ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងស្រុកកំពង់ត្របែក

ផ្នែកអក្សរសាស្ត្រខ្មែរ គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា ថ្នាក់ទី៩ និង ថ្នាក់ទី១២

សម័យប្រឡង : ១៥-កុម្ភៈ-២០១៥

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២

រយៈពេល ២ ម៉ោង ពិន្ទុ ១០០

I.(១៥ពិន្ទុ) ក. ប្រៀបធៀបចំនួន $(2015!)^2$ និង $(2015)^{2015}$ ។

ខ. ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ស្រាយបញ្ជាក់ថា n^5-n ជាពហុគុណនៃ 30 ។

II.(១៥ពិន្ទុ) រកតម្លៃតូចបំផុត និង ធំបំផុតនៃអនុគមន៍ $f(x)=\sin^4 x-\sin x\cos x+\cos^4 x$ ។

III.(១៥ពិន្ទុ) ក. បង្ហាញថា $3333^{5555}+5555^{3333}$ ចែកដាច់នឹង 4 ។

ខ. គេដឹងថាចំនួន m ចែកដាច់នឹង 2015 បានសំណល់ 5 ហើយចំនួន n ចែកនឹង 2015 បានសំណល់ 20 ។ កំណត់សំណល់វិធីចែកបែបអឺគ្លីតនៃ $(mn+n^2+1514)$ នឹង 2015 ។

IV.(២០ពិន្ទុ) ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ:

$$\begin{cases}\sqrt{3x}\left(1+\dfrac{1}{x+y}\right)=2\\[2mm] \sqrt{7y}\left(1-\dfrac{1}{x+y}\right)=4\sqrt{2}\end{cases}$$

V.(១៥ពិន្ទុ) រកគ្រប់អនុគមន៍នៃចំនួនពិត $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ:

$$f(xy)=\frac{f(x)+f(y)}{x+y}$$ ដែល $x,y\in\mathbb{R}\,,\,x+y\neq 0$ ។

VI.(២០ពិន្ទុ) កន្លះបន្ទាត់ពុះក្នុងនៃមុំ $\angle A,\angle B$ និង $\angle C$ នៃត្រីកោណ ABC កាត់រង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC ត្រង់ចំណុច $P\,,Q$ និង R រៀងគ្នា។ បង្ហាញថា $AP+BQ+CR>BC+CA+AB$ ។

ដំណោះស្រាយ

I. ក. ប្រៀបធៀបចំនួន $(2015!)^2$ និង $(2015)^{2015}$

យើងដឹងថា $n!=1\times2\times3\times\cdots\times n$

នោះ $2015!=1\times2\times3\times\cdots\times2015$

នាំឱ្យ $(2015!)^2=(1\times2\times3\times\cdots\times2014\times2015)^2$

$=(1\times2\times3\times\cdots\times2014\times2015)\times(2015\times2014\times2014\times\cdots\times2\times1)$

$=(1\times2015)\times(2\times2014)\times(3\times2013)\times\cdots\times(2014\times2)\times(2015\times1)$

ដោយ $n(2016-n)\ge2015$ ចំពោះ $n\in[1,2015]$

$$\Rightarrow\begin{cases}1\times2015\ge2015\\2\times2014>2015\\3\times2013>2015\\\vdots\qquad\vdots\\2014\times2>2015\\2015\times1\ge2015\end{cases}$$

គុណអង្គ និង អង្គ យើងបាន:

$(1\times2015)\times(2\times2014)\times(3\times2013)\times\cdots\times(2014\times2)\times(2015\times1)>2015^{2015}$

$\Rightarrow(2015!)^2>2015^{2015}$

ដូច្នេះ $\boxed{(2015!)^2>2015^{2015}}$

ខ. ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ស្រាយបញ្ជាក់ថា n^5-n ជាពហុគុណនៃ 30

តាង $P(n)=n^5-n$

$$=n(n^4-1)=n(n-1)(n+1)(n^2+1)$$

ដោយ $(5,6)=1$ ហើយ $30=5\times6$

នោះ $P(n)$ ជាពហុគុណនៃ 30 កាលណា $P(n)$ ជាពហុគុណនៃ 5 ផង ហើយជាពហុគុណនៃ 6 ផង។ (1)

