

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សឆ្នាំប្រចាំស្រុកសម្រាប់ឆ្នាំទី ៩ និង ទី១២

ឈ្មោះ និង ហត្ថលេខាអនុក្ស សម័យប្រឡងថ្ងៃទី ១៥ ខែកុម្ភៈ ឆ្នាំ ២០១៥ ទីស្នាក់ការកណ្តាល: វិទ្យាល័យកំពង់ត្របែក

១..... នាមត្រកូល និង នាមខ្លួន:.....ភេទ:.....

លេខសម្ងាត់:.....

២..... ថ្ងៃ ខែ ឆ្នាំកំណើត:.....

មកពី:..... ហត្ថលេខា:.....

*បេក្ខជនមិនត្រូវធ្វើសញ្ញាសម្គាល់អ្វីមួយលើសន្លឹកប្រឡងឡើយ ។ សន្លឹកប្រឡងណាដែលមានសញ្ញាសម្គាល់ត្រូវបានពិន្យសូន្យ ។

ទិញសា: គណៈកម្មាធិការ ឆ្នាំទី ១២ រយៈពេល: ១២០ នាទី ពិន្ទុ: ១០០ ✓

លេខសម្ងាត់:.....

សេចក្តីណែនាំ:

ពិន្ទុសរុប

១. បេក្ខជនត្រូវបត់ក្រដាសនេះគ្រងសញ្ញា X.....ខាងលើ រួចគូសខ្វែងផ្នែកខាងលើនៃទំព័រទី២ ដោយប៉ិនប្រសប់ផ្នែកខាងលើនៃទំព័រទី១ដែលនឹងត្រូវកាត់ចេញ ។ ហាមសរសេរឡើយលើកន្លែងគូសខ្វែងនោះ ។
បេក្ខជនត្រូវគូសបន្ទាត់បញ្ឈរដោយចំពាក់កណ្តាលទំព័រទី២ ទី៣ និង ទី៤ សម្រាប់សរសេរឡើយ ។

I (ពិន្ទុ១៥) ក) ប្រៀបធៀបចំនួន $(2015!)^2$ និង $(2015)^{2015}$ ។

ខ) ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ស្រាយបញ្ជាក់ថា $n^5 - n$ ជាពហុគុណនៃ 30 ។

II (ពិន្ទុ១៥) រកតម្លៃតូចបំផុត និង តម្លៃធំបំផុតនៃអនុគមន៍ $f(x) = \sin^4 x - \sin x \cos x + \cos^4 x$ ។

III (ពិន្ទុ១៥) ក) បង្ហាញថា $3333^{5555} + 5555^{3333}$ ចែកដាច់នឹង 4 ។

ខ) គេដឹងថាចំនួន m ចែកនឹង 2015 បានសំណល់ 5 ហើយ ចំនួន n ចែកនឹង 2015 បានសំណល់ 20 ។

កំណត់សំណល់វិធីចែកបែបអឺគ្លីតនៃ $(mn + n^2 + 1514)$ នឹង 2015 ។

IV (ពិន្ទុ២០) ដោះស្រាយប្រពន្ធសមីការ :

$$\begin{cases} \sqrt{3x} \left(1 + \frac{1}{x+y} \right) = 2 \\ \sqrt{7y} \left(1 - \frac{1}{x+y} \right) = 4\sqrt{2} \end{cases}$$

V (ពិន្ទុ ១៥) រកគ្រប់អនុគមន៍នៃចំនួនពិត $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ:

$$f(xy) = \frac{f(x) + f(y)}{x+y} \text{ ដែល } x, y \in \mathbb{R}, x+y \neq 0$$

VI (ពិន្ទុ ២០) កន្លះបន្ទាត់ពុះក្នុងនៃមុំ $\angle A, \angle B$ និង $\angle C$ នៃត្រីកោណ ABC កាត់រួងចារឹកក្រៅ

ត្រីកោណ ABC ត្រង់ចំនុច P, Q និង R រៀងគ្នា ។ បង្ហាញថា $AP + BQ + CR > BC + CA + AB$ ។

