដាលនៃ $[MN]$ $\quad I(x, y)$

$x = \frac{x_M + x_N}{2} = -\frac{b}{2a} - \frac{1}{m}$ អថេរ

$$I(x = \frac{1}{m} \ ; \ y = 0)$$

$y = m \cdot \frac{1}{m} - 1 = 1 - 1 = 0$ ថេរ

ដូច្នេះ សំនុំចំនុច I គឺបន្ទាត់សមីការ $y = 0$ (អ័ក្ស $(x'Ox)$)

3/. ដោះស្រាយតាមក្រាភិចអត្ថិភាព និងសញ្ញាឬសសមីការ

$(K - 1)x^2 - K - 1 = 0$ សមីការនេះអាចសរសេរ

$Kx^2 - x^2 - K - 1 = 0 \Leftrightarrow Kx^2 - x^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow$

$K(x^2 - 1) = x^2 + 1 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = K$ ជាសមីការអាប់ស៊ីសរវាង (C)

និងបន្ទាត់ $y = K$ ស្រប $(x'Ox)$ ។ តាមក្រាភិចយើងបាន

K	អត្ថិភាព និងសញ្ញាឬសសមីការ
$-\infty$	
	សមីការ មានឬសពីរ $x_1 < 0 < x_2$
-1	សមីការ មានឬសឌុប $x_1 = x_2 = 0$
	សមីការ គ្មានឬស
1	សមីការ គ្មានឬស
	សមីការ មានឬសពីរ $x_1 < 0 < x_2$
$+\infty$	

លំហាត់

គេមានអនុគមន៍ $y = f(x) = \frac{3x^2 - 18x + 25}{x^2 - 6x + 8}$ មានក្រាបតំនាង (C)

1/. សិក្សាទិសដៅអថេរភាព $f(x)$ ដោយបញ្ជាក់គ្រប់សមីការអាស៊ីមតូតដែលមាន រួចសង់ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍នេះក្នុងតំរុយអរតូនមេ (Oxy) ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា បន្ទាត់ $x = 3$ ជាអ័ក្សឆ្លុះរបស់ខ្សែកោង (C) ។

2/. ប្រើក្រាភិចដោះស្រាយវិសមីការ $f(x) \geqslant 1$

3/. ដោះស្រាយតាមក្រាភិចអត្ថិភាព និង សញ្ញាឬសសមីការ

$$\frac{3x^2 - 18x + 25}{x^2 - 6x + 8} = K$$ ដោយពិភាក្សាទៅតាមតំលៃK

ចំលើយ

1/. ទិសដៅអថេរភាពនៃ $y = f(x) = \dfrac{3x^2-18x+25}{x^2-6x+8}$

x^2-6x+8 មាន $\Delta' = 9-8 = 1$ ដូច្នេះវាមានឫសពីរ

$x_1 = 3-1 = 2$, $x_2 = 3+1 = 4$ ដូច្នេះអនុគមន៍ $f(x)$ មានដែនកំណត់ $\mathcal{D} = \mathbb{R}\setminus\{2,4\}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2}{x^2} = 3$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = \infty$

$f'(x) = \dfrac{u'v-v'u}{v^2}$ $\quad u = 3x^2-18x+25 \Rightarrow u' = 6x-18$

$\quad v = x^2-6x+8 \Rightarrow v' = 2x-6$

$$f'(x) = \frac{6x^3-36x^2+48x-18x^2+108x-144-6x^3+36x^2-50x+18x^2-108x+150}{(x^2-6x+8)^2}$$

$f'(x) = \dfrac{-2x+6}{(x^2-6x+8)^2} = \dfrac{-2(x-3)}{(x^2-6x+8)^2}$ ដោយ $(x^2-6x+8)^2>0$

$\forall x\in\mathcal{D}$ នោះគឺរួមអោយ $f(x)$ យកសញ្ញាតាម $-2x+6$, $\forall x\in\mathcal{D}$

x	$-\infty$		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	+	0	−	‖	−	

x	$-\infty$		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	+	0	−	‖	−	
$f(x)$	3	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3

អនុគមន៍មានតំលៃអតិបរមាស្មើ 2 ចំពោះ $x = 3$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 3$ យើងបានបន្ទាត់ $y = 3$ ជាអាស៊ីមតូតដេក

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = \infty$

នោះយើងបានបន្ទាត់ $x = 2$ និង $x = 4$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

អាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វរវាង (C) និង $(x'Ox)$ ជាឫសនៃសមីការ $\dfrac{3x^2-18x+25}{x^2-6x+8} = 0$

$\Leftrightarrow 3x^2-18x+25 = 0$, $\Delta' = 81-75 = 6$

យើងបានឫស $x_1 = \dfrac{9-\sqrt{6}}{3}$, $x_2 = \dfrac{9+\sqrt{6}}{3}$

អរដោនេចំនុចប្រសព្វរវាង (C) និង $(y'Oy)$ គឺ $y = f(O) = \dfrac{25}{8}$

ស្រាយបញ្ជាក់ថាបន្ទាត់ $x = 3$ ជាអ័ក្សឆ្លុះរបស់ខ្សែកោង (C)

បន្ទាត់ $x = 3$ កាត់ (C) ត្រង់ $y = 2$ ហើយ $S(3;2)$ ជាកំពូលខ្សែកោង (C)

ក្នុងតំរុយ (SXY) យើងបានតាមរូបមន្តនៃការរុញតំរុយ

$x = 3+X$

$y = 2+Y$ នោះអនុគមន៍ទៅជា

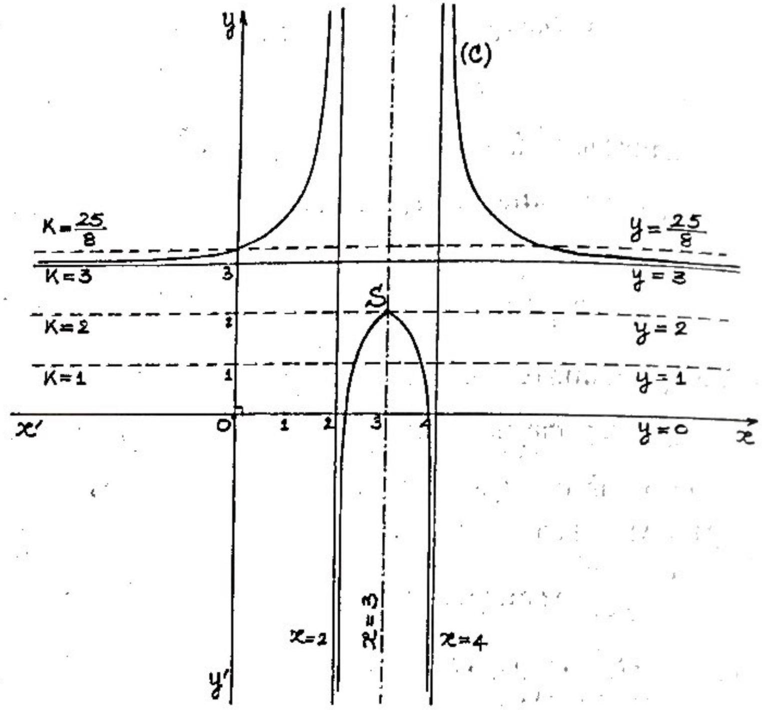
$$2+Y = \frac{3(3+X)^2-18(3+X)+25}{(3+X)^2-6(3+X)+8} = \frac{27+18X+3X^2-54-18X+25}{9+6X+X^2-18-6X+8}$$

$$= \frac{3X^2-2}{X^2-1} \Leftrightarrow Y = \frac{3X^2-2}{X^2-1}-2 = \frac{3X^2-2-2X^2+2}{X^2-1} = \frac{X^2}{X^2-1}$$

យើងបាន $Y = f(X) = \dfrac{X^2}{X^2-1}$

ដោយ $f(-X) = \dfrac{(-X)^2}{(-X)^2-1} = \dfrac{X^2}{X^2-1} = f(X) \Rightarrow f(X)$ ជាអនុគមន៍គូនោះ

បន្ទាត់ (SY) សមីការ $x = 3$ ជាអ័ក្សឆ្លុះរបស់ខ្សែកោង (C) ។



2/. ប្រើក្រាភិចដោះស្រាយវិសមីការ $\frac{3x^2-18x+25}{x^2-6x+8} \geqslant 1$

$y = \frac{3x^2-18x+25}{x^2-6x+8}$ ជាសមីការរបស់ខ្សែកោង (C)

$y = 1$ ជាសមីការបន្ទាត់ស្រប $(x'Ox)$

បន្ទាត់ $y = 1$ កាត់ខ្សែកោង (C) ត្រង់ចំនុចមានអាប់ស៊ីសជាឫសនៃសមីការ

$\frac{3x^2-18x+25}{x^2-6x+8} = 1 \Leftrightarrow 3x^2-18x+25 = x^2-6x+8 \Leftrightarrow$

$2x^2-12x+17 = 0$, $\Delta' = 36-34 = 2$ នោះយើងបានសមីការមានឫសពីរ

$x_1 = \frac{6-\sqrt{2}}{2}$, $x = \frac{6+\sqrt{2}}{2}$

វិសមីការ $f(x) = \frac{3x^2-18x+25}{x^2-6x+8} \geqslant 1$ គឺយើងត្រូវជ្រើសរើសរកតំលៃ x

ដែលខ្សែកោង (C) នៅលើបន្ទាត់ $y = 1$ ដូច្នេះយើងត្រូវយក

$$x \in \left]-\infty ; 2\right[\cup \left[\frac{6-\sqrt{2}}{2} ; \frac{6+\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left]4 ; +\infty\right[$$

3/. ដោះស្រាយតាមក្រាភិច អត្ថិភាព និងសញ្ញាឫស

$\frac{3x^2-18x+25}{x^2-6x+8} = K$ ជាសមីការអាប់ស៊ីសរវាងខ្សែកោង (C)

និងបន្ទាត់ $y = K$ ស្រប $(x'Ox)$ ដោយពិនិត្យតាមក្រាភិច យើងបាន

K	អត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការ
$-\infty$	សមីការ មានឫសពីរ $0 < x_1 < x_2$
2	សមីការ មានឫសឌុប $x_1 = x_2 = 3 > 0$
	សមីការ គ្មានឫស
3	សមីការ គ្មានឫស
	សមីការ មានឫសពីរ $x_1 < 0 < x_2$
$\frac{25}{8}$	សមីការ មានឫសពីរ $x_1 = 0 < x_2$
$+\infty$	សមីការ មានឫសពីរ $0 < x_1 < x_2$

លំហាត់

គេមានអនុគមន៍ $y = f(x) = \dfrac{7x^2+20x}{x^2+2x-3}$ ដែលមានក្រាបតំណាង (C)