❖ ស្រាយថា $P(n)$ ជាពហុគុណនៃ 6

ដោយ $n(n-1)$ ជាផលគុណនៃពីរចំនួនគត់តគ្នា នោះវាជាពហុគុណនៃ 2

ហើយ $n(n-1)(n+1)$ ជាផលគុណនៃបីចំនួនគត់តគ្នា នោះវាជាពហុគុណនៃ 3

នោះ $P(n)$ ជាពហុគុណនៃ 2 ផង និងជាពហុគុណនៃ 3 ផង

$\Rightarrow P(n)$ ជាពហុគុណនៃ 6 (1)

❖ ស្រាយថា $P(n)$ ជាពហុគុណនៃ 5

យើងមាន $P(n)=n(n-1)(n+1)(n^2+1)$

➢ បើ $n=5k,\ k\in\mathbb{N}$

នោះ $P(n)=5k(5k-1)(5k+1)(25k^2+1)$

$=5A\ ,A\in\mathbb{N}$ ជាពហុគុណនៃ 5 (2)

➢ បើ $n=5k+1,\ k\in\mathbb{N}$

នោះ $P(n)=(5k+1)(5k)(5k+2)\left[(5k+1)^2+1\right]$

$=5B,\ B\in\mathbb{N}$ ជាពហុគុណនៃ 5 (3)

➢ បើ $n=5k+2,\ k\in\mathbb{N}$

នោះ $P(n)=(5k+2)(5k+1)(5k+3)\left[(5k+2)^2+1\right]$

$=(5k+2)(5k+1)(5k+3)(25k^2+20k+5)$

$=5(5k+2)(5k+1)(5k+3)(5k^2+4k+1)$

$=5C,\ C\in\mathbb{N}$ ជាពហុគុណនៃ 5 (4)

➢ បើ $n=5k+3,\ k\in\mathbb{N}$

នោះ $P(n)=(5k+3)(5k+2)(5k+4)\left[(5k+3)^2+1\right]$

$=(5k+3)(5k+2)(5k+4)(25k^2+30k+10)$

$=5(5k+3)(5k+2)(5k+4)(5k^2+6k+2)$

$=5D\ ,\ D\in\mathbb{N}$ ជាពហុគុណនៃ 5 (5)

➢ បើ $n=5k+4,\ k\in\mathbb{N}$

នោះ $P(n)=(5k+4)(5k+3)(5k+5)\left[(5k+4)^2+1\right]$

$=5(5k+4)(5k+3)(k+1)\left[(5k+4)^2+1\right]$

$=5E\ ,\ E\in\mathbb{N}$ ជាពហុគុណនៃ 5 (6)

តាម (2), (3), (4), (5) និង (6)

នាំឱ្យ $P(n)$ ជាពហុគុណនៃ 5 (8)

តាម (1) និង (8)

ដូច្នេះ $\boxed{n^5-n \text{ ជាពហុគុណនៃ } 30}$

II. រកតម្លៃតូចបំផុត និង ធំបំផុតនៃអនុគមន៍ $f(x)$

របៀបទី១

យើងមាន $f(x)=\sin^4x-\sin x\cos x+\cos^4x$

$=(\sin^2x+\cos^2x)^2-2\sin^2x\cos^2x-\sin x\cos x$

$=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x-\frac{1}{2}\sin2x$

$=-\frac{1}{2}\left(\sin^2 2x+\sin2x-2\right)$

$=\frac{9}{8}-\frac{1}{2}\left(\sin2x+\frac{1}{2}\right)^2$

➢ រកតម្លៃតូចបំផុត

ដោយ $\sin2x\le1\Rightarrow\left(\sin2x+\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{9}{4}$

ដូច្នេះ តូចបំផុតគឺ $\boxed{f_{\min}=0}$

➢ រកតម្លៃធំបំផុត

ដោយ $\left(\sin 2x+\frac{1}{4}\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\left(\sin 2x+\frac{1}{4}\right)^2 \leq 0$

$\Rightarrow \frac{9}{8}-\frac{1}{2}\left(\sin 2x+\frac{1}{2}\right) \leq 0$

ដូច្នេះ តម្លៃធំបំផុតគឺ $\boxed{f_{\max}=\frac{9}{8}}$

របៀបទី២

យើងមាន $f(x)=\sin^4 x-\sin x\cos x+\cos^4 x$

$=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x-\sin x\cos x$

$=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x-\frac{1}{2}\sin 2x$

តាង $t=\sin 2x$, $-1\leq t\leq 1$

យើងបាន $f(x)=g(t)=1-\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}t^2$

$=-\frac{1}{2}\left(t^2+t-2\right)$

$=-\frac{1}{2}\left[\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{8}\right]$