ដំណោះស្រាយ

I. ក. ប្រៀបធៀបចំនួន $(2015!)^2$ និង $(2015)^{2015}$

យើងដឹងថា $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$

នោះ $2015! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 2015$

$$\begin{aligned} \text{នាំឱ្យ } (2015!)^2 &= (1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 2014 \times 2015)^2 \\ &= (1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 2014 \times 2015) \times (2015 \times 2014 \times 2013 \times \dots \times 2 \times 1) \\ &= (1 \times 2015) \times (2 \times 2014) \times (3 \times 2013) \times \dots \times (2014 \times 2) \times (2015 \times 1) \end{aligned}$$

ដោយ $n(2016-n) \geq 2015$ ចំពោះ $n \in [1, 2015]$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 \times 2015 \geq 2015 \\ 2 \times 2014 > 2015 \\ 3 \times 2013 > 2015 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ 2014 \times 2 > 2015 \\ 2015 \times 1 \geq 2015 \end{cases}$$

គុណអង្គ និង អង្គ យើងបាន:

$$\begin{aligned} (1 \times 2015) \times (2 \times 2014) \times (3 \times 2013) \times \dots \times (2014 \times 2) \times (2015 \times 1) &> 2015^{2015} \\ \Rightarrow (2015!)^2 &> 2015^{2015} \end{aligned}$$

ដូច្នេះ $(2015!)^2 > 2015^{2015}$

ខ. ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$n^5 - n$ ជាពហុគុណនៃ 30

តាង $P(n) = n^5 - n$

$$= n(n^4 - 1) = n(n-1)(n+1)(n^2 + 1)$$

ដោយ $(5, 6) = 1$ ហើយ $30 = 5 \times 6$

នោះ $P(n)$ ជាពហុគុណនៃ 30 កាលណា $P(n)$

ជាពហុគុណនៃ 5 ផង ហើយជាពហុគុណនៃ 6 ផង។ (1)

❖ ស្រាយថា $P(n)$ ជាពហុគុណនៃ 6

ដោយ $n(n-1)$ ជាផលគុណនៃពីរចំនួនគត់តា

នោះវាជាពហុគុណនៃ 2

ហើយ $n(n-1)(n+1)$ ជាផលគុណនៃបីចំនួន

គត់តា នោះវាជាពហុគុណនៃ 3

នោះ $P(n)$ ជាពហុគុណនៃ 2 ផង និងជាពហុគុណនៃ 3 ផង

$\Rightarrow P(n)$ ជាពហុគុណនៃ 6 (1)

❖ ស្រាយថា $P(n)$ ជាពហុគុណនៃ 5

យើងមាន $P(n) = n(n-1)(n+1)(n^2 + 1)$

➤ បើ $n = 5k, k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \text{នោះ } P(n) &= 5k(5k-1)(5k+1)(25k^2 + 1) \\ &= 5A, A \in \mathbb{N} \text{ ជាពហុគុណនៃ 5} \quad (2) \end{aligned}$$

➤ បើ $n = 5k+1, k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \text{នោះ } P(n) &= (5k+1)(5k)(5k+2)[(5k+1)^2 + 1] \\ &= 5B, B \in \mathbb{N} \text{ ជាពហុគុណនៃ 5} \quad (3) \end{aligned}$$

➤ បើ $n = 5k+2, k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \text{នោះ } P(n) &= (5k+2)(5k+1)(5k+3)[(5k+2)^2 + 1] \\ &= (5k+2)(5k+1)(5k+3)(25k^2 + 20k + 5) \\ &= 5(5k+2)(5k+1)(5k+3)(5k^2 + 4k + 1) \\ &= 5C, C \in \mathbb{N} \text{ ជាពហុគុណនៃ 5} \quad (4) \end{aligned}$$

➤ បើ $n = 5k+3, k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \text{នោះ } P(n) &= (5k+3)(5k+2)(5k+4)[(5k+3)^2 + 1] \\ &= (5k+3)(5k+2)(5k+4)(25k^2 + 30k + 10) \\ &= 5(5k+3)(5k+2)(5k+4)(5k^2 + 6k + 2) \\ &= 5D, D \in \mathbb{N} \text{ ជាពហុគុណនៃ 5} \quad (5) \end{aligned}$$