1/. សិក្សាទិសដៅអថេរភាព និងសង់ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍នេះក្នុងតំរុយអរតូនរមេ (Oxy) ។

2/. ដោះស្រាយតាមក្រាភិចអត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការទៅតាមតំលៃនៃ m

$(m-7)x^2+2(m-10)x-3m = 0$

ចំលើយ

1/. សិក្សាទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $y = f(x) = \dfrac{7x^2+20x}{x^2+2x-3}$

អនុគមន៍នេះ ជាអនុគមន៍ប្រភាគសនិទានមានភាគបែង x^2+2x-3

$x^2+2x-3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3 \end{array}\right.$ ដូច្នេះ $\mathcal{D} = \mathbb{R}\setminus\{-3;1\}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{7x^2}{x^2} = 7$; $\lim\limits_{x\to-3} f(x) = \infty$; $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \infty$

$f'(x) = \dfrac{u'v-v'u}{v^2}$ $\quad u = 7x^2+20x \Rightarrow u' = 14x+20$

$\quad v = x^2+2x-3 \Rightarrow v' = 2x+2$

$$f'(x) = \frac{(14x+20)(x^2+2x-3)-(2x+2)(7x^2+20x)}{(x^2+2x-3)^2} = \frac{-6(x+5)(x+2)}{(x^2+2x-3)^2}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -5 \quad \Rightarrow y = f(-5) = \dfrac{25}{4} \\ x = -2 \quad \Rightarrow y = f(-2) = 4 \end{array}\right.$

x	$-\infty$		-5		-3		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	||	$-$	
$f(x)$	7	↘	$\frac{25}{4}$	↗ $+\infty$	||	$-\infty$ ↗	4	↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘	7

អនុគមន៍មានតំលៃអប្បបរមាស្មើ $\dfrac{25}{4}$ ត្រង់ $x = -5$ ហើយមានតំលៃអតិបរមាស្មើ 4 ចំពោះ $x = -2$

ដោយ $\lim\limits_{x\to-3} f(x) = \infty$; $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \infty$ នោះយើងបានបន្ទាត់ $x = -3$ និង $x = 1$ ជាអាស៊ីមតូតឈររបស់អនុគមន៍

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 7$ នោះយើងបានបន្ទាត់ $y = 7$ ជាអាស៊ីមតូតដេករបស់អនុគមន៍ខ្សែកោង (C)

កាត់ $(x'Ox)$ ត្រង់ចំនុចមានអាប់ស៊ីសជាឫសនៃសមីការ

$\dfrac{7x^2+20x}{x^2+2x-3} = 0 \Leftrightarrow 7x^2+20x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\dfrac{20}{7} \end{array}\right.$

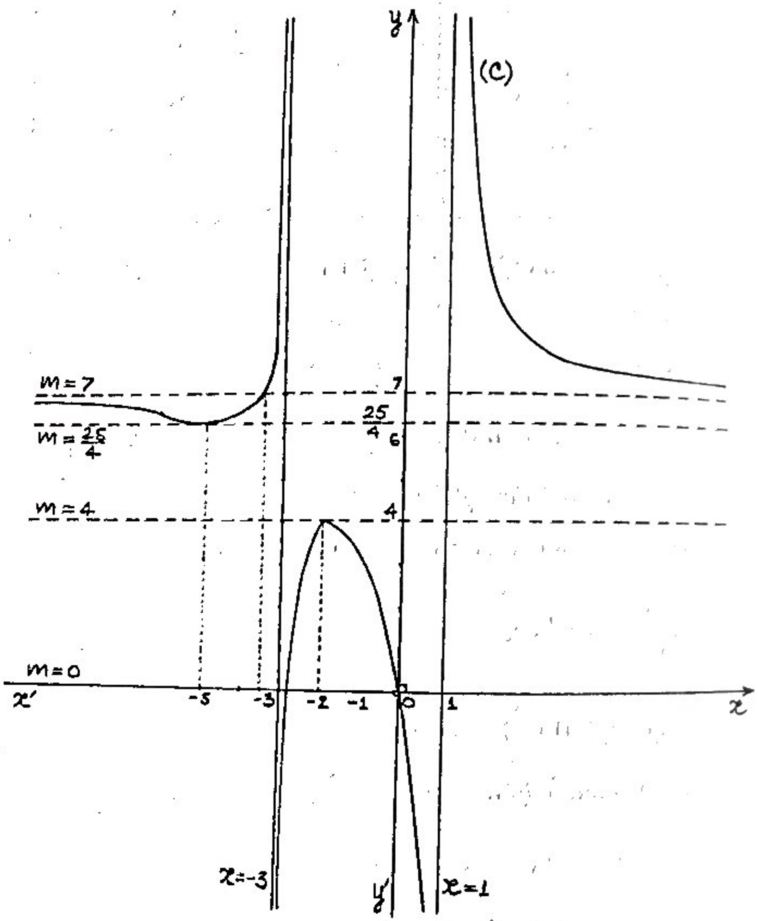
អរដោនេចំនុចប្រសព្វរវាង (C) និង $(y'Oy)$ គឺ $y = f(0) = 0$

ខ្សែកោង (C) កាត់អាស៊ីមតូតដេក $y = 7$ ត្រង់ចំនុចដែលមានអាប់ស៊ីសជាឫសនៃសមីការ

$\dfrac{7x^2+20x}{x^2+2x-3} = 7 \Leftrightarrow = 7x^2+14x-21 = 7x^2+20x$

$\Leftrightarrow 6x = -21 \Leftrightarrow x = -\dfrac{21}{6} = -\dfrac{7}{2}$

ខ្សែកោង (C) កាត់អាស៊ីមតូតដេក $y = 1$ ត្រង់ $x = -\dfrac{7}{2}$



2/. ដោះស្រាយតាមក្រាភិចអត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការ :

$$(m-7)x^2 + 2(m-10)x - 3m = 0$$

អាចសរសេរ $\frac{7x^2+20x}{x^2+2x-3} = m$ ជាសមីការអាប់ស៊ីសរវាង (C) និងបន្ទាត់ $y = m$

m	អត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការ	
$-\infty$	សមីការ មានឫសពីរ	$x_1 < 0 < x_2$
0	សមីការ មានឫសពីរ	$x_1 = -\frac{20}{7} < x_2 = 0$
	សមីការ មានឫសពីរ	$x_1 < x_2 < 0$
4	សមីការ មានឫសឌុប	$x_1 = x_2 = -2 < 0$
	សមីការ គ្មានឫស	
$\frac{25}{4}$	សមីការ មានឫសឌុប	$x_1 = x_2 = -5 < 0$
	សមីការ មានឫសឌុប	$x_1 < x_2 < 0$
7	សមីការ មានឫសមួយ	$x_1 = -\frac{7}{2} < 0$
$+\infty$	សមីការ មានឫសពីរ	$x_1 < 0 < x_2$

លំហាត់

អនុគមន៍រាង $y = f(x) = \frac{(ax^2+bx+c)'}{ax^2+bx+c} = \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}$

1/. សិក្សាទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $y = f(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x-3}$

- ស្រាយថាខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍នេះ មានចំនុច I ជាប្រសព្វរវាង (C) និង $(x'Ox)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះ ។
- ដោះស្រាយអត្ថិភាពសញ្ញាឫសសមីការ $\frac{2x-2}{x^2-2x-3} = m$ ដោយពិភាក្សាទៅតាមតំលៃនៃ m ។

ចំលើយ

អនុគមន៍ $y = f(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x-3}$ ជាអនុគមន៍ប្រភាគសនិទានដែលមាន

$N = 2x-2$ និង $\mathcal{D} = x^2-2x-3$ រកឫសរបស់ $\mathcal{D}$

$\mathcal{D} = x^2-2x-3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -1 \\ x_2 = 3 \end{array}\right.$ ដូច្នេះ អនុគមន៍នេះមានដែនកំនត់

តាងដោយ $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1;3\}$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \infty \quad ; \quad \lim_{x \to 3} f(x) = \infty$$

$$f'(x) = \frac{N'D - D'N}{D^2} \quad ; \quad N = 2x-2 \Rightarrow N' = 2$$

$$D = x^2-2x-3 \Rightarrow D' = 2x-2$$

ដូច្នេះ $f'(x) = \frac{2(x^2-2x-3)-(2x-x)(2x-2)}{(x^2-2x-3)^2} = \frac{2x^2-4x-6-4x^2+4x+4x-4}{(x^2-2x-3)^2}$

$$= \frac{-2x^2+4x-10}{(x^2-2x-3)^2}$$

ដោយ $\forall x \in \mathcal{D}$; $x^2-2x-3 \neq 0 \Rightarrow (x^2-2x-3)^2 > 0$ នោះត្រូវអោយ $f'(x)$

យកសញ្ញាតាម $-2x^2+4x-10$ ជាត្រីធាដឺក្រេទី 2នៃ x

មាន $\left.\begin{array}{l} a = -2 < 0 \\ \Delta' = 4-20 = -16 < 0 \end{array}\right| \Rightarrow -2x^2+4x-10 < 0 \Rightarrow$

$$f'(x) = \frac{-2x^2+4x-10}{(x^2-2x-3)^2} < 0 \quad , \quad \forall x \in \mathcal{D} \text{ មានន័យថា}$$

អនុគមន៍ $f(x)$ ចុះក្នុងដែនកំនត់ $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1;3\}$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	‖	$-$	
y	0	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0

ខ្សែកោង (C) មានបន្ទាត់ $y = 0$ ជាអាប់ស៊ីសត្លូតដេក ព្រោះ $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

មានបន្ទាត់ $x = -1$ និង $x = 3$ ជាអាស៊ីមត្លូតឈរ ព្រោះ $\lim_{x \to -1} f(x) = \infty$

និង $\lim_{x \to 3} f(x) = \infty$

ខ្សែកោង (C) កាត់ $(x'Ox)$ ត្រង់ចំនុច I មានអាប់ស៊ីសជាឫសនៃសមីការ

$$\frac{2x-2}{x^2-2x-3} = 0 \Leftrightarrow 2x-2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad , \quad y = 0 \quad , \quad I(1;0)$$

ខ្សែកោង (C) កាត់ $(y'Oy)$ ត្រង់ចំនុចអរដោយ $y = f(O) = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$

ស្រាយថា $I(1;0)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះរបស់ខ្សែកោង (C)

យកចំនុច I ជាគល់តំរុយថ្មី (IXY) តាមរូបមន្តតំរុយ

$x = 1 + X$, $y = 0 + Y = Y$ នោះយើងបានសមីការខ្សែកោង (C)