$=\frac{9}{8}-\frac{1}{2}(t+\frac{1}{2})^2$

ដោយ $-\frac{1}{2}(t+\frac{1}{2})\leq 0$, $\forall t\in[-1,1]$

$\Rightarrow \frac{9}{8}-\frac{1}{2}(t+\frac{1}{2})^2 \leq \frac{9}{8}$

$\Rightarrow g(t)\leq \frac{9}{8}$

នោះ តម្លៃធំបំផុតនៃ $g(t)$ គឺ $\frac{9}{8} \Rightarrow f_{\max}(x)=\frac{9}{8}$

ម្យ៉ាងទៀត ដោយ $t\leq 1$ នោះ $(t+\frac{1}{2})^2 \leq \left(1+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$

$\Rightarrow -\frac{1}{2}(t+\frac{1}{2})^2 \geq -\frac{9}{8}$

$\Rightarrow \frac{9}{8}-\frac{1}{2}(t+\frac{1}{2})^2 \geq 0$

នោះ តម្លៃតូចបំផុតនៃ $g(t)$ គឺ $0 \Rightarrow f_{\min}(x)=0$

ដូច្នេះ តម្លៃតូចបំផុត និង ធំបំផុតនៃ $f(x)$ គឺ:

$\boxed{f_{\min}=0 \ , \ f_{\max}=\frac{9}{8}}$

របៀបទី៣

យើងមាន $f(x)=\sin^4 x-\sin x\cos x+\cos^4 x$

$=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x-\sin x\cos x$

$=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x-\frac{1}{2}\sin 2x$

តាង $t=\sin 2x$, $-1\leq t\leq 1$

យើងបាន $f(x)=g(t)=1-\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}t^2$

$\Rightarrow g'(t)=-\frac{1}{2}-t$

- $g'(t)=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}-t=0 \Leftrightarrow t=-\frac{1}{2}$

ហើយ $-1\leq t\leq 1$ នោះ

- $g(-1)=1-\frac{1}{2}(-1)-\frac{1}{2}(-1)^2=1$
- $g(-\frac{1}{2})=1-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{8}$
- $g(1)=1-\frac{1}{2}(1)-\frac{1}{2}(1)^2=0$

t	-1		$-\frac{1}{2}$		1
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	1	↗	$\frac{9}{8}$	↘	0

តាមតារាងអថេរភាព យើងឃើញថា:

អនុគមន៍ g កើនលើចន្លោះ $\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$

អនុគមន៍ g ចុះលើចន្លោះ $\left(-\frac{1}{2},1\right)$

ហើយ $g_{\min}(t)=0$ និង $g_{\max}(t)=\frac{9}{8}$

ដូច្នេះ តម្លៃតូចបំផុត និង ធំបំផុតនៃ $f(x)$ គឺ:

$\boxed{f_{\min}=0 \ , \ f_{\max}=\frac{9}{8}}$

III.ក. បង្ហាញថា $3333^{5555}+5555^{3333}$ ចែកដាច់នឹង 4

យើងមាន $3333\equiv 1 \pmod 4$

$\Rightarrow 3333^{5555}\equiv 1^{5555}\equiv 1 \pmod 4$

ហើយ $5555\equiv 3\equiv -1 \pmod 4$

$\Rightarrow 5555^{3333}\equiv (-1)^{3333}=-1 \pmod 4$

យើងបាន $3333^{5555}+5555^{3333}\equiv 1-1\equiv 0 \pmod 4$

ដូច្នេះ $\boxed{3333^{5555}+5555^{3333} \text{ ចែកដាច់នឹង } 4}$

របៀបទី២

$$3333^{5555}+5555^{3333}=\left(3333^{5555}-1\right)+\left(5555^{3333}+1\right)$$
$$=(3333-1)\cdot M+(5555+1)\cdot N\ ,\ M,N\in\mathbb{N}$$
$$=3332M+5556N$$
$$=4(833M+1389N)$$
$$=4\cdot Q\ ,\ Q=(833M+1389N)\in\mathbb{N}$$

