

គន្លឹះដោះស្រាយ

សមីការដឺក្រេទី៣

និង

សមីការដឺក្រេទី៤

សុខ ពិសិដ្ឋ

## គន្លឹះដោះស្រាយ

## សមីការដឺក្រេទី៣

## I. និយមន័យ

សមីការដឺក្រេទី៣ មានមួយអញ្ញាត ជាសមីការដែលមានរាងទូទៅ

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (a \neq 0) \text{ ដែល } a, b, c, d \text{ ជាមេគុណ}$$

ហើយ  $x$  ជាអញ្ញាត។

II. វិធីសាស្ត្រដោះស្រាយសមីការដឺក្រេទី៣មានមួយអញ្ញាតដែល  
អាចរកបូសនាយបាន

## ១. វិធីសាស្ត្រគ្រឹះ

យើងមានសមីការ  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (a \neq 0) \quad (*)$

វិធីទី១ ៖ បើ  $x = x_0$  ជាបូសមួយនៃសមីការ(\*) នោះយើងចែកពហុធា

$ax^3 + bx^2 + cx + d$  នឹង  $(x - x_0)$  យើងបាន

$$\frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{x - x_0} = a'x^2 + b'x + c'$$

រួចដោះស្រាយសមីការ  $a'x^2 + b'x + c = 0$  ដើម្បីរកបូសពីរទៀត។

វិធីទី២ ៖ បើ  $x = x_0$  ជាបូសមួយនៃសមីការ(\*) នោះយើងបាន

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = (x - x_0)(ax^2 + \alpha x + \beta)$$

$$\text{ដែល ៖} \quad \begin{cases} \alpha - ax_0 = b \\ -x_0\beta = d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = ax_0 + b \\ \beta = -\frac{d}{x_0} \end{cases}$$

### សម្គាល់៖

- បើ  $a+b+c+d=0$  នោះយើងបាន  $x_1=1$  ជាឫសមួយនៃសមីការ (\*)
- បើ  $a-b+c-d=0$  ឬ  $a+c=b+d$  នោះយើងបាន  $x_1=-1$  ជាឫសមួយនៃសមីការ(\*)។

**លំហាត់គំរូទី១:** ដោះស្រាយសមីការ  $2x^3+3x^2-4x-1=0$

### ចំណោះស្រាយ

រៀបរៀង៖ យើងមានសមីការ  $2x^3+3x^2-4x-1=0$  (1)

ដោយ  $a+b+c+d=2+3-4-1=0$  នោះ  $x_1=1$  ជាឫសមួយនៃសមីការ (\*)

ចែកពហុធា  $2x^3+3x^2-4x-1=0$  នឹង  $x-1$

$$\text{យើងបាន } \frac{2x^3+3x^2-4x-1}{x-1} = 2x^2+5x+1$$

ដោះស្រាយសមីការ  $2x^2+5x+1=0$

$$\Delta = 25-8=17$$

$$x_{2,3} = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{4}$$

ដូចនេះ សមីការមានឫស  $x_1=1, x_{2,3} = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{4}$

រៀបរៀង៖ យើងមានសមីការ  $2x^3+3x^2-4x-1=0$  (1)

ដោយ  $a+b+c+d=2+3-4-1=0$  នោះ  $x_1=1$  ជាឫសមួយនៃសមីការ (\*)

$$\text{យើងបាន (1) : } 2x^3+3x^2-4x-1=(x-1)(2x^2+\alpha x+\beta)$$

$$\begin{cases} \alpha = ax_0 + b = 2 \times 1 + 3 = 5 \\ \beta = -\frac{d}{x_0} = -\frac{-1}{1} = 1 \end{cases}$$

យើងបាន សមីការទៅជា  $(x-1)(2x^2+5x+1)=0$

$$x-1=0 \Rightarrow x_1=1$$

$$x^2+5x+1=0$$

$$\Delta = 25 - 8 = 17$$

$$x_{2,3} = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{4}$$

ដូចនេះ សមីការមានឫស

$$x_1=1, x_{2,3} = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{4}$$

**លំហាត់ជំនួយទី២:** ដោះស្រាយសមីការ  $x^3+6x^2+11x+6=0$ (2)

**ចំណោះស្រាយ**

$$\text{យើងមានសមីការ } x^3+6x^2+11x+6=0$$

$$\text{ដោយ } a+c=b+d \text{ គឺ } 1+11=6+6 \text{ នោះ } x_1=-1$$

ជាឫសមួយនៃសមីការ (2)

$$\text{យើងបាន } \frac{x^3+6x^2+11x+6}{x+1} = x^2+5x+6$$

$$x^2+5x+6=0$$

$$\Delta = 25 - 24 = 1$$

$$x_2 = \frac{-5-1}{2} = -3$$

$$x_3 = \frac{-5+1}{2} = -2$$

ដូចនេះ សមីការមានឫស

$$x = -3, -2, -1$$

**២. វិធីដោះស្រាយសមីការ  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  ( $a \neq 0$ )**

ក. ករណី  $a=1$  នោះសមីការ(\*)មានរាង  $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$

ឬសដោយនៃ (\*) ជាតួចែកដាច់នៃ  $d$  ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការនេះ។