ធៀបតំរុយថ្មី វិសមីការបង្រួមគឺ :

$$Y \quad \frac{2(1+X)+20}{(1+X)^2-2(1+X)-3} = \frac{2 \quad +2X-2}{1+2X+X^2-2-2X-3} = \frac{2X}{X^2-4}$$

$$Y = f(X) = \frac{2X}{X^2-4}$$

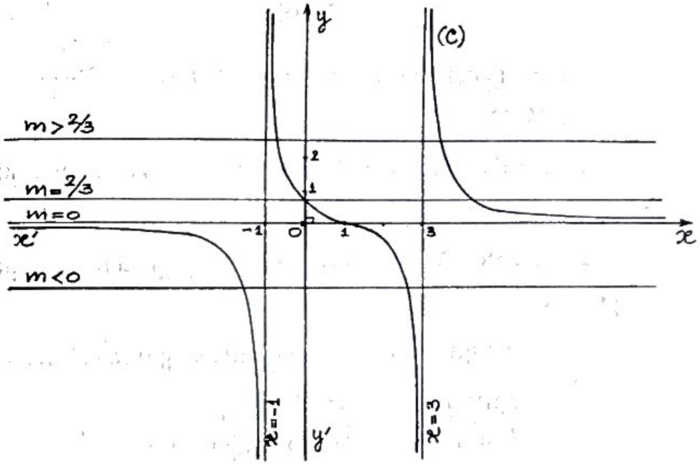
$$f(-X) = \frac{2(-X)}{(-X)^2-4} = \frac{-2X}{X^2-4} = -\frac{2X}{X^2-4} = -f(X)$$

$\Rightarrow f(X)$ ជាអនុគមន៍សេស $\Rightarrow$ គល់ $I(1;0)$ នៃតំរុយ (IXY) ជាផ្ចិតឆ្លុះរបស់ខ្សែកោង (C)

ដូច្នេះខ្សែកោង (C) មានចំនុច $I(1;0)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះ

សមីការ $\frac{2x-2}{x^2-2x \quad 3} = m$ ជាសមីការអាប់ស៊ីសរវាងខ្សែកោង (C) និងបន្ទាត់អថេរ

$y \quad m$ ប្រែប្រួលស្រប $(x'Ox)$ ។



m	អត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការ $\frac{2x-2}{x^2-2x-3} \quad m$	
$-\infty$	សមីការ មានឫសពីរ	$x_1 < 0 < x_2$
0	សមីការ មានឫសមួយ	$x = 1$
	សមីការ មានឫសពីរ	$0 < x_1 < x_2$
$\frac{2}{3}$	សមីការ មានឫសពីរ	$x_1 = 0 < x_2$
$+\infty$	សមីការ មានឫសពីរ	$x_1 < 0 < x_2$

លំហាត់

គេអោយអនុគមន៍នៃចំនួនពិត កំណត់ដោយ $y = f(x) = \dfrac{-4x+8}{x^2-4x+5}$ ដែលមានខ្សែកោងតំណាង (C) ។

1/. សិក្សាទិសដៅអថេរភាព និងសង់ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍នេះក្នុងតំរុយអរតូនរមេ (Oxy) ដោយយក 1 ឯកតាប្រវែង 2cm ។

2/. ខ្សែកោង (C) កាត់ $(x'Ox)$ ត្រង់ A ស្រាយថា A ជាផ្ចិតឆ្លុះរបស់ខ្សែកោង (C)

3/. សិក្សាសញ្ញានៃ $f(x)-(-4x+8)$ ដោយពិភាក្សាទៅតាមតំលៃនៃ x ។

4/. ពិភាក្សាតាមក្រាភិចទីតាំងឫសសមីការ

$mx^2-4(m-1)x+5m-8=0$ ធៀប 1, 2, 3

ចំលើយ

1/. + រកដែនកំណត់ អនុគមន៍ $y = f(x) = \dfrac{-4x+8}{x^2-4x+5}$ ជាអនុគមន៍ប្រភាគសនិទាន

$D = x^2-4x+5$ ជាត្រីធាដឺក្រេទី 2នៃ x

$$\begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta' = (4-5) = -1 < 0 \end{cases} \Rightarrow D > 0, \forall x \in IR$$

ដូច្នេះយើងបាន $\mathcal{D} = IR$

+ លីមីត

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-4x}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-4}{x} = 0$$

+ ដេរីវេ

$$f'(x) = \frac{u'v-v'u}{v^2} \qquad u = -4x+8 \Rightarrow u' = -4 \qquad v = x^2-4x+5 \Rightarrow v' = 2x-4$$

$$f'(x) = \frac{-4x^2+16x-20-(2x-4)(-4x+8)}{(x^2-4x+5)^2}$$

$$= \frac{-4x^2+16x-20+8x^2-16x-16x+32}{(x^2-4x+5)^2}$$

$$= \frac{4x^2-16x+12}{(x^2-4x+5)^2} = \frac{4(x^2-4x+3)}{(x^2-4x+5)^2}$$

$f'(x)$ យកសញ្ញាតាម x^2-4x+3 ជាត្រីធាដឺក្រេទី 2នៃ x

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \quad , \quad y_1 = 2 \\ x_2 = 3 \quad , \quad y_2 = -2 \end{cases}$$

តារាងទិសដៅអថេរភាព

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	0	↗	2	↘	−2	↗	0

2/. អាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វរវាង (C) និង $(x'Ox)$ សមីការ $y = 0$ ជាអាស៊ីមតូតដេក គឺជាឫសនៃ $f(x) = \frac{-4x+8}{x^2-4x+5} = 0 \Leftrightarrow -4x+8 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

ដូច្នេះ : $A(2;0)$

អរដោនេចំនុចប្រសព្វរវាង (C) និង $(y'Oy)$ គឺ $y = f(0) = \frac{8}{5}$

ស្រាយថា $A(2;0)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះរបស់ខ្សែកោង (C)

យក $A(2;0)$ ជាគល់នៃតំរុយថ្មី (AXY) នោះយើងបានតាមរូបមន្តនៃការដូរតំរុយ $x = 2+X$

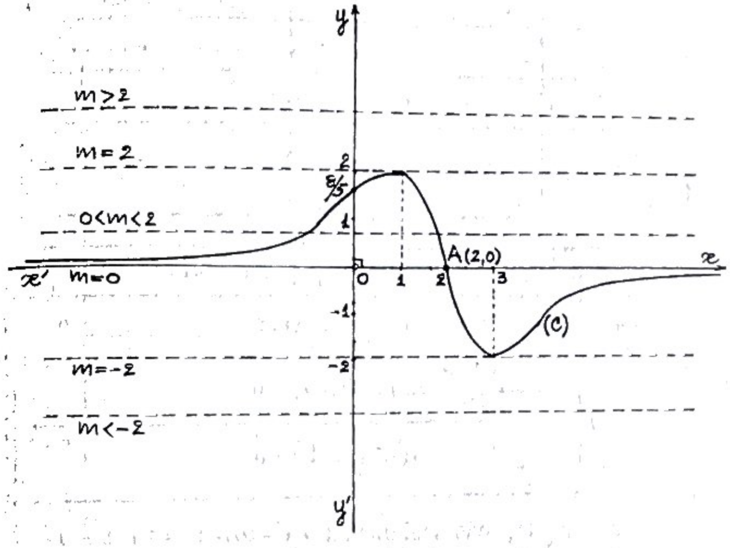
$y = 0+Y = Y$ សមីការរបស់ខ្សែកោង (C) ធៀបទៅនឹងតំរុយថ្មី រឺសមីការបង្រួមរបស់ (C) គឺ $Y = \frac{-4(2+X)+8}{(2+X)^2-4(2+X)+5} =$

$$\frac{-8-4x+8}{4+4X+X^2-8-4X+5} = \frac{-4x}{X^2+1} = f(X)$$

$$f(-X) = \frac{-4(-X)}{(-X^2)+1} = \frac{4X}{X^2+1} = -\frac{-4X}{X^2+1} = -f(X)$$

$f(X)$ ជាអនុគមន៍សេស ដូច្នេះគល់ $A(2;0)$ នៃតំរុយ (AXY) ជាផ្ចិតឆ្លុះរបស់ខ្សែកោង (C)

ខ្សែកោង (C) មានចំនុច $A(2;0)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះ



3/. សិក្សាសញ្ញា $f(x)-(-4x+8)$ ដោយពិភាក្សាទៅតាមតំលៃនៃ x

$$f(x)-(-4x+8) = \frac{-4x+8}{x^2-4x+5}-(-4x+8) =$$

$$-(4x+8)\left[\frac{1}{x^2-4x+5}-1\right] = (-4x+8)\left(\frac{1-x^2+4x-5}{x^2-4x+5}\right)$$

$$= \frac{(-4x+8)(x^2+4x-4)}{x^2-4x+5} = \frac{(4x-8)(x^2-4x+4)}{x^2-4x+5} = \frac{N}{D}$$

ដោយ $D = x^2-4x+5>0,\ \forall x\in \mathbb{R}$ $\Rightarrow f(x)-(-4x+8)$ យកសញ្ញាតាមភាគយក

$$(4x-8)(x^2-4x+4) = (4x-8)(x-2)^2$$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$4x-8$		$-$	0	$+$	
$(x-2)^2$		$+$	0	$+$	
$(4x-8)(x-2)^2$		$-$	0	$+$	

x	សញ្ញា $f(x)-(-4x+8)$
$-\infty$	$f(x)-(-4x+8)<0$
2	$f(x)-(-4x+8)=0$
$+\infty$	$f(x)-(-4x+8)>0$

4/. ពិភាក្សាតាមក្រាភិចទីតាំងរឺសសមីការ $mx^2-4(m-1)x+5m-8=0$

រ ធៀបចំនួន 1, 2, 3

សមីការនេះ អាចសរសេរ $mx^2-4(m-1)x+5m-8=0 \Leftrightarrow$

$$mx^2-4mx+5m=-4x+8$$

$$m(x^2-4x+5)=-4x+8 \Leftrightarrow \frac{-4x+8}{x^2-4x+5}=m$$ ជាសមីការ

អាប់ស៊ីសរវាងខ្សែកោង (C) និងបន្ទាត់ $y=m$ ស្រប $(x'Ox)$

គូសបន្ទាត់ $x=1$, $x=2$ និង $x=3$ ដែលកាត់ខ្សែកោង (C)

ត្រង់ $y=2$, $y=0$ និង $y=3$ រួចគូសបន្ទាត់ $y=m=2$

$y=m=0$

$y=m=3$

យើងពិនិត្យអត្ថិភាពទីតាំងរឺសសមីការលើក្រាភិច

m	ទីតាំងរឺសសមីការធៀបចំនួន 1, 2, 3	
$-\infty$	សមីការ គ្មានឫសពីរ	
-2	សមីការ មានឫសឌុប	$x_1=x_2=1<2<3$
	សមីការ មានឫសពីរ	$1<2<x_1<3<x_2$
0	សមីការ មានឫសមួយ	$1<x=2<3$
	សមីការ មានឫសពីរ	$x_1<1<x_2<2<3$
2	សមីការ មានឫសឌុប	$1<2<x_1=x_2=3$
$+\infty$	សមីការ មានគ្មានឫស	