ដូច្នេះ $3333^{5555}+5555^{3333}$ ចែកដាច់នឹង 4

ខ. កំណត់សំណល់វិធីចែកបែបអឺគ្លីតនៃ

$(mn+n^2+1514)$ នឹង 2015

គេដឹងថាចំនួន m ចែកដាច់នឹង 2015 បានសំណល់ 5

ហើយចំនួន n ចែកនឹង 2015 បានសំណល់ 20

នោះ $\begin{cases}m=2015p+5\\ n=2015q+20\end{cases}$, $(m,n\in\mathbb{N})$

$$\Rightarrow mn=(2015p+5)(2015q+20)$$
$$=(2015)^2pq+2015\cdot 20p+2015\cdot 5q+100$$

និង $n^2=(2015q+20)^2=(2015)^2q^2+2015\cdot 40q+400$

យើងបាន :

$$mn+n^2+1514=(2015)^2pq+2015\cdot 20p+2015\cdot 5q+100$$
$$+(2015)^2q^2+2015\cdot 40q+400+1514$$
$$=2015(2015pq+20p+5q+2015q^2+40q)+2014$$
$$=2015r+2014$$

ដែល $r=2015pq+20p+5q+2015q^2+40q\in\mathbb{N}$

ដូច្នេះ សំណល់វិធីចែកបែបអឺគ្លីតនៃ $(mn+n^2+1514)$ នឹង 2015 គឺ 2014

របៀបទី២ តាម Congruence modulo

គេដឹងថាចំនួន m ចែកដាច់នឹង 2015 បានសំណល់ 5

ហើយចំនួន n ចែកនឹង 2015 បានសំណល់ 20

នោះ $\begin{cases}m=2015p+5\\ n=2015q+20\end{cases}$, $(m,n\in\mathbb{N})$

$$\Rightarrow\begin{cases}m\equiv 5\pmod{2015}\\ n\equiv 20\pmod{2015}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}mn\equiv 5\cdot 20\equiv 100\pmod{2015}\\ n^2\equiv 20^2\equiv 400\pmod{2015}\end{cases}$$

យើងបាន:

$$mn+n^2+1514\equiv 100+400+1514\pmod{2015}$$
$$\Rightarrow mn+n^2+1514\equiv 2014\pmod{2015}$$
$$\Rightarrow mn+n^2+1514=2015r+2014\ ,\ r\in\mathbb{N}$$

ដូច្នេះ សំណល់វិធីចែកបែបអឺគ្លីតនៃ $(mn+n^2+1514)$ នឹង 2015 គឺ 2014

IV. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ:

$$\begin{cases}\sqrt{3x}\left(1+\dfrac{1}{x+y}\right)=2\\ \sqrt{7y}\left(1-\dfrac{1}{x+y}\right)=4\sqrt{2}\end{cases}\quad (I)$$

ប្រព័ន្ធសមីការមានចម្លើយកាលណា $\begin{cases}3x>0\\ 7y>0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow x>0\wedge y>0$$

របៀបទី១

ប្រព័ន្ធសមីការ (I) សមមូលនឹង:

$$\begin{cases}1+\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{2}{\sqrt{3x}} & (1)\\ 1-\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} & (2)\end{cases}$$

យក $(1)+(2)$ យើងបាន:

$$2=\frac{2}{\sqrt{3x}}+\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7x}}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{3x}}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}}=1\quad (3)$$

យក $(1)-(2)$ យើងបាន:

$$\frac{2}{x+y}=\frac{2}{\sqrt{3x}}-\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7y}}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{3x}}-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}}=\frac{1}{x+y}\quad (4)$$

តាម (3) និង (4) យើងបានប្រព័ន្ធសមីការ:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{3x}}+\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}}=1 & (3)\\ \dfrac{1}{\sqrt{3x}}-\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}}=\dfrac{1}{x+y} & (4)\end{cases}$$

បូកអង្គ នឹង អង្គនៃសមីការទាំងពីរ យើងបាន:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3x}}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3x}}-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}}\right)=\frac{1}{x+y}$$
$$\frac{1}{3x}-\frac{8}{7y}=\frac{1}{x+y}$$
$$7y(x+y)-24x(x+y)=21xy$$
$$7xy+7y^2-24x^2-24xy=21xy$$
$$7y^2-38xy-24x^2=0$$

$$7y^2-42xy+4xy-24x^2=0$$
$$7y(y-6x)+4x(y-6x)=0$$
$$(y-6x)(7y+4x)=0 \quad (5)$$

ដោយ $x>0\,,y>0\Rightarrow 7y+4x\neq 0$

នោះ សមីការ $(*)\Leftrightarrow y-6x=0 \quad \Leftrightarrow y=6x \quad (6)$

យក $y=6x$ ជួសក្នុងសមីការ (3) យើងបាន:

$$\frac{1}{\sqrt{3x}}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7\cdot 6x}}=1$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{3x}+\frac{4\sqrt{2}}{3x\sqrt{14}}+\frac{8}{42x}=1$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{x}\left(\frac{1}{3}+\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{14}}+\frac{4}{21}\right)=1$$
$$\Rightarrow x=\frac{1}{3}+\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{14}}+\frac{4}{21}=\frac{11+4\sqrt{7}}{21}$$