➤ បើ $n = 5k+4, k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \text{នោះ } P(n) &= (5k+4)(5k+3)(5k+5)[(5k+4)^2 + 1] \\ &= 5(5k+4)(5k+3)(k+1)[(5k+4)^2 + 1] \\ &= 5E, E \in \mathbb{N} \text{ ជាពហុគុណនៃ 5} \quad (6) \end{aligned}$$

តាម (2), (3), (4), (5) និង (6)

នាំឱ្យ $P(n)$ ជាពហុគុណនៃ 5 (8)

តាម (1) និង (8)

ដូច្នេះ $n^5 - n$ ជាពហុគុណនៃ 30

II. រកតម្លៃតូចបំផុត និង ធំបំផុតនៃអនុគមន៍ $f(x)$

របៀបទី១

$$\begin{aligned} \text{យើងមាន } f(x) &= \sin^4 x - \sin x \cos x + \cos^4 x \\ &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x - \sin x \cos x \\ &= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x - \frac{1}{2}\sin 2x \\ &= -\frac{1}{2}(\sin^2 2x + \sin 2x - 2) \\ &= \frac{9}{8} - \frac{1}{2}\left(\sin 2x + \frac{1}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

➤ រកតម្លៃតូចបំផុត

$$\text{ដោយ } \sin 2x \leq 1 \Rightarrow \left(\sin 2x + \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{9}{4}$$

ដូច្នេះ តូចបំផុតគឺ $f_{\min} = 0$

➤ រកតម្លៃធំបំផុត

$$\text{ដោយ } \left(\sin 2x + \frac{1}{4}\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\left(\sin 2x + \frac{1}{4}\right)^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{9}{8} - \frac{1}{2}\left(\sin 2x + \frac{1}{2}\right) \leq 0$$

ដូច្នេះ តម្លៃធំបំផុតគឺ $f_{\max} = \frac{9}{8}$

របៀបទី២

$$\begin{aligned} \text{យើងមាន } f(x) &= \sin^4 x - \sin x \cos x + \cos^4 x \\ &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x - \sin x \cos x \\ &= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x - \frac{1}{2}\sin 2x \end{aligned}$$

តាង $t = \sin 2x$, $-1 \leq t \leq 1$

$$\begin{aligned} \text{យើងបាន } f(x) &= g(t) = 1 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}t^2 \\ &= -\frac{1}{2}(t^2 + t - 2) \\ &= -\frac{1}{2}\left[\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{8}\right] \\ &= \frac{9}{8} - \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ដោយ } -\frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 &\leq 0, \forall t \in [-1, 1] \\ \Rightarrow \frac{9}{8} - \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 &\leq \frac{9}{8} \\ \Rightarrow g(t) &\leq \frac{9}{8} \end{aligned}$$

នោះ តម្លៃធំបំផុតនៃ $g(t)$ គឺ $\frac{9}{8} \Rightarrow f_{\max}(x) = \frac{9}{8}$

ម្យ៉ាងទៀត ដោយ $t \leq 1$ នោះ $\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 \leq \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 \geq -\frac{9}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{9}{8} - \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$$

នោះ តម្លៃតូចបំផុតនៃ $g(t)$ គឺ $0 \Rightarrow f_{\min}(x) = 0$

ដូច្នេះ តម្លៃតូចបំផុត និង ធំបំផុតនៃ $f(x)$ គឺ:

$$f_{\min} = 0, \quad f_{\max} = \frac{9}{8}$$

របៀបទី៣

យើងមាន $f(x) = \sin^4 x - \sin x \cos x + \cos^4 x$

$$\begin{aligned} &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x - \sin x \cos x \\ &= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x - \frac{1}{2}\sin 2x \end{aligned}$$