លំហាត់

គេមានអនុគមន៍ $y=f(x)=\frac{ax+b}{x^2-2x-3}$ ដែលមានខ្សែកោងតំនាង (C) ។

1/. ក. គណនាតំលៃលេខរបស់ a និង b ដោយដឹងថា ខ្សែកោង(C) កាត់តាម $(0,-2)$ និង $(1,0)$ ។

ខ. ចំពោះតំលៃលេខនៃ a និង b ដែលរកឃើញ ចូរសិក្សាទិសដៅអថេរនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ដោយបញ្ជាក់សមីការអាស៊ីមតូត ។

គ. គណនាកូអរដោនេ I ចំនុចប្រសព្វរវាង (C) និង $(x'Ox)$ រួចបង្ហាញថា I ជាផ្ចិតឆ្លុះខ្សែកោង (C) ។ ធ្វើសំនង់ខ្សែកោង (C) ក្នុងតំរុយអរតូនរមេ (Oxy) ។

2/. ដោះស្រាយដោយប្រើក្រាភិច អត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការតាមតំលៃនៃ m

$$mx^2 - 2(m-3)x - 3(m+2) = 0$$

3/. ពីខ្សែកោង (C) ទាញសំនង់ខ្សែកោង (C') $y = |f(x)|$

ចំលើយ

1/.ក. គណនាតំលៃលេខរបស់ a និង b

បើខ្សែកោង (C) កាត់តាម $(0;-2)$ នោះយើងបាន : $f(O) = -2 \Leftrightarrow \frac{b}{-3} = -2$

$$\Leftrightarrow b = 6$$

បើខ្សែកោង (C) កាត់តាម $(1;0)$ នោះយើងបាន : $f(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{a+b}{1-2-3} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{a+6}{-4} = 0 \Leftrightarrow a = -6$ ដូច្នេះ $\boxed{a = -6 \quad , \quad b = 6}$

២/. យើងបានអនុគមន៍ទៅជា $y = f(x) = \frac{-6x+6}{x^2-2x-3}$

- សិក្សាទិសដៅអថេរភាព

$x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -1 \\ x_2 = 3 \end{array}\right.$ ដូច្នេះ អនុគមន៍ប្រភាគសនិទាន

នេះមានដែនកំនត់ $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1;3\}$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-6x}{x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-6}{x} = 0$$

$\lim_{x \to -1} f(x) = \infty \quad , \quad \lim_{x \to 3} f(x) = \infty$

$f'(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ $\quad u = -6x + 6 \Rightarrow u' = -6$

$\quad v = x^2 - 2x - 3 \Rightarrow v' = 2x - 2$

$$f'(x) = \frac{-6x^2 + 12x + 18 - (2x-2)(-6x+6)}{(x^2-2x-3)^2}$$

$$= \frac{-6x^2 + 12x + 18 + 12x^2 - 12x - 12x + 12}{(x^2-2x-3)^2}$$

$$= \frac{6x^2 - 12x + 30}{(x^2-2x-3)^2} = \frac{6(x^2-2x+5)}{(x^2-2x-3)^2}$$

$x^2 - 2x - 3 \neq 0 \ ,\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow (x^2-2x-3)^2 > 0 \ , \forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow$

$f'(x)$ យកសញ្ញាតាម $6(x^2 - 2x + 5)$, $\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow$

$x^2 - 2x + 5$ ជាត្រីធាដឺក្រេទី 2នៃ x មាន $\left[\begin{array}{l} a = 1 \\ \Delta' = 1 - 5 = -4 < 0 \end{array}\right. \Rightarrow$

$x^2 - 2x + 5 > 0$, $\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow 6(x^2 - 2x + 5) > 0$, $\forall x \in \mathcal{D}$

$\Rightarrow f'(x) > 0$, $\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow f(x)$ កើនក្នុង $\mathcal{D}$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	+	‖	+	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0

បញ្ជាក់សមីការនៃអាស៊ីមតូត

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$ បន្ទាត់ $y = 0$ គឺអ័ក្ស $(x'Ox)$ ជាអាស៊ីមតូតដេក

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \infty$ $\Rightarrow$ បន្ទាត់ $x = -1$ គឺអ័ក្ស $x = 3$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

គ. គណនាកូអរដោនេ I ចំនុចប្រសព្វរវាង (C) និង $(x'Ox)$

ដោយ I ជាចំនុចប្រសព្វរវាង (C) និង $(x'Ox)$ នោះអរដោនេនៃ I គឺ $y = 0$

ហើយអាប់ស៊ីសជាឫសនៃ $f(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-6x+6}{x^2-2x-3} = 0 \Leftrightarrow -6x+6 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ យើងបាន $I(1;0)$

បង្ហាញថា I ជាផ្ចិតឆ្លុះរបស់ខ្សែកោង (C)

យើងត្រូវប្រើវិធីដូរតំរុយ ដោយយក I ជាគល់នៃតំរុយថ្មី (IXY)

តាមរូបមន្តនៃការដូរតំរុយ $x = 1 + X$

$y = 0 + Y = Y$ នោះយើងបានអនុគមន៍ទៅជា

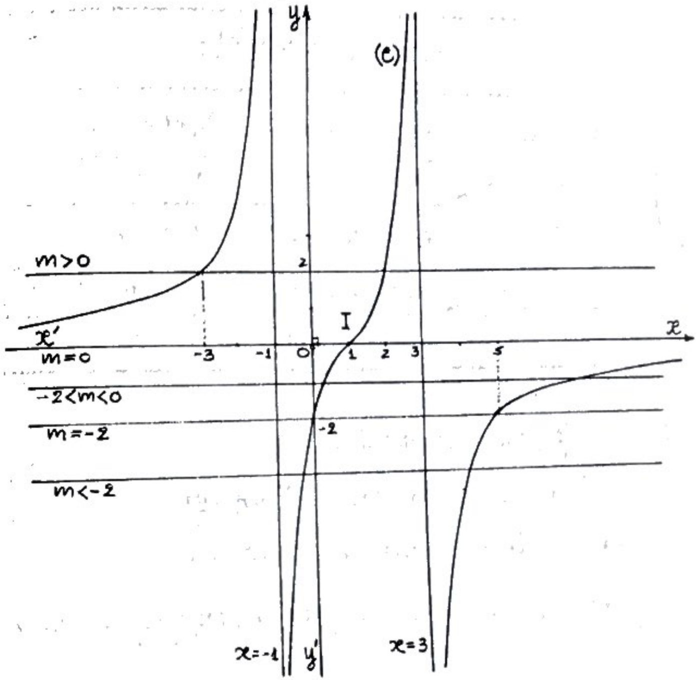
$$Y = \frac{-6(1+X)+6}{(1+X)^2-2(1+X)-3} = \frac{-6+6X+6}{1+2X+X^2-2-2X-3} = \frac{6X}{X^2-4}$$

$Y = f(X) = \dfrac{6X}{X^2-4}$ ជាសមីការបង្រួមរបស់ (C)

$$f(-X) = \frac{6(-X)}{(-X)^2-4} = -\frac{6X}{X^2-4} = -f(X)$$

$\Rightarrow f(X)$ ជាអនុគមន៍សេស នោះយើងបាន $I(1;0)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃ (C)

សង់ខ្សែកោង (C) (C) កាត់ $(y'Oy)$ ត្រង់ $y = f(0) = \dfrac{6}{-3} = -2$



2/. ដោះស្រាយតាមក្រាភិចអត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការ :

$mx^2 - 2(m-3)x - 3(m+2) = 0$

សមីការនេះអាចសរសេរ : $mx^2 - 2mx + 6x - 3m - 6 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-6x+6}{x^2-2x-3} = m$

ជាសមីការអាប់ស៊ីសរវាងខ្សែកោង (C) និងបន្ទាត់ $y = m$ ស្រប $(x'Ox)$

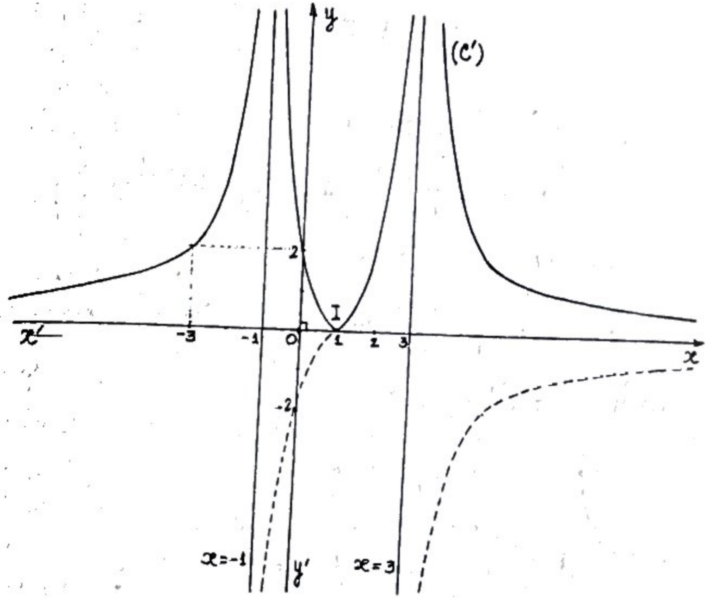
m	អត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការ
$-\infty$	
	សមីការ មានឫសពីរ $x_1 < 0 < x_2$
-2	សមីការ មានឫសពីរ $x_1 = 0 < x_2$
	សមីការ មានមានពីរ $0 < x_1 < x_2$
0	សមីការ មានឫសមួយ $x = 2 > 0$
$+\infty$	សមីការ មានឫសពីរ $x_1 < 0 < x_2$

3/. ខ្សែកោង (C) ទាញសំណង់ខ្សែកោង (C')

អនុគមន៍ $y = |f(x)|$ មានដែនកំណត់ $\mathcal{D}' = \mathcal{D}$

$\forall x \in \mathcal{D}$ បើ $f(x) \geq 0 \Rightarrow |f(x)| = f(x)$ នោះ $(C') = (C)$

$\forall x \in \mathcal{D}$ បើ $f(x) < 0 \Rightarrow |f(x)| = -f(x)$ នោះ (C') ជារូបឆ្លុះនៃ (C) ធៀប $(x'Ox)$



លំហាត់

មានអនុគមន៍ $y = f(x) = \dfrac{2x+2}{x^2+2x-3}$ ដែលខ្សែកោងតាងវាដោយ (C)

1/. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ដោយបញ្ជាក់សមីការនៃអាស៊ីមតូត ។