យកតម្លៃ x ជួសក្នុងសមីការ (6)

$$y=6\cdot\frac{11+4\sqrt{7}}{21}=\frac{22+8\sqrt{7}}{7}$$

ដូច្នេះ ប្រព័ន្ធសមីការមានគូចម្លើយ

$$\boxed{\left(x=\frac{11+4\sqrt{7}}{21}\,,\,y=\frac{22+8\sqrt{7}}{7}\right)}$$

របៀបទី២

ប្រព័ន្ធសមីការ (I) សមមូល $\begin{cases}\sqrt{x}\left(1+\frac{1}{x+y}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3}\\ \sqrt{y}\left(1-\frac{1}{x+y}\right)=\frac{4\sqrt{14}}{7}\end{cases}$

តាង $a=\sqrt{x},b=\sqrt{y}\Leftrightarrow x=a^2,y=b^2 \quad ,a>0\,,b>0$

នោះប្រព័ន្ធសមីការទៅជា:

$$\begin{cases}a\left(1+\frac{1}{a^2+b^2}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3}\\ b\left(1-\frac{1}{a^2+b^2}\right)=\frac{4\sqrt{14}}{7}\end{cases}$$

តាង $z=a+bi\Rightarrow |z|^2=a^2+b^2$

ហើយ $a^2+b^2=|z|^2=z\cdot\bar{z}$

យើងបាន:

$$a\left(1+\frac{1}{a^2+b^2}\right)+bi\left(1-\frac{1}{a^2+b^2}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{4\sqrt{14}}{7}i$$
$$\Leftrightarrow a+bi+\frac{a-bi}{a^2+b^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{4\sqrt{14}}{7}i$$
$$\Leftrightarrow z+\frac{\bar{z}}{z\cdot\bar{z}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{4\sqrt{14}}{7}i$$
$$\Leftrightarrow z+\frac{1}{z}=\frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{4\sqrt{14}}{7}i$$
$$\Leftrightarrow z^2-2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{2\sqrt{14}}{7}i\right)z+1=0$$
$$\Delta=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{2\sqrt{14}}{7}i\right)^2-1$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{4\sqrt{42}}{21}i-\frac{8}{7}-1$$
$$=\frac{-38}{21}+\frac{4\sqrt{42}}{21}i$$
$$\sqrt{\Delta'}=\sqrt{\frac{-38}{21}+\frac{4\sqrt{42}}{21}i}$$
$$=\pm\left(\frac{2}{\sqrt{21}}+\sqrt{2}i\right)$$

យើងបាន $z=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{2\sqrt{14}}{7}i\right)\pm\left(\frac{2}{\sqrt{21}}+\sqrt{2}i\right)$

$$z=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\pm\frac{2\sqrt{21}}{21}\right)+\left(\frac{2\sqrt{14}}{7}\pm\sqrt{2}\right)i$$

ប៉ុន្តែ $z=a+bi$ ហើយ $a>0\,,b>0$

យើងទាញបាន $a=\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{2\sqrt{21}}{21}$, $b=\frac{2\sqrt{14}}{7}+\sqrt{2}$

ដោយ $x=a^2$, $y=b^2$ យើងបាន:

$$x=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{2\sqrt{21}}{21}\right)^2=\frac{11+4\sqrt{7}}{21}$$
$$y=\left(\frac{2\sqrt{14}}{7}+\sqrt{2}\right)^2=\frac{22+8\sqrt{7}}{7}$$

ដូច្នេះ ប្រព័ន្ធសមីការមានគូចម្លើយ

$$\boxed{\left(x=\frac{11+4\sqrt{7}}{21}\,,\,y=\frac{22+8\sqrt{7}}{7}\right)}$$

V. រកគ្រប់អនុគមន៍នៃចំនួនពិត $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

$f(xy)=\frac{f(x)+f(y)}{x+y}$ ដែល $x,y\in\mathbb{R}\,,x+y\neq 0$

ជំនួស $y=1$ ក្នុង $f(xy)=\frac{f(x)+f(y)}{x+y} \quad (*)$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{f(x)+f(1)}{x+1}$$
$$\Leftrightarrow x\cdot f(x)+f(x)=f(x)+f(1)$$
$$\Leftrightarrow x\cdot f(x)=f(1) \quad (**)$$