**លំហាត់គំរូទី៣ :** ដោះស្រាយសមីការ  $x^3 - 6x^2 + 3x + 18 = 0$  (3)

**ចំណោះស្រាយ**

$$\text{តាង } f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 18$$

តួចែកដាច់នៃ 18 គឺ  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18$

$$\text{ដោយ } f(3) = 3^3 - 6 \times 3^2 + 3 \times 3 + 18 = 0$$

នោះ  $x=3$  ជាឬសមួយនៃសមីការ (3)

$$\Rightarrow x^3 - 6x^2 + 3x + 18 = (x-3)(x^2 + \alpha x + \beta)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = ax + b = 1 \times 3 - 6 = -3 \\ \beta = -\frac{d}{x_0} = -\frac{18}{3} = -6 \end{cases}$$

យើងបានសមីការទៅជា  $(x-3)(x^2 - 3x - 6) = 0$

$$\bullet \quad x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 3$$

$$\bullet \quad x^2 - 3x - 6 = 0$$

$$\Delta = 9 + 24 = 33$$

$$\Rightarrow x_{2,3} = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{2}$$

ដូចនេះ សមីការមានឬស

$$x_1 = 3, \quad x_{2,3} = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{2}$$

ខ. ករណី  $a \neq 1$ 

របៀបទី១:

តាង  $x = \frac{t}{a}$  នោះ (\*) យើងបាន ៖

$$a\left(\frac{t}{a}\right)^3 + b\left(\frac{t}{a}\right)^2 + c\left(\frac{t}{a}\right) + d = 0$$

$$\Leftrightarrow t^3 + bt^2 + act + a^2d = 0$$

$$\text{តាង } ac = c', a^2d = d'$$

$$\text{យើងបានសមីការទៅជា } t^3 + bt^2 + c't + d' = 0 \quad (**)$$

- រកសំណុំតួចែកដាច់នៃ  $d'$ 

- យកធាតុនីមួយៗនៃសំណុំនេះ ជំនួសក្នុង (\*\*)

បើវាផ្ទៀងផ្ទាត់ នោះវាជាឫសនៃសមីការនេះ រួចទាញរកតម្លៃ  $x$  ។លំហាត់គំរូទី៤: ដោះស្រាយសមីការ  $2x^3 - 5x^2 + 8x - 3 = 0$  (4)

## ចំណោះស្រាយ

$$\text{តាង } x = \frac{t}{2} \text{ នោះ (4) ទៅជា } 2\left(\frac{t}{2}\right)^3 - 5\left(\frac{t}{2}\right)^2 + 8\left(\frac{t}{2}\right) - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^3 - 5t^2 + 16t - 12 = 0$$

$$\text{ដោយ } a + b + c + d = 1 - 5 + 16 - 12 = 0$$

$$\text{នោះ } t_1 = 1 \text{ ជាឫសមួយនៃសមីការ } t^3 - 5t^2 + 16t - 12 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ ជាឫសមួយនៃសមីការ (4)}$$

$$\text{នោះ (4) : } 2x^3 - 5x^2 + 8x - 3 = \left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2 + \alpha x + \beta)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = ax_0 + b = 2 \times \frac{1}{2} - 5 = -4 \\ \beta = -\frac{d}{x_0} = -\frac{-3}{1/2} = 6 \end{cases}$$

យើងបានសមីការទៅជា  $\left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2 - 4x + 6) = 0$

$$x - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}$$

$$2x^2 - 4x + 6 = 0 \text{ ឬ } x^2 - 2x + 3 = 0$$

$$\Delta' = 1 - 3 = -2$$

$$\sqrt{\Delta'} = \sqrt{-2} = i\sqrt{2}$$

$$x_{2,3} = 1 \pm i\sqrt{2}$$

ដូចនេះ សមីការមានឫស

$$x_1 = \frac{1}{2}, x_{2,3} = 1 \pm i\sqrt{2}$$

អប្បបរមាទី២:

យើងមានសមីការ  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (a \neq 0)(*)$

- រកសំណុំតួចែកដាច់នៃ  $a : A = \{\dots\}$

- រកសំណុំតួចែកដាច់នៃ  $d : D = \{\dots\}$

- រកសំណុំផលធៀប  $Q = \frac{D}{A} = \left\{ x : x = \frac{p}{q} / p \in D, q \in A \right\}$

- យកធាតុនីមួយៗនៃសំណុំ  $Q$  ទៅជំនួសក្នុងសមីការ(\*)

បើធាតុមួយណាផ្ទៀងផ្ទាត់ នោះវាជាឫសរបស់សមីការ។

**លំហាត់តំរូវទី៥:** ដោះស្រាយសមីការ  $16x^3 + 8x^2 + 13x - 4 = 0$  (5)

### ចំណេះស្រាយ

សំណុំតួចែកដាច់នៃ 16 គឺ  $A = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16\}$

សំណុំតួចែកដាច់នៃ -4 គឺ  $D = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$

នោះសំណុំផលធៀបរវាង A និង D គឺ

$$Q = \left\{ \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{8}, \pm \frac{1}{16} \right\}$$