2/. គណនាកូអរដោនេ I ដែលជាចំនុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោង (C) និងអ័ក្ស $(x'Ox)$ ។

បង្ហាញថា I ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃខ្សែកោង (C) រួចសង់ខ្សែកោង (C) នេះ ។

3/. ដោយប្រើក្រាភិចសិក្សាអត្ថិភាព និងសញ្ញានៃឫសសមីការទៅតាមតំលៃនៃ m

ចំលើយ

1/ ក. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $f(x)$:

អនុគមន៍ $y = f(x) = \dfrac{2x+2}{x^2+2x-3}$ ជាអនុគមន៍ប្រភាគសនិទានរាង $\dfrac{U}{V}$

$U = 2x+2$ និង $V = x^2+2x-3$

$V = x^2+2x-3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -3 \\ x_2 = 1 \end{array}\right.$ ដូច្នេះ យើងបានដែនកំនត់ $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3;1\}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x}{x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to -3} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \infty$

$f'(x) = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ $\quad u = 2x+2 \Rightarrow u' = 2$ $\quad v = x^2+2x-3 \Rightarrow v' = 2x+2$

$f'(x) = \dfrac{2x^2+4x-6-(2x+2)^2}{(x^2+2x-3)^2} = \dfrac{2x^2+4x-6-4x^2-8x-4}{(x^2+2x-3)^2} = \dfrac{-2x^2-4x-10}{(x^2+2x-3)^2}$

$= \dfrac{-2(x^2+2x+5)}{(x^2+2x-3)^2}$ នោះយើងមាន $\forall x \in \mathcal{D}$, $x^2+2x-3 \neq 0$

$\Rightarrow (x^2+2x-3)^2 > 0$, $\forall x \in \mathcal{D}$ ដែលតំរូវអោយ $f'(x)$ យកសញ្ញាតាមភាគយក $-2(x^2+2x+5)$ តែ (x^2+2x+5) ជាត្រីធាដឺក្រេទី 2 នៃ x ដែលមាន

$\left[\begin{array}{l} a = 1 > 0 \\ \Delta' = 1-5 = -4 < 0 \end{array}\right. \Rightarrow x^2+2x+5 > 0$, $\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow$

$-2(x^2+2x+5) < 0$, $\forall x \in \mathcal{D}$ ដូច្នេះ $f'(x) < 0$, $\forall x \in \mathcal{D}$

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	$0 \searrow$		$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0

$f(x)$ ជាអនុគមន៍ចុះក្នុង $\mathcal{D}$

ខ. បញ្ជាក់សមីការអាស៊ីមតូតនៃអនុគមន៍ $f(x)$:

យើងមាន $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$ បន្ទាត់ $y = 0$ គឺបន្ទាត់ $(x'Ox)$ ជាអាស៊ីមតូតដេក

$\lim\limits_{x\to -3} f(x) = 0$ និង $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \infty \Rightarrow$ បន្ទាត់ $x = -3$ និង $x =$ ជាអាស៊ីតូតឈរ

2/ក. គណនាកូអរដោនេ I ដែលជាចំនុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោង (C) និង អ័ក្ស $(x'Ox)$

បើ I ជាចំនុចប្រសព្វរវាង (C) និង $(x'Ox)$ នោះ I មានអរដោនេ $y = 0$ និងមានអាប់ស៊ីសជាឫសនៃសមីការ $\dfrac{2x+2}{x^2+2x-3} = 0 \Leftrightarrow 2x+2 = 0 \Leftrightarrow$ $x = -1$ ដូច្នេះ កូអរដោនេនៃ $I(-1;0)$

ខ. បង្ហាញថា I ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃខ្សែកោង (C)

យើងត្រូវប្រើវិធីដូរតំរុយ ដោយយក $I(-1;0)$ ជាគល់តំរុយថ្មី (IXY) នោះយើងបានតាមរូបមន្តនៃការដូរតំរុយ $\begin{array}{l} x = -1+X \\ y = 0+Y = Y \end{array}$ សមីការថ្មី ហៅថាសមីការ

បង្រួមទៅជា $Y = \frac{2(-1+X)+2}{(-1+X)^2+2(-1+X)-3} = \frac{-2+2X+2}{1-2X+X^2-2+2-3} = \frac{2X}{X^2-4}$

ដូច្នេះ $f(X) = \frac{2X}{X^2-4}$ ដោយ $f(-X) = \frac{2(-X)}{(-X)^2-4} = -\frac{2X}{X^2-4} = -f(X)$

យើងបាន $f(X) = \frac{2X}{X^2-4}$ ជាអនុគមន៍សេស ដូច្នេះ $I(-1;0)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃខ្សែកោង (C) ។

គ/. សង់ខ្សែកោង (C)

ខ្សែកោង (C) កាត់ $(y'Oy)$ ត្រង់ចំនុច $y = f(0) = -\frac{2}{3}$

ខ្សែកោង (C) មានអាស៊ីសតូតឈរពីរ $x = -3$ និង $x = 1$

មានអាស៊ីមតូតដេកមួយគឺ $(x'Ox)$ សមីការ $y = 0$ កាត់ $(x'Ox)$ ត្រង់ I

ហើយ I ក៏ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃ(C) កាត់ $(y'Oy)$ ត្រង់ចំនុចអរដោនេ $y_1 = -\frac{2}{3}$

3/. ដោយក្រាភិច សិក្សាអត្ថិភាព និងសញ្ញានៃឫសនៃសមីការតាមតំលៃនៃ m

$mx^2+2(m-1)x-(3m+2) = 0$

- យើងត្រូវពន្លាតសមីការ : $mx^2+2mx-2x-3m-2 = 0$

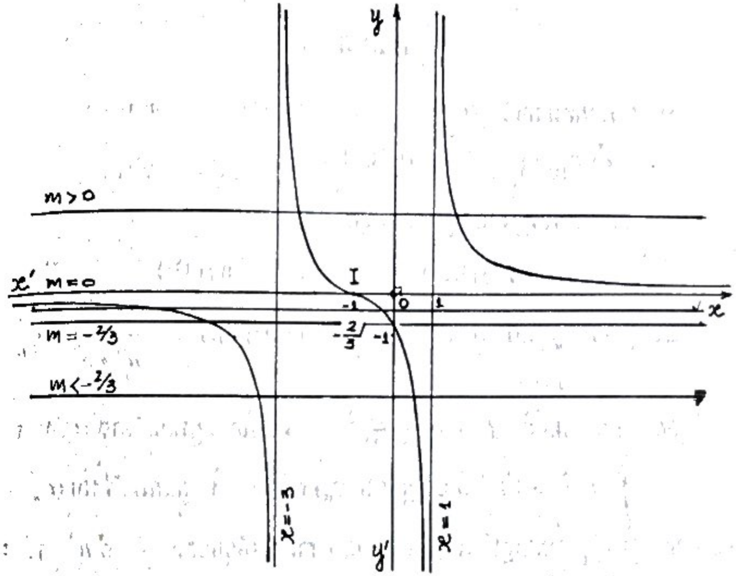
- រក្សាទុកតួដែលមាន m នៅអង្គទី 1 តួដែលគ្មាន m ត្រូវរុញទៅអង្គទី 2

$mx^2+2mx-3 = 2x+2$

- ដាក់ m ជាកត្តា $m(x^2+2x-3) = 2x+2$

- ចែកអង្គទាំងពីរនឹងមេគុណរបស់ m

$m = \frac{2x+2}{x^2+2x-3}$ យើងអាចថាជាសមីការអាប់ស៊ីសរវាងខ្សែកោង (C) និងបន្ទាត់អថេរ $y = m$ ប្រែប្រួលស្រប $(x'Ox)$ ដោយពិនិត្យតាមក្រាភិច យើងបានតារាងចំលើយខាងក្រោម



m	អត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការ
$-\infty$	សមីការ មានឫសពីរ $x_1<0<x_2$
$-\frac{2}{3}$	សមីការ មានឫសពីរ $x_1<x_2=0$
	សមីការ មានឫសពីរ $x_1<x_2<0$
0	សមីការ មានឫសតែមួយគត់ $x=-1$
$+\infty$	សមីការ មានឫសពីរ $x_1<0<x_2$

លំហាត់

1/. គេអោយអនុគមន៍ $f(x) = \sin 2x\cos 8x + \sin 4x\cos 2x - \sin x\cos x$

ក/. គណនា : $f'(x)$ និង $\int f(x)dx$

ខ/. ហាមប្រើតារាងត្រីកោណមាត្រ គណនា :

$f(1,5°)$, $f(7,5°)$, $f(12°)$, $f(2°)$ និង $f(33°)$

2/. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើ $a > 1$ និង $\frac{a^m}{a^n} < \sqrt{a}$ នោះគេបាន : $\frac{a^{m-1} + a^n}{a^m + a^n} > \frac{\sqrt{a}}{a}$

3/. អោយអនុគមន៍ $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x + m}$ ដែលមានខ្សែកោងតំនាង (C_m) ។

ក. កំនត់ m ដើម្បីអោយខ្សែកោង (C_m) ជាបន្ទាត់ ។ ក្នុងករណីដែល (C_m) មិនមែនជាបន្ទាត់ ស្រាយបញ្ជាក់ថាខ្សែកោង (C_m) កាត់តាមចំនុចនឹងពីរ A និង B ដែលត្រូវរក ។

គេសន្មតយក A ជាចំនុចដែលមានអាប់ស៊ីសតូច ។

ខ/ តើមានតំលៃ m ដែររឺទេ ដែលបន្ទាត់ប៉ះ (C_m) ត្រង់ A និង B ស្របគ្នា ។

គ/ គូសខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍នេះចំពោះ $m = 2$ ។ រួចគណនារង្វាស់ផ្ទៃផ្នែកប្លង់ខ័ណ្ឌ ដោយខ្សែកោង (C) អាស៊ីមតូតមិនស្របនឹងអ័ក្សអរដោនេ បន្ទាត់ $x = 3$ និង $x = 8$

ឃ/ ពិភាក្សាដោយប្រើក្រាភិចអត្ថិភាពឫសសមីការ :

$x^2 - (k+1)x - 2(k+1) = 0$

ធៀបចំនួន -2 និង 0 ទៅតាមតំលៃនៃ k ។

ចំលើយ

1/. $f(x) = \sin 2x\cos 8x + \sin 4x\cos 2x - \sin x\cos x$

យើងត្រូវប្រើរូបមន្ត បិ ដើម្បីបំលែង $f(x)$ អោយទៅជារាងងាយ

$\sin b\cos a = \frac{1}{2}\sin(a+b) - \frac{1}{2}\sin(a-b)$

$\sin 2x\cos 8x = \frac{1}{2}\sin 10x - \frac{1}{2}\sin 6x$ ....$(a = 8x$ និង $b = 2x)$