- បើ $x=0 \Rightarrow 0\cdot f(0)=f(1) \Rightarrow f(1)=0$

ជំនួស $x=3, y=0$ ក្នុង $(*)$ យើងបាន:

$$f(0)=\frac{f(3)+f(0)}{3+0}$$

$$3f(0)=f(3)+f(0)$$

$$2f(0)=f(3)=0 \Rightarrow f(0)=0$$

ជំនួស $x=-1, y=0$ ក្នុង $(*)$ យើងបាន:

$$f(0)=\frac{f(-1)+f(0)}{-1+0}$$

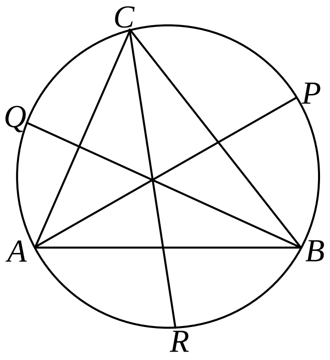
$$-f(0)=f(-1)+f(0)$$

$$2f(0)=-f(-1)$$

$$2\cdot 0=-f(-1) \Rightarrow f(-1)=0$$

ដូច្នេះ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x យើងបាន $f(x)=0$

VI. បង្ហាញថា $AP+BQ+CR>BC+CA+AB$



កន្លះបន្ទាត់ពុះក្នុងនៃមុំ $\angle A, \angle B$ និង $\angle C$ នៃត្រីកោណ ABC កាត់រង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC ត្រង់ចំណុច P, Q និង R រៀងគ្នា នោះ $\angle ABQ=\angle CBQ$

$$\Rightarrow AQ=CQ$$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុសក្នុង ΔABQ និង ΔBCQ យើងបាន៖

$$AQ^2=AB^2+BQ^2-2AB\cdot BQ\cdot\cos\angle ABQ \quad (1)$$

$$CQ^2=BC^2+BQ^2-2BC\cdot BQ^2\cdot\cos\angle CBQ \quad (2)$$

យក $(1)-(2)$ យើងបាន:

$$AQ^2-CQ^2=AB^2-BC^2-2BQ\cdot(AB-BC)\cdot\cos\angle ABQ$$

$$=(AB-BC)(AB+BC)-2BQ\cdot(AB-BC)\cdot\cos\angle ABQ$$

$$=(AB-BC)(AB+BC-2BQ\cdot\cos\angle ABQ)$$

តែ $AQ=CQ$

$$\Leftrightarrow AQ^2=CQ^2 \Leftrightarrow AQ^2-CQ^2=0 \quad (3)$$

យើងបាន $(AB-BC)(AB+BC-2BQ\cdot\cos\angle ABQ)=0$

$$(AB-BC)(AB+BC-2BQ\cdot\cos\angle ABQ)=0 \quad (4)$$

❖ បើ $AB-BC=0 \Leftrightarrow AB=BC$

នោះ ΔABC ជាត្រីកោណសមបាតកំពូល B

នោះ BQ ជាអង្កត់ផ្ចិតរង្វង់

$$\Rightarrow AB+BC=2AB<2BQ$$

❖ បើ $AB-BC\neq 0 \Leftrightarrow AB\neq BC$

នោះ $(4) \Leftrightarrow AB+BC-2BQ\cdot\cos\angle ABQ=0$

$$AB+BC=2BQ\cdot\cos\angle ABQ$$

ដោយ $\cos\angle ABQ<1 \Rightarrow 2BQ\cdot\cos\angle ABQ<2BQ$

$$\Rightarrow AB+BC<2BQ$$

យើងទាញបាន $\Rightarrow AB+BC<2BQ \quad (5)$

ស្រាយតាមរបៀបដូចគ្នាដែរ យើងបាន:

$$AB+CA<2AP \quad (6)$$

$$BC+CA<2CR \quad (7)$$

យក $(5)+(6)+(7)$ យើងបាន:

$$2(AB+BC+CA)<2(BQ+AP+CR)$$

$$\Rightarrow AP+BQ+CR>BC+AB+CA$$

ដូច្នេះ $\boxed{AP+BQ+CR>BC+AB+CA}$