តាង $t = \sin 2x$, $-1 \leq t \leq 1$

យើងបាន $f(x) = g(t) = 1 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}t^2$

$$\Rightarrow g'(t) = -\frac{1}{2} - t$$

$$\bullet \quad g'(t) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} - t = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}$$

ហើយ $-1 \leq t \leq 1$ នោះ

$$\bullet \quad g(-1) = 1 - \frac{1}{2}(-1) - \frac{1}{2}(-1)^2 = 1$$

$$\bullet \quad g\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{8}$$

$$\bullet \quad g(1) = 1 - \frac{1}{2}(1) - \frac{1}{2}(1)^2 = 0$$

t	-1	$-\frac{1}{2}$	1
$g'(t)$	+	0	-
	1	$\frac{9}{8}$	0

តាមតារាងអថេរភាព យើងឃើញថា:

អនុគមន៍ g កើនលើចន្លោះ $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$

អនុគមន៍ g ចុះលើចន្លោះ $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$

ហើយ $g_{\min}(t) = 0$ និង $g_{\max}(t) = \frac{9}{8}$

ដូច្នេះ តម្លៃតូចបំផុត និង ធំបំផុតនៃ $f(x)$ គឺ:

$$f_{\min} = 0, \quad f_{\max} = \frac{9}{8}$$

III.ក. បង្ហាញថា $3333^{5555} + 5555^{3333}$ ចែកដាច់នឹង 4

យើងមាន $3333 \equiv 1 \pmod{4}$

$$\Rightarrow 3333^{5555} \equiv 1^{5555} \equiv 1 \pmod{4}$$

ហើយ $5555 \equiv 3 \equiv -1 \pmod{4}$

$$\Rightarrow 5555^{3333} \equiv (-1)^{3333} \equiv -1 \pmod{4}$$

យើងបាន $3333^{5555} + 5555^{3333} \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod{4}$

ដូច្នេះ $3333^{5555} + 5555^{3333}$ ចែកដាច់នឹង 4

របៀបទី២

$$\begin{aligned} 3333^{5555} + 5555^{3333} &= (3333^{5555} - 1) + (5555^{3333} + 1) \\ &= (3333 - 1) \cdot M + (5555 + 1) \cdot N, \quad M, N \in \mathbb{N} \\ &= 3332M + 5556N \\ &= 4(833M + 1389N) \\ &= 4 \cdot Q, \quad Q = (833M + 1389N) \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

ដូច្នេះ $3333^{5555} + 5555^{3333}$ ចែកដាច់នឹង 4

ខ. កំណត់សំណល់វិធីចែកបែបអឺគ្លីតនៃ

$$(mn + n^2 + 1514) \text{ នឹង } 2015$$

គេដឹងថាចំនួន m ចែកដាច់នឹង 2015 បានសំណល់ 5

ហើយចំនួន n ចែកនឹង 2015 បានសំណល់ 20

$$\text{នោះ } \begin{cases} m = 2015p + 5 \\ n = 2015q + 20 \end{cases}, \quad (m, n \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow mn = (2015p + 5)(2015q + 20)$$

$$= (2015)^2 pq + 2015 \cdot 20p + 2015 \cdot 5q + 100$$

$$\text{និង } n^2 = (2015q + 20)^2 = (2015)^2 q^2 + 2015 \cdot 40q + 400$$

យើងបាន :

$$mn + n^2 + 1514 = (2015)^2 pq + 2015 \cdot 20p + 2015 \cdot 5q + 100$$

$$+ (2015)^2 q^2 + 2015 \cdot 40q + 400 + 1514$$

$$= 2015(2015pq + 20p + 5q + 2015q^2 + 40q) + 2014$$

$$= 2015r + 2014$$

$$\text{ដែល } r = 2015pq + 20p + 5q + 2015q^2 + 40q \in \mathbb{N}$$

ដូច្នេះ $mn + n^2 + 1514$ ចែកបែបអឺគ្លីតនៃ $(mn + n^2 + 1514)$ នឹង 2015 គឺ 2014

របៀបទី២ តាម Congruence modulo

គេដឹងថាចំនួន m ចែកដាច់នឹង 2015 បានសំណល់ 5

ហើយចំនួន n ចែកនឹង 2015 បានសំណល់ 20

$$\text{នោះ } \begin{cases} m = 2015p + 5 \\ n = 2015q + 20 \end{cases}, \quad (m, n \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m \equiv 5 \pmod{2015} \\ n \equiv 20 \pmod{2015} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} mn \equiv 5 \cdot 20 \equiv 100 \pmod{2015} \\ n^2 \equiv 20^2 \equiv 400 \pmod{2015} \end{cases}$$