តាង  $f(x) = 16x^3 + 8x^2 + 13x - 4$

ដោយ  $f\left(\frac{1}{4}\right) = 0$  នោះ  $x = \frac{1}{4}$  ជាឫសមួយនៃសមីការ (5)

នោះ  $16x^3 + 8x^2 + 13x - 4 = \left(x - \frac{1}{4}\right)(16x^2 + \alpha x + \beta)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = ax_0 + b = 16 \times \frac{1}{4} + 8 = 12 \\ \beta = -\frac{d}{x_0} = -\frac{-4}{1/4} = 16 \end{cases}$$

យើងបានសមីការទៅជា  $\left(x - \frac{1}{4}\right)(16x^2 + 12x + 16) = 0$

$$\bullet \quad x - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{4}$$

$$\bullet \quad 16x^2 + 12x + 16 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 3x + 4 = 0$$

$$\Delta = 9 - 64 = -55$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{-55} = i\sqrt{55}$$

$$x_{2,3} = \frac{-3 \pm i\sqrt{55}}{8}$$

ដូចនេះ សមីការមានឫស

$$x_1 = \frac{1}{4}, x_{2,3} = \frac{-3 \pm i\sqrt{55}}{8}$$

របៀបម្យ៉ាងទៀត:

$$\text{យើងមានសមីការ } 16x^3 + 8x^2 + 13x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(2x)^3 + 2(2x)^2 + 13x - 4 = 0$$

$$\text{តាង } 2x = \frac{t}{2} \Rightarrow x = \frac{t}{4}$$

$$\text{នោះ (5) យើងបាន } 2\left(\frac{t}{2}\right)^3 + 2\left(\frac{t}{2}\right)^2 + 13\left(\frac{t}{4}\right) - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^3 + 2t^2 + 13t - 16 = 0$$

$$\text{ដោយ } a + b + c + d = 1 + 2 + 13 - 16 = 0$$

$$\Rightarrow t = 1 \text{ ជាឫសមួយនៃសមីការ } t^3 + 2t^2 + 13t - 16 = 0$$

$$\text{យើងបាន } t^3 + 2t^2 + 13t - 16 = (t-1)(t^2 + \alpha t + \beta)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = ax_0 + b = 1 \times 1 + 2 = 3 \\ \beta = -\frac{d}{x_0} = -\frac{-16}{1} = 16 \end{cases}$$

$$\text{យើងបាន សមីការទៅជា } (t-1)(t^2 + 3t + 16) = 0$$

$$\bullet t - 1 = 0 \Rightarrow t_1 = 1$$

$$\bullet t^2 + 3t + 16 = 0$$

$$\Delta = 9 - 64 = -55$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{-55} = i\sqrt{55}$$

$$x_{2,3} = \frac{-3 \pm i\sqrt{55}}{2}$$

ដោយ  $x = \frac{t}{4}$  យើងបាន:

$$\bullet t = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

$$\bullet t = \frac{-3 \pm i\sqrt{55}}{2} \Rightarrow x = \frac{-3 \pm i\sqrt{55}}{8}$$

ដូចនេះ សមីការមានឫស

$$x_1 = \frac{1}{4}, x_{2,3} = \frac{-3 \pm i\sqrt{55}}{8}$$

### លំហាត់អនុវត្តន៍

ដោះស្រាយសមីការដឺក្រេទី៣ខាងក្រោម:

១.  $x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = 0$

២.  $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$

៣.  $3x^3 - 13x^2 + 16x - 4 = 0$

៤.  $3x^3 - 3x^2 - 2x - 8 = 0$

៥.  $3x^3 - 2x^2 + 2x + 1 = 0$

៦.  $x^3 - 5x + 2 = 0$

៧.  $-x^3 + 3x^2 - x + 3 = 0$

៨.  $6x^3 + 3x^2 - 10x - 7 = 0$

៩.  $5x^3 + 17x^2 + 8x + 12 = 0$

១០.  $-x^3 + 2x^2 + 5x - 6 = 0$

### ចម្លើយសម្រាប់ឫសនីមួយៗ

១.  $x = -1$

២.  $x = -1$

៣.  $x = \frac{1}{3}$

៤.  $x = 2$

៥.  $x = -\frac{1}{3}$

៦.  $x = 2$

៧.  $x = 3$

៨.  $x = -1$

៩.  $x = -2$

១០.  $x = 1$

### III. វិធីសាស្ត្រដោះស្រាយសមីការដឺក្រេទី៣ដែលពិធានករកម្រិត ខាង ឬ កម្រិតខាងមិនធាន

យើងមានសមីការ  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  ( $a \neq 0$ ) (\*)

តាង  $x = y - \frac{b}{3a}$  យកទៅជំនួសក្នុងសមីការ (\*) យើងបាន (\*)