$\sin a\cos b = \frac{1}{2}\sin(a+b) + \frac{1}{2}\sin(a-b)$

$\sin 4x\cos 2x = \frac{1}{2}\sin 6x + \frac{1}{2}\sin 2x$ ....$(a = 4x$ និង $b = 2x)$

$\sin a\cos a = \frac{1}{2}\sin 2a$

$\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$ ....$(a = b = x)$

យើងបាន $f(x) = \frac{1}{2}\sin 10x - \frac{1}{2}\sin 6x + \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\sin 2x = \frac{1}{2}\sin 10x$

$$f(x) = \frac{1}{2}\sin 10x$$

ក. គណនា $f'(x) = \frac{1}{2}10\cos 10x = 5\cos 10x$

$$f'(x) = 5\cos 10x$$

$\int f(x)dx = \int \frac{1}{2}\sin 10x dx = \frac{1}{2}\int \sin 10x dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{10}\right)\cos 10x + c$

$$\int f(x)dx = -\frac{1}{20}\cos 10x + c$$

ខ. គណនា :

$$f(1,5^\circ) = \frac{1}{2}\sin 15^\circ = \frac{1}{2}\sin(45^\circ - 30^\circ) = \frac{1}{2}[\sin 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \cos 45^\circ]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right] = \frac{\sqrt{2}}{8}(\sqrt{3} - 1)$$

$$\boxed{f(1,5^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{8}(\sqrt{3} - 1)}$$

$$f(7,5^\circ) = \frac{1}{2}\sin 75^\circ = \frac{1}{2}\sin(45^\circ + 30^\circ) = \frac{1}{2}[\sin 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 45^\circ]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right] = \frac{\sqrt{2}}{8}(\sqrt{3} + 1)$$

$$\boxed{f(7,5^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{8}(\sqrt{3} + 1)}$$

$$f(12^\circ) = \frac{1}{2}\sin 120^\circ = \frac{1}{2}\sin 60^\circ = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \qquad \boxed{f(12^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{4}}$$

$$f(21^\circ) = \frac{1}{2}\sin 210^\circ = -\frac{1}{2}\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \qquad \boxed{f(21^\circ) = -\frac{1}{4}}$$

$$f(33^\circ) = \frac{1}{2}\sin 330^\circ = -\frac{1}{2}\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \qquad \boxed{f(33^\circ) = -\frac{1}{4}}$$

2/. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើ $a > 1$ និង $\frac{a^m}{a^n} < \sqrt{a}$

គេបាន : $\frac{a^{m-1} + a^n}{a^m + a^n} < \frac{\sqrt{a}}{a}$

ដោយយើងដឹងថា $a > 1 \Rightarrow \sqrt{a} > 1 \Rightarrow \sqrt{a} - 1 > 0$

ហើយ $(a - \sqrt{a})(\sqrt{a} + 1) = a\sqrt{a} + a - a - \sqrt{a} = a\sqrt{a} - \sqrt{a} = \sqrt{a}(a - 1)$

ដូច្នេះ យើងអាចសរសេរបាន : $\sqrt{a} = \frac{(a - \sqrt{a})(\sqrt{a} + 1)}{a - 1} = \frac{(a - \sqrt{a})(\sqrt{a} + 1)}{(\sqrt{a} + 1)(\sqrt{a} - 1)} = \frac{a - \sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1}$

ដូច្នេះ $\sqrt{a} = \frac{a - \sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1}$ តាមសម្មតិកម្ម $\frac{a^m}{a^n} < \sqrt{a} \Leftrightarrow$

$$\frac{a^m}{a^n} - \frac{a - \sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1} = \frac{\sqrt{a}a^m - a^m - aa^n + \sqrt{a}a^n}{a^n(\sqrt{a} - 1)} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{a}a^m - a^m - aa^n + \sqrt{a}a^n < 0 \Leftrightarrow a^m + aa^n - \sqrt{a \cdot a^m} - \sqrt{a \cdot a^n} > 0$$

ចង់ស្រាយ $\frac{a^{m-1} + a^n}{a^m + a^n} > \frac{\sqrt{a}}{a}$ ត្រូវរកអោយបាន $\frac{a^{m-1} + a^n}{a^m + a^n} - \frac{\sqrt{a}}{a} > 0$

រក $\frac{a^{m-1} + a^n}{a^m + a^n} - \frac{\sqrt{a}}{a} = \frac{a^m + aa^n - \sqrt{a}a^m - \sqrt{a}a^n}{(a^m + a^n)a}$

$\frac{a^m + aa^n - \sqrt{a}a^m - \sqrt{a}a^n}{(a^m + a^n)a} > 0$ ព្រោះ $\begin{cases} (a^m + a^n)a > 0 \\ a^m + aa^n - \sqrt{a}a^m - \sqrt{a}a^n > 0 \end{cases}$

ដូច្នេះ $\boxed{\frac{a^{m-1} + a^n}{a^m + a^n} > \frac{\sqrt{a}}{a}}$

3/ក. កំនត់ m ដើម្បីអោយខ្សែកោង (C_m) ជាបន្ទាត់

ដើម្បីអោយខ្សែកោង (C_m) ជាបន្ទាត់ លុះត្រាតែសមីការរបស់វាមានរាង $y = ax + b$

$y = f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x + m} = \frac{(x + 1)(x - 2)}{x + m}$ $f(x)$ អាចមានរាង $y = ax + b$

បានលុះត្រាតែ $(x + 1)(x - 2)$ អាចសំរួលជាមួយ $x + m$ កើត

ដូចនេះយើងអាចទាញរកតំលៃ m បានគឺត្រូវយក $\boxed{m = 1 \text{ រឺ } m = -2}$

- បើ (C_m) មិនមែនជាបន្ទាត់ យើងត្រូវយក $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2;1\}$ ស្រាយថា (C_m) កាត់តាមចំនុចនឹងពីរ A និង B ដែលត្រូវរក

សមីការ (C_m) អាចសរសេរ $y = \dfrac{x^2 - x - 2}{x + m} \Leftrightarrow xy + my = x^2 - x - 2 \Leftrightarrow$

$my = x^2 - x - 2 - xy$ សមីការនេះផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះ $\forall m \in \mathbb{R} \setminus \{-2;1\}$

លុះត្រាតែ $\begin{cases} y = 0 \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 , y = 0 \\ x = 2 , y = 0 \end{array}\right.$ ដូចនេះ

(C_m) កាត់តាមចំនុចនឹងពីរ $\boxed{A(x = -1 , y = 0)}$

$\boxed{B(x = 2' , y = 0)}$

ខ. រកតំលៃ m ដែលធ្វើអោយបន្ទាត់ប៉ះ (C_m) ត្រង់ A និង B ស្របគ្នា

អនុគមន៍ $y = f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x + m}$ មានដេរីវេ $f'(x) = \dfrac{x^2 + 2mx - m + 2}{(x + m)^2}$

មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះ (C_m) ត្រង់ $A(-1;0)$ គឺ

$$f'(-1) = \frac{1 - 2m - m + 2}{(-1 + m)^2} = \frac{3 - 3m}{(1 - m)^2} = \frac{3(1 - m)}{(1 - m)^2} = \frac{3}{1 - m}$$

មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះ (C_m) ត្រង់ $B(2;0)$ គឺ

$$f'(2) = \frac{4 + 4m - m + 2}{(2 + m)^2} = \frac{6 + 3m}{(2 + m)^2} = \frac{3(2 + m)}{(2 + m)^2} = \frac{3}{2 + m}$$

ដើម្បីអោយបន្ទាត់ប៉ះ (C_m)ត្រង់ A និង B ស្របគ្នា លុះត្រាតែមេគុណប្រាប់ទិសរបស់វា ស្មើគ្នាគឺ $\dfrac{3}{1 - m} = \dfrac{3}{2 + m} \Leftrightarrow 6 + 3m = 3 - 3m \Leftrightarrow 6m = -3$

ដូច្នេះ $m = -\dfrac{3}{6} = -\dfrac{1}{2}$

$$\boxed{m = -\frac{1}{2}}$$

គ. គូសខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍នេះចំពោះ $m = 2$

បើ $m = 2$ នោះ អនុគមន៍ទៅជា $y = f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x + 2} = x - 3 + \dfrac{4}{x + 2}$

អនុគមន៍នេះមានដែនកំណត់ $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$$f'(x) = \frac{x + 4x}{(x + 2)^2} = \frac{x(x + 4)}{(x + 2)^2}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x_1 = 0 & \Rightarrow y_1 = f(0) = -1 \\ x_2 = -4 & \Rightarrow y_2 = f(-4) = -9 \end{array}\right.$

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-9	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} x - 3 + \dfrac{4}{x + 2} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} x = \pm\infty$

$\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \lim\limits_{x \to -2} x - 3 + \dfrac{4}{x + 2} = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{4}{x + 2} = \pm\infty \Rightarrow$ បន្ទាត់ $x = -2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ រឺ អាស៊ីមតូតស្រប $(y'Oy)$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - (x - 3)] = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{4}{x + 2} = 0$ បន្ទាត់ $y = x - 3$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត រឺ អាស៊ីមតូតមិនស្រប និងអ័ក្សកូអរដោនេ

(C) កាត់ $(x'Ox)$ ត្រង់ចំនុចមានអាប់ស៊ីសជាឫសនៃ $x^2 - x - 2 = 0$

$$x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{array}\right.$$

(C) កាត់ $(y'Oy)$ ត្រង់ចំនុចមានអរដោនេ $y = f(0) = -1$

រកផ្ចិតឆ្លុះ ω របស់ (C)

អាស៊ីមតូតឈរ $x = -2$ និងអាស៊ីមតូតទ្រេត $y = x - 3$ កាត់គ្នាត្រង់ $\omega(-2;-5)$ ។

ក្នុងតំរុយ (ωXY) យើងបានតាមរូបមន្តប្តូរតំរុយ

$$\begin{cases} x = -2 + X \\ y = -5 + Y \end{cases}$$ នោះអនុគមន៍ទៅជា :

$$-5 + Y = \frac{(-2+X)^2 - (-2+X) - 2}{-2+X+2} = \frac{4 - 4X + X^2 + 2 - X - 2}{X} = \frac{X^2 - 5X + 4}{X}$$

ដូច្នេះយើងបាន : $Y = f(X) = \frac{X^2 - 5X + 4}{X} + 5 = \frac{X^2 - 5X + 4 + 5X}{X}$

$$Y = f(X) = \frac{X^2 + 4}{X}$$

ដោយ $f(-X) = \frac{(-X)^2 + 4}{-X} = -\frac{X^2 + 4}{X} = -f(X) \Leftrightarrow f(X)$ ជាអនុគមន៍សេស