យើងបាន:

$$mn + n^2 + 1514 \equiv 100 + 400 + 1514 \pmod{2015}$$

$$\Rightarrow mn + n^2 + 1514 \equiv 2014 \pmod{2015}$$

$$\Rightarrow mn + n^2 + 1514 = 2015r + 2014, \quad r \in \mathbb{N}$$

ដូច្នេះ $mn + n^2 + 1514$ ចែកបែបអឺគ្លីតនៃ $(mn + n^2 + 1514)$ នឹង 2015 គឺ 2014

IV. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ:

$$\begin{cases} \sqrt{3x} \left(1 + \frac{1}{x+y} \right) = 2 \\ \sqrt{7y} \left(1 - \frac{1}{x+y} \right) = 4\sqrt{2} \end{cases} \quad (I)$$

$$\text{ប្រព័ន្ធសមីការមានចម្លើយកាលណា } \begin{cases} 3x > 0 \\ 7y > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \wedge y > 0$$

របៀបទី១

ប្រព័ន្ធសមីការ (I) សមមូលនឹង:

$$\begin{cases} 1 + \frac{1}{x+y} = \frac{2}{\sqrt{3x}} \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} 1 - \frac{1}{x+y} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} \end{cases} \quad (2)$$

យក (1)+(2) យើងបាន:

$$2 = \frac{2}{\sqrt{3x}} + \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3x}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} = 1 \quad (3)$$

យក (1)-(2) យើងបាន:

$$\frac{2}{x+y} = \frac{2}{\sqrt{3x}} - \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3x}} - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} = \frac{1}{x+y} \quad (4)$$

តាម (3) និង (4) យើងបានប្រព័ន្ធសមីការ:

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3x}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} = 1 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3x}} - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} = \frac{1}{x+y} \end{cases} \quad (4)$$

បូកអង្គ និង អង្គនៃសមីការទាំងពីរ យើងបាន:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3x}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{3x}} - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} \right) = \frac{1}{x+y}$$

$$\frac{1}{3x} - \frac{8}{7y} = \frac{1}{x+y}$$

$$7y(x+y) - 24x(x+y) = 21xy$$

$$7xy + 7y^2 - 24x^2 - 24xy = 21xy$$

$$7y^2 - 38xy - 24x^2 = 0$$

$$7y^2 - 42xy + 4xy - 24x^2 = 0$$

$$7y(y - 6x) + 4x(y - 6x) = 0$$

$$(y - 6x)(7y + 4x) = 0 \quad (5)$$

ដោយ $x > 0, y > 0 \Rightarrow 7y + 4x \neq 0$

នោះ សមីការ (*) $\Leftrightarrow y - 6x = 0 \Leftrightarrow y = 6x \quad (6)$

យក $y = 6x$ ជួសក្នុងសមីការ (3) យើងបាន:

$$\frac{1}{\sqrt{3x}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7 \cdot 6x}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3x} + \frac{4\sqrt{2}}{3x\sqrt{14}} + \frac{8}{42x} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} \left(\frac{1}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{14}} + \frac{4}{21} \right) = 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{14}} + \frac{4}{21}} = \frac{11 + 4\sqrt{7}}{21}$$