មានរាង  $y^3 + py + q = 0$  (\*\*)

$$\text{Let } \Delta = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$$

- បើ  $p = q = 0$  នោះ (\*\*) មានឫស  $y_1 = y_2 = y_3 = 0$

$$\Rightarrow (*) \text{ មានឫស } x_1 = x_2 = x_3 = -\frac{b}{3a}$$

- បើ  $\Delta > 0$  នោះ (\*\*) មានឫសជាចំនួនពិតតែមួយគត់ គឺ

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}}$$

ហើយឫសពីរទៀតជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់ ។

$\Rightarrow (*)$  មានឫសជាចំនួនពិតតែមួយគត់គឺ

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} - \frac{b}{3a}$$

- បើ  $\Delta = 0$  នោះ (\*\*) មានឫសពីរស្មើគ្នា(ឫសឌុប  $y_1 = y_2 \neq y_3$ )

$$\text{គឺ } \begin{cases} y_1 = y_2 = \sqrt{-\frac{p}{3}} & \text{បើ } a > 0 \\ y_1 = y_2 = -\sqrt{-\frac{p}{3}} & \text{បើ } a < 0 \end{cases}$$

នោះ (\*) មានឫសពីរស្មើគ្នា គឺ 
$$\begin{cases} x_1 = x_2 = \sqrt{-\frac{p}{3}} - \frac{b}{3a} & \text{បើ } a > 0 \\ x_1 = x_2 = -\sqrt{-\frac{p}{3}} - \frac{b}{3a} & \text{បើ } a < 0 \end{cases}$$

-បើ  $\Delta < 0$  នោះ (\*\*) មានឫសបីផ្សេងគ្នា ៖

$$\text{តាង } y = m \cos \theta \text{ ដែល } \begin{cases} m = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \\ \cos 3\theta = \frac{3q}{pm} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{1}{3} \arccos\left(\frac{3q}{pm}\right) + \frac{2k\pi}{3} \text{ ដែល } k = 0, 1, 2$$

$$\text{យើងបាន } \begin{cases} y_1 = m \cos \theta_1 & (k = 0) \\ y_2 = m \cos \theta_2 & (k = 1) \\ y_3 = m \cos \theta_3 & (k = 2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (*) \text{ មានឫស } \begin{cases} x_1 = y_1 - \frac{b}{3a} \\ x_2 = y_2 - \frac{b}{3a} \\ x_3 = y_3 - \frac{b}{3a} \end{cases}$$

**លំហាត់គំរូទី១:** ដោះស្រាយសមីការ  $x^3 + 24x - 16 = 0$

**ចំណោះស្រាយ**

យើងមានសមីការ  $x^3 + 24x - 16 = 0$

$$p = 24, q = -16$$

$$\Delta = \left(\frac{24}{3}\right)^3 + \left(\frac{-16}{2}\right)^2 = 576 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{576} = 24$$

នោះ សមីការមានឫសជាចំនួនពិតតែមួយគត់ គឺ

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} \\ &= \sqrt[3]{-\frac{-16}{2} + 24} + \sqrt[3]{-\frac{-16}{2} - 24} \\ &= \sqrt[3]{32} - \sqrt[3]{16} \\ &= 2\sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{2} \end{aligned}$$

ដូចនេះ សមីការមានឫស  $x = 2\sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{2}$

ហើយឫសពីរទៀតជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គឺ  $x = -(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}) \pm i\sqrt{6\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{4} + 12}$

**លំហាត់ទី២៖** ដោះស្រាយសមីការ  $x^3 - 6x^2 + 6x + 4 + 4\sqrt{2} = 0$

**ចំណោះស្រាយ**

យើងមានសមីការ  $x^3 - 6x^2 + 6x + 4 + 4\sqrt{2} = 0$  (\*)

$$\text{តាង } x = y - \frac{b}{3a} = y + 2$$

នោះ (\*) យើងបាន  $(y+2)^3 - 6(y+2)^2 + 6(y+2) + 4 + 4\sqrt{2} = 0$

$$\Leftrightarrow y^3 - 6y + 4\sqrt{2} = 0 \quad (**)$$

$$\Delta = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = \left(\frac{-6}{3}\right)^3 + \left(\frac{4\sqrt{2}}{2}\right)^2 = -8 + 8 = 0$$

នោះសមីការ (\*\*) មានឫសពីរស្មើគ្នា គឺ  $y_1 = y_2 = \sqrt{-\frac{p}{3}} = \sqrt{-\frac{-6}{3}} = \sqrt{2}$

យើងបាន (\*\*):  $y^3 - 6y + 4\sqrt{2} = (y - \sqrt{2})^2(y + \alpha)$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{4\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{2}$$

នោះសមីការ (\*\*) ទៅជា  $(y - \sqrt{2})^2 (y + 2\sqrt{2}) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = y_2 = \sqrt{2} \\ y_3 = -2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\bullet y_1 = y_2 = \sqrt{2} \Rightarrow x_1 = x_2 = \sqrt{2} + 2$$

$$\bullet y_3 = -2\sqrt{2} \Rightarrow x_3 = -2\sqrt{2} + 2$$

ដូចនេះ សមីការមានឫស  $x_1 = x_2 = \sqrt{2} + 2, x_3 = -2\sqrt{2} + 2$

**លំហាត់ទី៣:** ដោះស្រាយសមីការ  $x^3 - 3x + \sqrt{3} = 0$

### ចំណោះស្រាយ

យើងមានសមីការ  $x^3 - 3x + \sqrt{3} = 0$

$$\Delta = \left(\frac{-3}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4} < 0$$