$\Rightarrow \omega(-2;-5)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះរបស់ខ្សែកោង (C) ។

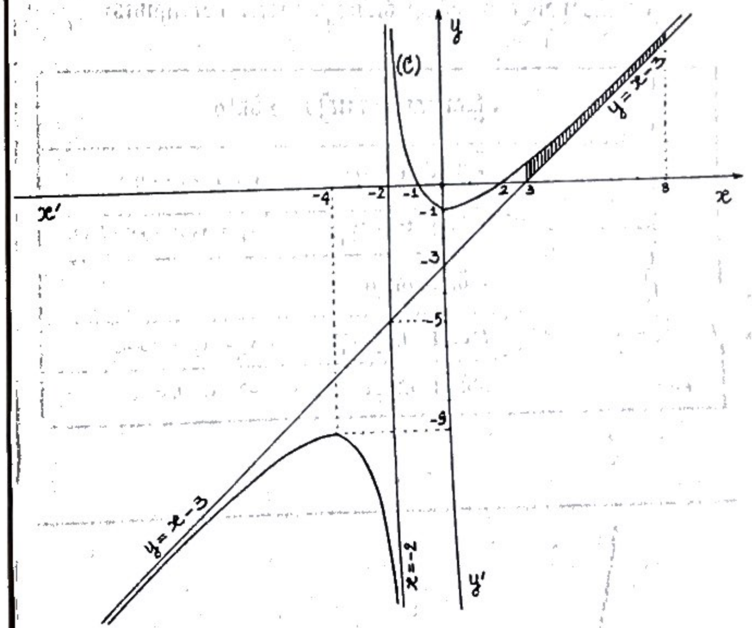
គណនាក្រលាផ្ទៃ $\mathscr{S}$ ផ្នែកប្លង់ខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោង (C) អាស៊ីមតូតមិនស្រប និង អ័ក្សអរដោនេបន្ទាត់ $x = 3$ និង $x = 8$

$$= \int_3^8 [f(x) - (x-3)]dx = \int_3^8 \left[x - 3 + \frac{4}{x+2} - (x-3)\right]dx =$$

$$= \int_3^8 \frac{4}{x+2}dx = 4\int_3^8 \frac{dx}{x+2} = 4[\ln|x+2|]_3^8 = 4[\ln 10 - \ln 5]$$

$$= 4\ln\frac{10}{5} = 4\ln 2$$ ឯកតាផ្ទៃ

ដូច្នេះយើងបាន $\mathscr{S} = 4\ln 2$ ឯកតាក្រលាផ្ទៃ



ឃ. ពិភាក្សាតាមក្រាភិច អត្ថិភាពឫសសមីការ : $x^2-(k+1)x-2(k+1)=0$ ធៀបទៅនឹងចំនួន -2 និង 0 ទៅតាមតំលៃនៃ k ។

សមីការអោយអាចសរសេរ $x^2-kx-x-2k-2=0\Leftrightarrow$

$x^2-x-2=k(x+2)\Leftrightarrow k=\dfrac{x^2-x-2}{x+2}$ អាចចាត់ទុកជាសមីការអាប់ស៊ីសរវាងខ្សែកោង (C) និងបន្ទាត់ $y=k$ ស្រប $(x'Ox)$

ដោយពិនិត្យតាមក្រាភិច យើងបានចំលើយក្នុងតារាងសង្ខេបខាងក្រោមនេះ

k	អត្ថិភាពឫសសមីការធៀប -2 និង 0
$-\infty$	សមីការ មានឫសពីរ $x_1<x_2<-2<0$
-9	សមីការ មានឫសឌុប $x_1=x_2=-4<-2<0$
	សមីការ គ្មានឫស
-1	សមីការ មានឫសឌុប $x_1=x_2=0>-2$
$+\infty$	សមីការ មានឫសពីរ $-2<x_1<0<x_2$

លំហាត់

គេមានអនុគមន៍ $y=f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x^2-2x-3}$ ដែលមានក្រាប (C)

1/. រក a,b និង c ដោយដឹងថា (C) កាត់តាម $(1,0)$, $(-2,0)$, $\left(0;\frac{2}{3}\right)$

2/. រកទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $y=f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x^2-2x-3}$ បញ្ជាក់សមីការអាស៊ីមតូតបើមាន ។ សង់ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍នេះ ដោយបញ្ជាក់អាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វជាមួយអាស៊ីមតូតដេក ។

3/. ដោះស្រាយតាមក្រាភិច អត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការតាមតំលៃនៃ m

$(m-1)x^2-(2m+1)x-3m+2=0$

ចំលើយ

អនុគមន៍ $y=f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x^2-2x-3}$ ជាអនុគមន៍ប្រភាគសនិទាន

$D=x^2-2x-3=0\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-1\\x=3\end{cases}$ ដូច្នេះ $\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1;3\}$

1/. រក a,b,c ដោយដឹងថា(C)

$(1;0)\Leftrightarrow f(1)=0\Leftrightarrow\dfrac{a+b+c}{1-2-3}=\dfrac{a+b+c}{-4}=0\Leftrightarrow a+b+c=0$

$\Leftrightarrow \underline{c=-a-b \quad (1)}$

$(-2;0)\Leftrightarrow f(-2)=0\Leftrightarrow\dfrac{4a-2b+c}{4+4-3}=\dfrac{4a-2b+c}{5}=0\Leftrightarrow$

$4a-2b+c=0\Leftrightarrow \underline{c=-4a+2b \quad (2)}$

$\left(0,\frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow f(0) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{0+0+c}{0-0-3} = -\frac{c}{3} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \underline{c = -2}$

ផ្ទឹម (1) និង (2) យើងអាចទាញបាន $-a-b = -4a+2b \Leftrightarrow$

$-3b = -3a \Leftrightarrow a = b$

ក្នុង (2) ជំនួស $b = a$ និង $c = -2$ យើងបាន;

$-2 = -4a+2a = -2a \Leftrightarrow a = 1 \quad , \quad b = 1$

ដូច្នេះយើងបាន $\boxed{a = b = 1 \quad , \quad c = -2}$

2/. សិក្សាទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $y = f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x^2-2x-3}$

អនុគមន៍នេះមានដែនកំណត់ $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1 \,;3\}$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \left(\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1\right)$;

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \infty \quad , \quad \lim\limits_{x \to 3} f(x) = \infty$

$f'(x) = \dfrac{u'v - v'u}{v^2} \qquad \begin{matrix} u = x^2+x-2 & \Rightarrow & u' = 2x+1 \\ v = x^2-2x-3 & \Rightarrow & v' = 2x-2 \end{matrix}$

$f'(x) = \dfrac{2x^3-4x^2-6x+x^2-2x-3+-2x^3-2x^2+4x+2x^2+2x-4}{(x^2-2x-3)^2}$

$f'(x) = \dfrac{-3x^2-2x-7}{(x^2-2x-3)^2} = \dfrac{-(3x^2+2x+7)}{(x^2-2x-3)^2}$

$(x^2-2x-3)^2 > 0 \quad , \forall x \in \mathcal{D}$ នោះ $f'(x)$ យកសញ្ញាតាមភាគយក $-(3x^2+2x+7)$ តែ $(3x^2+2x+7)$ ជាត្រីធាដឺក្រេទី 2នៃ x ដែលមាន

$\left[\begin{array}{l} a = 3 > 0 \\ \Delta' = 1-21 = -20 < 0 \end{array}\right. \Rightarrow 3x^2+2x+7 > 0 \quad , \quad \forall x \in \mathcal{D}$

$-(3x^2+2x+7) < 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}$ ដូច្នេះ $f'(x) < 0 \quad , \quad \forall x \in \mathcal{D}$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		−	‖	−	‖	−	
$f(x)$	1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

អនុគមន៍នេះជាអនុគមន៍ចុះជានិច្ចក្នុងដែនកំណត់ $\mathcal{D}$

បញ្ជាក់អាស៊ីមតូតដែលមាន :

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$ នោះយើងបានបន្ទាត់ $y = 1$ ជាអាស៊ីមតូតដេក

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \infty \quad , \quad \lim\limits_{x \to 3} f(x) = \infty$ នោះយើងបានបន្ទាត់ $x = -1$ និង $x = 3$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

អាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វរវាង (C) និង $(x'Ox)$ ជាឫសនៃសមីការ $\dfrac{x^2+x-2}{x^2-2x-3} = 0$

$\Leftrightarrow x^2+x-2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right.$

អរដោនេចំនុចប្រសព្វរវាង (C) និង $(y'Oy)$ គឺ $y = f(0) = \frac{2}{3}$

រកអាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វរវាង (C) និងអាប់ស៊ីមតូតដេក $y = 1$

$\dfrac{x^2+x-2}{x^2-2x-3} = 1 \Leftrightarrow x^2+x-2 = x^2-2x-3 \Leftrightarrow$

$-3x = 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$

ខ្សែកោង (C) កាត់អាស៊ីមតូតដេក $y = 1$ ត្រង់ចំនុចអាប់ស៊ីស $x = -\frac{1}{3}$

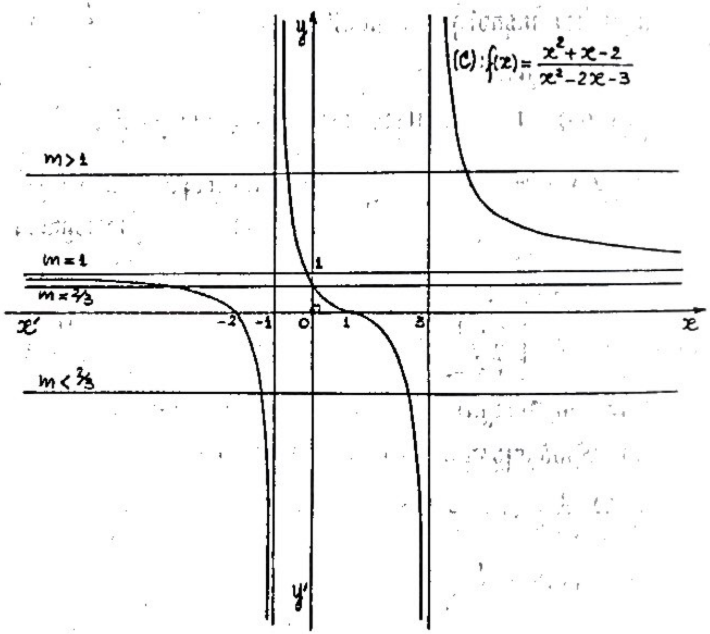
3/. ដោះស្រាយតាមក្រាភិចអត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការ

$(m-1)x^2-(2m+1)x-3m+2 = 0$ សមីការនេះអាចសរសេរ

$mx^2-x^2-2mx-x-3m+2 = 0 \Leftrightarrow$

$mx^2-2mx-3m = x^2+x-2 \Leftrightarrow m(x^2-2x-3) = x^2+x-2$

$\Leftrightarrow m = \dfrac{x^2+x-2}{x^2-2x-3}$ ដែលជាសមីការអាប់ស៊ីសរវាងខ្សែកោង (C) និងបន្ទាត់ $y = m$ ស្រប $(x'Ox)$ ។ ដោយពិនិត្យតាមក្រាភិច យើងបានចំលើយក្នុងតារាងខាងក្រោម ។



m	អត្ថិភាព និងសញ្ញាឫស	
$-\infty$	សមីការ មានឫសពីរ	$x_1<0<x_2$
$\frac{2}{3}$	សមីការ មានឫសពីរ	$x_1<x_2=0$
	សមីការ មានឫសពីរ	$x_1<x_2<0$
1	សមីការ មានឫសមួយ	$x=-\frac{1}{3}<0$
$+\infty$	សមីការ មានឫសពីរ	$x_1<0<x_2$

លំហាត់

គេមានអនុគមន៍ $y = f(x) = \dfrac{2x^2+ax+b}{x^2-5x+4}$ ។

1/. គណនា a និង b បើគេដឹងថាតំលៃបរមានៃអនុគមន៍ស្មើ 3 ចំពោះ $x = 0$

2/. ចំពោះតំលៃ a និង b ដែលរកឃើញ ចូរសិក្សាទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ដោយបញ្ជាក់សមីការអាស៊ីមតូតទាំងអស់ដែលមាន រួចសង់ខ្សែកោង (C_1) តាងអនុគមន៍នេះក្នុងតំរុយអរតូនរមេ (Oxy) ។ បញ្ជាក់អាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វរវាង (C_1) និងអាស៊ីមតូតដេក ។

3/. ទាញសំណង់ខ្សែកោង (C_2) តាងអនុគមន៍ $y = g(x) = \left|\dfrac{2x^2-15x+12}{x^2-5x+4}\right|$ រួចដោះស្រាយអត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការ $g(x) = m$ តាមក្រាភិចដោយពិភាក្សាទៅតាមតំលៃនៃ m ។

ចំលើយ

1/. គណនា a និង b បើគេដឹងថាតំលៃបរមានៃអនុគមន៍ស្មើ 3 ចំពោះ $x = 0$

អនុគមន៍ $y = f(x) = \dfrac{2x^2+ax+b}{x^2-5x+4}$ មានដែនកំនត់ $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1;4\}$

មានដេរីវេ $y' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ $\quad u = 2x^2+ax+b \Rightarrow u' = 4x+a$

$\quad v = x^2-5x+4 \Rightarrow v' = 2x-5$

$$y' = f'(x) = \frac{(4x+a)(x^2-5x+4)-(2x-5)(2x^2+ax+b)}{(x^2-5x+4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4x^3-20x^2+16x+ax^2-5ax+4a-4x^3-2ax^2-2bx+10x^2+5ax+5b}{(x^2-5x+4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(-a-10)x^2-2(b-8)x+4a+5b}{(x^2-5x+4)^2}$$

តាមសម្មតិកម្ម $f(x)$ មានតំលៃបរមាស្មើ 3 ចំពោះ $x = 0$ នោះយើងបាន

$$\begin{cases} f'(0) = 0 \\ f(0) = 3 \end{cases}$$

$f'(0) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{4a+5b}{16} = 0 \Leftrightarrow 4a+5b = 0 \quad (1)$

$f(0) = 3 \Leftrightarrow \dfrac{b}{4} = 3 \Leftrightarrow b = 12 \quad (2)$

យកតំលៃ $b = 12$ ទៅជំនួសក្នុង (1) យើងបាន $4a+60 = 0 \Leftrightarrow a = -15$

យើងបាន : $a = -15 \quad , \quad b = 12$

$f(0) = \dfrac{(2x^2+ax+b)'}{(x^2-5x+4)'}\Big|_{x=0} = \dfrac{4x+a}{x^2-5}\Big|_{x=0} = \dfrac{a}{-5}$

$f(0) = 3 \Leftrightarrow \dfrac{a}{-5} = 3 \Rightarrow a = -5\times 3 = -15$

ម្យ៉ាងទៀត $f(0) = 3 \Leftrightarrow \dfrac{b}{4} = 3 \Rightarrow b = 12$

2/. បើ $a = -15$ និង $b = 12$ នោះយើងបានអនុគមន៍

$y = f(x) = \dfrac{2x^2-15x+12}{x^2-5x+4}$ មានដែនកំនត់ $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1;4\}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x^2}{x^2} = 2 \quad ; \quad \lim\limits_{x\to 1} f(x) = \infty \quad ; \quad \lim\limits_{x\to 4} f(x) = 4$

$$f'(x) = \frac{5x^2-8x}{(x^2-5x+4)^2} = \frac{x(5x-8)}{(x^2-5x+4)^2}$$

$f'(x)$ យកសញ្ញាតាម $5x^2-8x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 5x^2-8x = x(5x-8) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 3 \\ x = \frac{8}{5} \Rightarrow y = \frac{43}{9} \end{array}\right.$

តារាងទិសដៅអថេរភាព :

x	$-\infty$		0		1		8/5		4		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	‖	+	
$f(x)$	2	↗	3	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$\frac{43}{9}$	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	2

អនុគមន៍មានតំលៃអតិបរមាស្មើ 3 ចំពោះ $x = 0$ ហើយមានតំលៃអប្បបរមាស្មើ $\dfrac{43}{9}$ ចំពោះ $x = \dfrac{8}{5}$ ។

បញ្ជាក់សមីការអាស៊ីមតូតទាំងអស់ដែលមាន

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 2$ យើងបានបន្ទាត់ $y = 2$ ជាអាស៊ីមតូតដេក

$\lim_{x \to 1} f(x) = \infty$; $\lim_{x \to 4} f(x) = \infty$ យើងបានបន្ទាត់ $x = 1$ និង $x = 4$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

(C) កាត់ $(x'Ox)$ ត្រង់ចំនុចមានអាប់ស៊ីសជាឫសនៃសមីការ $\frac{2x^2 - 15x + 12}{x^2 - 5x + 4} = 0 \Leftrightarrow$

$2x^2 - 15x + 12 = 0$ មាន $\Delta = 225 - 96 = 129$ ដូច្នេះសមីការមានឫសពីរ

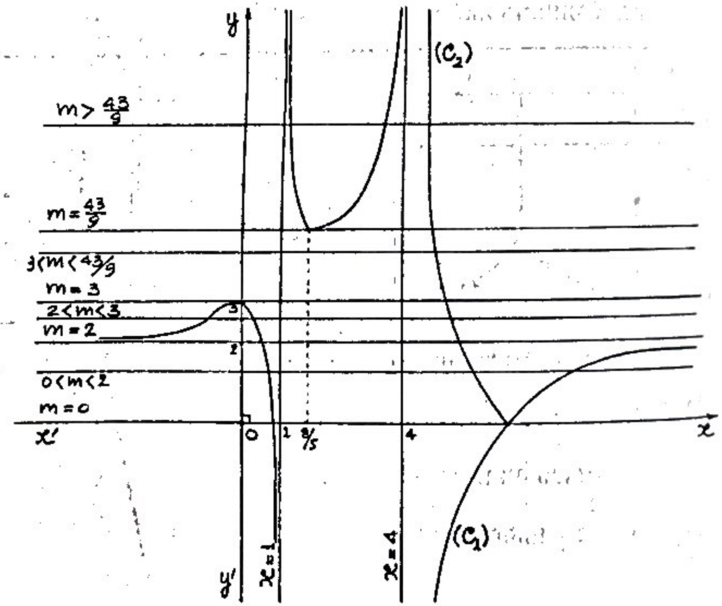
$x_1 = \frac{15 - \sqrt{129}}{4}$, $x_2 = \frac{15 + \sqrt{129}}{4}$

(C) កាត់ $(y'Oy)$ ត្រង់ចំនុចអរដោនេ $y = f(O) = 3$

អាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វរវាង (C) និងអាស៊ីមតូតដេក $y = 2$ ជាឫសនៃសមីការ

$\frac{2x^2 - 15x + 12}{x^2 - 5x + 4} = 2 \Leftrightarrow 2x^2 - 15x + 12 = 2x^2 - 10x + 8$

$5x \Leftrightarrow \ = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{5}$



3/. ទាញសំនង់ខ្សែកោង (C_2) $y = g(x) = \left|\frac{2x^2 - 15x + 12}{x^2 - 5x + 4}\right| = |f(x)|$

អនុគមន៍ $g(x) = |f(x)|$ មានដែនកំនត់ $\mathcal{D} = \mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1;4\}$

$\forall x \in \mathcal{D}$; $f(x) \geqslant 0 \Rightarrow g(x) = |f(x)| = f(x) \Rightarrow$ មែកនៃ (C_2) ជាមែកនៃ (C_1)

ហៅថា (C'_2)

$\forall x \in \mathcal{D}$, $f(x) < 0 \Rightarrow g(x) = |f(x)| = -f(x) \Rightarrow$ មែកនៃ (C_2) ជារូបឆ្លុះនៃមែក (C_1)

ធៀប $(x'Ox)$ (គឺមែកមានគំនូសតូចៗ) ហៅ (C''_2)

កំនត់សំគាល់ :

$$(C_2) = (C'_2) \cup (C''_2)$$

ដោះស្រាយអត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការ $g(x) = m$ តាមក្រាភិច ដោយពិភាក្សា ទៅតាមតំលៃនៃ m

$g(x) = m \Leftrightarrow \left|\frac{2x^2 - 15x + 12}{x^2 - 5x + 4}\right| = m$ ជាសមីការអាប់ស៊ីសរវាង (C_2) និងបន្ទាត់ $y = m$

ស្រប $(x'Ox)$ ។ តាមក្រាភិចយើងបានចំលើយក្នុងតារាងខាងក្រោម ។

m	អត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការ
$-\infty$	
	សមីការគ្មានឫស
0	សមីការមានឫសពីរ $0 < x_1 = \frac{15 - \sqrt{129}}{4} < x_2 = \frac{15 + \sqrt{129}}{4}$
	សមីការមានឫសបួន $0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4$
2	សមីការមានឫសបី $0 < x_1 < x_2 < x_3$
	សមីការមានឫសបួន $x_1 < 0 < x_2 < x_3 < x_4$
3	សមីការមានឫសបី $x_1 = 0 < x_2 < x_3$
	សមីការមានឫសពីរ $0 < x_1 < x_2$
$\frac{43}{9}$	សមីការមានឫសបី $0 < x_1 < x_2 = \frac{8}{5} < x_3$
	សមីការមានឫសបួន $0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4$
$+\infty$	

www.pisethsok.wordpress.com