យកតម្លៃ x ជួសក្នុងសមីការ (6)

$$y = 6 \cdot \frac{11 + 4\sqrt{7}}{21} = \frac{22 + 8\sqrt{7}}{7}$$

ដូច្នេះ ប្រព័ន្ធសមីការមានចម្លើយ

$$\left(x = \frac{11 + 4\sqrt{7}}{21}, y = \frac{22 + 8\sqrt{7}}{7} \right)$$

រក្សាបទី២

$$\text{ប្រព័ន្ធសមីការ (I) សមមូល} \begin{cases} \sqrt{x} \left(1 + \frac{1}{x+y} \right) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ \sqrt{y} \left(1 - \frac{1}{x+y} \right) = \frac{4\sqrt{14}}{7} \end{cases}$$

តាង $a = \sqrt{x}, b = \sqrt{y} \Leftrightarrow x = a^2, y = b^2, a > 0, b > 0$

នោះប្រព័ន្ធសមីការទៅជា:

$$\begin{cases} a \left(1 + \frac{1}{a^2 + b^2} \right) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ b \left(1 - \frac{1}{a^2 + b^2} \right) = \frac{4\sqrt{14}}{7} \end{cases}$$

តាង $z = a + bi \Rightarrow |z|^2 = a^2 + b^2$

ហើយ $a^2 + b^2 = |z|^2 = z \cdot \bar{z}$

យើងបាន:

$$a \left(1 + \frac{1}{a^2 + b^2} \right) + bi \left(1 - \frac{1}{a^2 + b^2} \right) = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{4\sqrt{14}}{7} i$$

$$\Leftrightarrow a + bi + \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{4\sqrt{14}}{7} i$$

$$\Leftrightarrow z + \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{4\sqrt{14}}{7} i$$

$$\Leftrightarrow z + \frac{1}{z} = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{4\sqrt{14}}{7} i$$

$$\Leftrightarrow z^2 - 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{14}}{7} i \right) z + 1 = 0$$

$$\Delta = \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{14}}{7} i \right)^2 - 1$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{4\sqrt{42}}{21} i - \frac{8}{7} - 1$$

$$= \frac{-38}{21} + \frac{4\sqrt{42}}{21} i$$

$$\sqrt{\Delta'} = \sqrt{\frac{-38}{21} + \frac{4\sqrt{42}}{21} i}$$

$$= \pm \left(\frac{2}{\sqrt{21}} + \sqrt{2} i \right)$$

យើងបាន $z = \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{14}}{7} i \right) \pm \left(\frac{2}{\sqrt{21}} + \sqrt{2} i \right)$

$$z = \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \pm \frac{2\sqrt{21}}{21} \right) + \left(\frac{2\sqrt{14}}{7} \pm \sqrt{2} \right) i$$

ប៉ុន្តែ $z = a + bi$ ហើយ $a > 0, b > 0$

យើងទាញបាន $a = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{21}}{21}, b = \frac{2\sqrt{14}}{7} + \sqrt{2}$

ដោយ $x = a^2, y = b^2$ យើងបាន:

$$x = \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{21}}{21} \right)^2 = \frac{11 + 4\sqrt{7}}{21}$$

$$y = \left(\frac{2\sqrt{14}}{7} + \sqrt{2} \right)^2 = \frac{22 + 8\sqrt{7}}{7}$$

ដូច្នេះ ប្រព័ន្ធសមីការមានចម្លើយ

$$\left(x = \frac{11 + 4\sqrt{7}}{21}, y = \frac{22 + 8\sqrt{7}}{7} \right)$$

V. រកគ្រប់អនុគមន៍នៃចំនួនពិត $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ផ្សេងផ្ទាត់

$$f(xy) = \frac{f(x) + f(y)}{x + y} \text{ ដែល } x, y \in \mathbb{R}, x + y \neq 0$$