នោះសមីការមានឫស បីផ្សេងគ្នា

តាង  $x = m \cos \theta$  ដែល  $m = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} = 2\sqrt{-\frac{-3}{3}} = 2$

$$\cos 3\theta = \frac{3q}{pm} = \frac{3\sqrt{3}}{3 \cdot 2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos 3\theta = \cos \frac{5\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow 3\theta = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$$

$$\bullet k=0 \Rightarrow \theta_1 = \frac{5\pi}{18} \Rightarrow x_1 = 2 \cos\left(\frac{5\pi}{18}\right)$$

$$\bullet k=1 \Rightarrow \theta_2 = \frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi}{3} = \frac{17\pi}{18}$$

$$\Rightarrow x_2 = 2 \cos\left(\frac{17\pi}{18}\right) = 2 \cos\left(\pi - \frac{\pi}{18}\right) = -2 \cos \frac{\pi}{18}$$

$$\bullet k=2 \Rightarrow \theta_3 = \frac{5\pi}{18} + \frac{4\pi}{3} = \frac{29\pi}{18}$$

$$\Rightarrow x_3 = 2 \cos\left(\frac{29\pi}{18}\right) = 2 \cos\left(2\pi - \frac{7\pi}{18}\right) = 2 \cos \frac{7\pi}{18}$$

ដូចនេះ សមីការមានឫសៈ

$$x_1 = 2 \cos\left(\frac{5\pi}{18}\right), x_2 = -2 \cos\left(\frac{\pi}{18}\right), x_3 = 2 \cos\left(\frac{7\pi}{18}\right)$$

### លំហាត់អនុវត្តទី

ដោះស្រាយសមីការដឺក្រេទី៣ខាងក្រោមៈ

$$\text{ក. } y^3 - 18y + 35 = 0$$

$$\text{ខ. } x^3 + 6x^2 + 3x + 18 = 0$$

$$\text{គ. } y^3 - 2y + 4 = 0$$

$$\text{ឃ. } 28x^3 + 9x^2 - 1 = 0$$

$$\text{ង. } y^3 - 15y + 4 = 0$$

$$\text{ច. } y^3 - 2y - 1 = 0$$

$$\text{ឆ. } y^3 - 7y + 7 = 0$$

$$\text{ជ. } x^3 + 3x^2 - 2x - 5 = 0$$

$$\text{ណ. } x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\text{ញ. } x^3 + 4x^2 - 7 = 0$$

$$\text{ដ. } x^3 + 3x^2 + 4x + 5 = 0$$

$$\text{ប. } x^3 + 4x^2 + 2x + 5 = 0$$

$$\text{ឡ. } x^3 - 6x + 4\sqrt{2} = 0 \quad \text{ឈ. } 72x^3 - 108x^2 - 18x + 27 + 8\sqrt{6} = 0$$

## គន្លឹះដោះស្រាយ

## សមីការដឺក្រេទី៤

## I. និយមន័យ

សមីការដឺក្រេទី៤ មានមួយអញ្ញាត ជាសមីការដែលមានរាងដូច្នេះទៅ  
 $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$  ( $a \neq 0$ ) ដែល  $a, b, c, d$  និង  $e$   
 ជាមេគុណ ហើយ  $x$  ជាអញ្ញាត។

## II. វិធីសាស្ត្រដោះស្រាយសមីការដឺក្រេទី៤

១. ដោះស្រាយសមីការមានរាង:  $Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 \pm Bx + A = 0$   
 (សមីការឆ្លុះ)

របៀបដោះស្រាយ:

ចែកអង្គទាំងពីរនៃសមីការនឹង  $x^2 \neq 0$  ( $x = 0$  មិនមែនជាឫស)

យើងបាន  $Ax^2 + Bx + C \pm \frac{B}{x} + \frac{A}{x^2} = 0$

$$A\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + B\left(x \pm \frac{1}{x}\right) + C = 0$$

តាង  $t = x \pm \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 \mp 2$

នោះសមីការទៅជា  $A(t^2 \mp 2) + Bt + C = 0$

$$\Leftrightarrow At^2 + Bt + C \mp 2A = 0$$

ជាសមីការដែលអាចដោះស្រាយបាន។

**Remark:** បើសមីការមានរាង  $Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 \pm nBx + n^2A = 0$

ចែកអង្គទាំងពីរនៃសមីការនឹង  $x^2 \neq 0$  ( $x = 0$  មិនមែនជាឫស)

$$\text{រួចតាង } t = x \pm \frac{n}{x}$$

លំហាត់: ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម:

ក.  $3x^4 - 4x^3 - 14x^2 - 4x + 3 = 0$

ខ.  $5x^4 - 16x^3 - 42x^2 - 16x + 5 = 0$

គ.  $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$

ឃ.  $63x^4 - 1024x^3 + 4226x^2 - 1024x + 63 = 0$

ង.  $4x^4 + 17x^3 + 8x^2 + 17x + 4 = 0$

ច.  $6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$

**២. ដោះស្រាយសមីការមានរាង  $ax^4 + bx^2 + c = 0$  (សមីការមីកាអេ)**

**របៀបដោះស្រាយ:**

តាង  $t = x^2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{t}$  នោះសមីការទៅជា  $at^2 + bt + c = 0$

លំហាត់: ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម:

ក.  $4x^4 - 109x^2 + 225 = 0$

ខ.  $3x^4 - 22x^2 - 45 = 0$

គ.  $x^4 + 17x^2 + 52 = 0$

ឃ.  $2x^4 - x^2 - 1 = 0$

ឃ.  $2x^4 - 5x^2 + 2 = 0$

ង.  $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$

**៣. ដោះស្រាយសមីការមានរាង  $(x + a)^4 + (x + b)^4 = c$** **របៀបដោះស្រាយ:**

តាង  $t = x + \frac{a+b}{2}$  ឬ  $x = t - \frac{a+b}{2}$  ជំនួសក្នុងសមីការខាងលើ យើងបាន:

$$\left(t - \frac{a+b}{2} + a\right)^4 + \left(t - \frac{a+b}{2} + b\right)^4 = c$$

$$\Leftrightarrow \left(t + \frac{a-b}{2}\right)^4 + \left(t - \frac{a-b}{2}\right)^4 = c$$

ពន្លាតសមីការខាងលើដោយប្រើរូបមន្ត  $(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$

នោះសមីការមានរាង  $at^4 + bt^2 + c = 0$  ជារាងដែលអាចដោះស្រាយបាន។

លំហាត់: ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម:

ក.  $(x+4)^4 + (x+6)^4 = 64$     ខ.  $(x-4.5)^4 + (x-5.5)^4 = 1$

គ.  $x^4 + (x-1)^4 = 97$     ឃ.  $(x-3)^4 + (x-2)^4 = (2x-5)^4$

**៤. ដោះស្រាយសមីការមានរាង  $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = k$** 

**$(k \neq 0)$  ហើយដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ  $a + d = b + c = p$**

**• របៀបដោះស្រាយ**

ផ្គុំ  $(x+a)(x+d)(x+b)(x+c) = k$  រួចគុណពន្លាត

យើងបាន  $[x^2 + (a+d)x + ad][x^2 + (b+c)x + bc] = k$

តាង  $t = x^2 + px$  ដែល  $p = a + d = b + c$

នោះសមីការទៅជា  $(t + ad)(t + bc) = k$

ជាសមីការដែលអាចដោះស្រាយបាន។

លំហាត់៖ ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម៖

$$\text{ក. } (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 3$$

$$\text{ខ. } (x+4)(x+5)(x+7)(x+8) = 4$$

$$\text{គ. } (x-1)(x-3)(x-5)(x-7) = 105$$

$$\text{ឃ. } (x-1)(x-3)(x+4)(x+7) = 297$$

### ៥. សមីការទូទៅ $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$

រកឫសងាយនៃសមីការ គឺជាតួចែកដាច់នៃ  $e$  ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការនេះ

លំហាត់៖ ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម

$$\text{ក. } 3x^4 - 7x^3 - 33x^2 - 33x - 10 = 0$$

$$\text{ខ. } 4x^4 - 13x^3 - 13x^2 - 4x + 12 = 0$$

$$\text{គ. } x^4 - 9x^3 + 18x^2 - x - 9 = 0$$

$$\text{ឃ. } 2x^4 + 5x^3 - 51x^2 + 80x - 28 = 0$$

### ៦. ដោះស្រាយសមីការដឺក្រេទី៤តាមវិធីសាស្ត្រ Ferrari

$$\text{សមីការ } ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 \quad (*)$$

$$\text{តាង } x = y - \frac{b}{4a} \text{ រួចយកទៅជំនួសក្នុង } (*)$$

យើងបាន

$$a\left(y - \frac{b}{4a}\right)^4 + b\left(y - \frac{b}{4a}\right)^3 + c\left(y - \frac{b}{4a}\right)^2 + d\left(y - \frac{b}{4a}\right) + e = 0$$

$$ay^4 + \left(\frac{-3b^2}{8a} + c\right)y^2 + \left(\frac{b^2}{8a^2} - \frac{bc}{2a} + d\right)y + \left(\frac{-3b^4}{256a^3} + \frac{b^2c}{16a^2} - \frac{bd}{4a}\right) + e = 0$$

ចែកអង្គទាំងពីរនៃសមីការនឹង  $a$

$$\text{នោះសមីការមានរាង } y^4 + Ay^2 + By + C = 0$$

ដោះស្រាយសមីការ  $y^4 + Ay^2 + By + C = 0$

$$y^4 + C = -Ay^2 - By$$

$$(y^2)^2 + \sqrt{C}^2 = -Ay^2 - By$$

$$(y^2 + \sqrt{C})^2 - 2\sqrt{C}y^2 = -Ay^2 - By$$

$$(y^2 + \sqrt{C})^2 = (2\sqrt{C} - A)y^2 - By$$

$$(y^2 + \sqrt{C})^2 + 2(y^2 + \sqrt{C}) \cdot z + z^2 = (2\sqrt{C} - A)y^2 - By + 2(y^2 + \sqrt{C}) \cdot z + z^2$$

$$(y^2 + \sqrt{C} + z)^2 = (2\sqrt{C} - A + 2z)y^2 - By + (2\sqrt{C}z + z^2) \quad (**)$$