ជំនួស $y = 1$ ក្នុង $f(xy) = \frac{f(x) + f(y)}{x + y} \quad (*)$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{f(x) + f(1)}{x + 1}$$

$$\Leftrightarrow x \cdot f(x) + f(x) = f(x) + f(1)$$

$$\Leftrightarrow x \cdot f(x) = f(1) \quad (**)$$

- បើ $x=0 \Rightarrow 0 \cdot f(0) = f(1) \Rightarrow f(1)=0$

ជំនួស $x=3, y=0$ ក្នុង(*) យើងបាន:

$$f(0) = \frac{f(3) + f(0)}{3+0}$$

$$3f(0) = f(3) + f(0)$$

$$2f(0) = f(3) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$$

ជំនួស $x=-1, y=0$ ក្នុង(*) យើងបាន:

$$f(0) = \frac{f(-1) + f(0)}{-1+0}$$

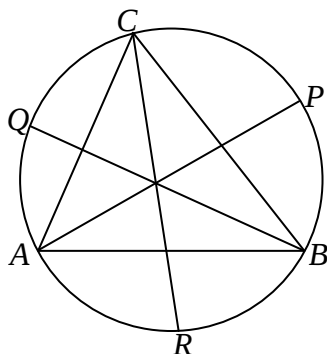
$$-f(0) = f(-1) + f(0)$$

$$2f(0) = -f(-1)$$

$$2 \cdot 0 = -f(-1) \Rightarrow f(-1) = 0$$

ដូច្នេះ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x យើងបាន $f(x)=0$

VI. បង្ហាញថា $AP+BQ+CR > BC+CA+AB$



កន្លះបន្ទាត់ពុះក្នុងនៃមុំ $\angle A, \angle B$ និង $\angle C$ នៃត្រីកោណ ABC កាត់រង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC ត្រង់ចំណុច P, Q និង R រៀងគ្នា នោះ $\angle ABQ = \angle CBQ$

$$\Rightarrow AQ = CQ$$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុសក្នុង $\triangle ABQ$ និង $\triangle BCQ$ យើងបាន:

$$AQ^2 = AB^2 + BQ^2 - 2AB \cdot BQ \cdot \cos \angle ABQ \quad (1)$$

$$CQ^2 = BC^2 + BQ^2 - 2BC \cdot BQ \cdot \cos \angle CBQ \quad (2)$$

យក (1)-(2) យើងបាន:

$$\begin{aligned} AQ^2 - CQ^2 &= AB^2 - BC^2 - 2BQ \cdot (AB - BC) \cdot \cos \angle ABQ \\ &= (AB - BC)(AB + BC) - 2BQ \cdot (AB - BC) \cdot \cos \angle ABQ \\ &= (AB - BC)(AB + BC - 2BQ \cdot \cos \angle ABQ) \end{aligned}$$

តែ $AQ = CQ$

$$\Leftrightarrow AQ^2 = CQ^2 \Leftrightarrow AQ^2 - CQ^2 = 0 \quad (3)$$

យើងបាន $(AB - BC)(AB + BC - 2BQ \cdot \cos \angle ABQ) = 0$

$$(AB - BC)(AB + BC - 2BQ \cdot \cos \angle ABQ) = 0 \quad (4)$$

❖ បើ $AB - BC = 0 \Leftrightarrow AB = BC$

នោះ $\triangle ABC$ ជាត្រីកោណសមបាតកំពូល B

នោះ BQ ជាអង្កត់ផ្ចិតរង្វង់

$$\Rightarrow AB + BC = 2AB < 2BQ$$

❖ បើ $AB - BC \neq 0 \Leftrightarrow AB \neq BC$

នោះ (4) $\Leftrightarrow AB + BC - 2BQ \cdot \cos \angle ABQ = 0$

$$AB + BC = 2BQ \cdot \cos \angle ABQ$$

ដោយ $\cos \angle ABQ < 1 \Rightarrow 2BQ \cdot \cos \angle ABQ < 2BQ$

$$\Rightarrow AB + BC < 2BQ$$

យើងទាញបាន $\Rightarrow AB + BC < 2BQ$ (5)

ស្រាយតាមរបៀបដូចគ្នាដែរ យើងបាន:

$$AB + CA < 2AP \quad (6)$$

$$BC + CA < 2CR \quad (7)$$

យក (5)+(6)+(7) យើងបាន:

$$2(AB + BC + CA) < 2(BQ + AP + CR)$$

$$\Rightarrow AP + BQ + CR > BC + AB + CA$$

ដូច្នេះ $AP + BQ + CR > BC + AB + CA$