រកតម្លៃ  $z$  ដើម្បីឱ្យ  $(2\sqrt{C} - A + 2z)y^2 - By + (2\sqrt{C}z + z^2)$  ជាការេទ្វេធា គឺ សមីការ  $(2\sqrt{C} - A + 2z)y^2 - By + (2\sqrt{C}z + z^2) = 0$  មានឫសឌុប

$$(2\sqrt{C} - A + 2z)y^2 - By + (2\sqrt{C}z + z^2) = 0$$

$$\Delta = (-B)^2 - 4(2\sqrt{C} - A + 2z)(2\sqrt{C}z + z^2)$$

សមីការមានឫសឌុបកាលណា  $\Delta = 0$

$$\Leftrightarrow (-B)^2 - 4(2\sqrt{C} - A + 2z)(2\sqrt{C}z + z^2) = 0$$

ដោះស្រាយរកតម្លៃ  $z$  រួចជំនួសក្នុង  $(**)$

យើងបាន  $(**)$  មានរាង  $(y^2 + k)^2 = (my + n)^2$  ដែល  $k, m, n$  ជាចំនួនពិត កំណត់បានដោយការជំនួសតម្លៃ  $z$

$$\text{នោះ } y^2 + k = \pm(my + n) \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + k = my + n \\ y^2 + k = -(my + n) \end{cases}$$

ដោះស្រាយសមីការទាំងពីររកតម្លៃ  $y$  រួចយកទៅជំនួសដើម្បីរក  $x$  ។

**លំហាត់គំរូ :** ដោះស្រាយសមីការ

$$x^4 + 8x^3 + 12x^2 + (2\sqrt{30} - 16)x + (4\sqrt{30} - 28) = 0 \quad (1)$$

**ចំណោះស្រាយ**

$$\text{តាង } x = y - 2 \quad (2) \text{ ជំនួសក្នុង (1)}$$

$$\text{យើងបាន សមីការទៅជា } y^4 - 12y^2 + 2\sqrt{30}y + 4 = 0$$

$$y^4 + 4 = 12y^2 - 2\sqrt{30}y$$

$$(y^2)^2 + 2^2 = 12y^2 - 2\sqrt{30}y$$

$$(y^2 + 2)^2 - 4y^2 = 12y^2 - 2\sqrt{30}y$$

$$(y^2 + 2)^2 + 2(y^2 + 2) \cdot z + z^2 = 12y^2 - 2\sqrt{30}y + 4y^2 + 2(y^2 + 2) \cdot z + z^2$$

$$(y^2 + 2 + z)^2 = (16 + 2z)y^2 - 2\sqrt{30}y + (z^2 + 4z) \quad (3)$$

រក  $z$  ដែល  $(16 + 2z)y^2 - 2\sqrt{30}y + (z^2 + 4z) = 0$  មានឫសឌុប

$$\Delta' = (-\sqrt{30})^2 - (16 + 2z)(z^2 + 4z)$$

$$= 30 - 16z^2 - 64z - 2z^3 - 8z^2$$

$$= -2z^3 - 24z^2 - 64z + 30$$

$$\Delta' = 0 \Leftrightarrow -2z^3 - 24z^2 - 64z + 30 = 0$$

$$\Leftrightarrow z^3 + 12z^2 + 32z - 15 = 0$$

ដោយ  $-15$  មានតួចែកដាច់  $\{-15, -5, -3, 1, 3, 5, 15\}$

ហើយ បើ  $z = -5$

$$\text{នោះ } (-5)^3 + 12(-5)^2 + 32(-5) - 15 = 0 \text{ ពិត}$$

$$\text{នោះ } z_1 = -5 \text{ ជាឫសមួយនៃសមីការ } z^3 + 12z^2 + 32z - 15 = 0$$

តាម (3) យើងបាន

$$(y^2 + 2 - 5)^2 = (16 - 10)y^2 - 2\sqrt{30}y + (25 - 20)$$

$$(y^2 - 3)^2 = 6y^2 - 2\sqrt{30}y + 5$$

$$(y^2 - 3)^2 = (\sqrt{6}y - \sqrt{5})^2$$

$$y^2 - 3 = \pm(\sqrt{6}y - \sqrt{5})$$

$$\bullet y^2 - 3 = \sqrt{6}y - \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow y^2 - \sqrt{6}y + (\sqrt{5} - 3) = 0$$

$$\Delta = (-\sqrt{6})^2 - 4(\sqrt{5} - 3)$$

$$= 6 - 4\sqrt{5} + 12$$

$$= 18 - 4\sqrt{5} > 0$$

$$\Rightarrow y_{1,2} = \frac{\sqrt{6} \pm \sqrt{18 - 4\sqrt{5}}}{2}$$

$$\bullet y^2 - 3 = -(\sqrt{6}y - \sqrt{5})$$

$$\Leftrightarrow y^2 + \sqrt{6}y + (-\sqrt{5} - 3) = 0$$

$$\Delta = 6 - 4(-\sqrt{5} - 3) = 18 + 4\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow y_{3,4} = \frac{-\sqrt{6} \pm \sqrt{18 + 4\sqrt{5}}}{2}$$

យកតម្លៃ  $y$  ជំនួសក្នុងសមីការ (2) :  $x = y - 2$

យើងបាន

$$x_{1,2} = \frac{\sqrt{6} \pm \sqrt{18 - 4\sqrt{5}}}{2} - 2, \quad x_{3,4} = \frac{-\sqrt{6} \pm \sqrt{18 + 4\sqrt{5}}}{2} - 2$$

ដូចនេះ សមីការមានឫស

$$x_{1,2} = \frac{\sqrt{6} \pm \sqrt{18 - 4\sqrt{5}}}{2} - 2, \quad x_{3,4} = \frac{-\sqrt{6} \pm \sqrt{18 + 4\sqrt{5}}}{2} - 2$$

**ចំណាត់:** ដោះស្រាយសមីការ  $2^{x^2} \cdot 2^{\sqrt{x+5}} = (\sqrt[3]{64})^{\frac{5}{2}}$

**ចំណោះស្រាយ**

$$\text{យើងមាន } 2^{x^2} \cdot 2^{\sqrt{x+5}} = (\sqrt[3]{64})^{\frac{5}{2}}$$

$$2^{x^2 + \sqrt{x+5}} = 2^5$$

$$x^2 + \sqrt{x+5} = 5$$

$$\sqrt{x+5} = 5 - x^2 \quad (1)$$

សក្ខខណ្ឌ សមីការមានឫសកាលណា  $5 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x \in [-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$

$$\text{លើ (1) ជាការយើងបាន } (\sqrt{x+5})^2 = (5-x^2)^2$$

$$(5-x^2)^2 = x+5$$

$$(5-x^2)^2 + 2(5-x^2) \cdot z + z^2 = x+5 + 2(5-x^2) \cdot z + z^2$$

$$(5-x^2+z)^2 = -2zx^2 + x + (z^2+10z+5) \quad (2)$$

រកតម្លៃ  $z$  ដើម្បីឱ្យ  $-2zx^2 + x + (z^2+10z+5)$  ជាការេនៃទ្វេធា

គឺរកតម្លៃ  $z$  ដើម្បីឱ្យ សមីការ  $-2zx^2 + x + (z^2+10z+5) = 0$  មានឫសឌុប

$$-2zx^2 + x + (z^2+10z+5) = 0$$

$$\Delta = 1 + 8z(z^2+10z+5) = 8z^3 + 80z^2 + 40z + 1$$

សមីការ  $-2zx^2 + x + (z^2+10z+5) = 0$  មានឫសឌុប កាលណា  $\Delta = 0$

$$\Rightarrow 8z^3 + 80z^2 + 40z + 1 = 0$$

$$\text{តាង } z = \frac{t}{2} \text{ យើងបាន } 8\left(\frac{t}{2}\right)^3 + 80\left(\frac{t}{2}\right)^2 + 40\left(\frac{t}{2}\right) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^3 + 20t^2 + 20t + 1 = 0$$

$$\text{ដោយ } a - b + c - d = 1 - 20 + 20 - 1 = 0$$

$$\text{នោះ } t_1 = -1 \text{ ជាឫសមួយនៃសមីការ } t^3 + 20t^2 + 20t + 1 = 0$$

$$\text{យើងបាន } z = \frac{t}{2} = -\frac{1}{2} \text{ ជាឫសមួយនៃសមីការ } 8z^3 + 80z^2 + 40z + 1 = 0$$

តាម (2) យើងបាន

$$(5-x^2-\frac{1}{2})^2 = -2\left(-\frac{1}{2}\right)x^2 + x + \left(\frac{1}{4}+10\left(-\frac{1}{2}\right)+5\right)$$

$$\left(\frac{9}{2} - x^2\right)^2 = x^2 + x + \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$\frac{9}{2} - x^2 = \pm\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

$$\left[\frac{9}{2} - x^2 = x + \frac{1}{2}\right.$$

$$\left.\frac{9}{2} - x^2 = -x - \frac{1}{2}\right]$$

$$\left[x^2 + x - 4 = 0\right.$$

$$\left.x^2 - x - 5 = 0\right]$$

$$\left[\Delta_1 = 1 + 16 = 17 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}\right.$$

$$\left.\Delta_2 = 1 + 20 = 21 \Rightarrow x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}\right]$$

$$\text{ដោយ } x \in [-\sqrt{5}, \sqrt{5}] \text{ នោះ } \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \notin [-\sqrt{5}, \sqrt{5}] \text{ និង}$$

$$\frac{1 + \sqrt{21}}{2} \notin [-\sqrt{5}, \sqrt{5}] \text{ មិនយក}$$

$$\text{ដូចនេះ សមីការមានឫស } \boxed{x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}, \frac{1 - \sqrt{21}}{2}}$$

$$\text{លំហាត់ : ដោះស្រាយសមីការ } x^4 + 2x^2 + 6\sqrt{10}x + 1 = 0$$

ក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច

$$\text{ចម្លើយ } x = \frac{-\sqrt{6} \pm \sqrt{2(-5 + 2\sqrt{15})}}{2}, \frac{\sqrt{6} \pm i\sqrt{2(5 + 2\sqrt{15})}}{2}$$